Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
11. Übung

Sommersemester 2008

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 30.06.2008 vor der Vorlesung

Die Aufgaben dieser Serie sind nicht mehr zwingend zulassungsrelevant, zählen aber auf jeden Fall zum Klausurstoff!

1. Eigenwerte ** Punkte*

Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und transformieren Sie A auf Diagonalgestalt. Die Transformationsmatrizen sind selbstverständlich anzugeben! Prüfen Sie die Determinante sowie die Spur vor und nach der Transformation!

2. Gekoppelte Differentialgleichungen ** Punkte*

Lösen Sie das folgende System gekoppelter linearer Differentialgleichungen

$$\ddot{x}_1 = x_1 + 2x_2$$
$$\ddot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2$$

mit allgemeinen Anfangsbedingungen.

3. Inhomogene lineare Differentialgleichungen ** Punkte*

In der Vorlesung haben Sie das Verfahren der Variation der Konstanten zur Lösung inhomogener Differentialgleichung kennengelernt. Ein weiteres Verfahren bedient sich der Fouriertransformation und der Deltafunktion. Man spricht von der Methode der Greenschen Funktion. Dies ist ein sehr bedeutendes Verfahren, und ist für die störungstheoretisch-graphische Behandlung vieler Probleme der Quantenfeldtheorie unabdingbar. Wir wenden es hier auf das Problem eines überdämpften getriebenen Oszillators an. Gegeben sei dazu die Differentialgleichung

$$-\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \tag{1}$$

mit einer zunächst noch unbekannten Funktion $f(t)$.

a) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\left[-\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right] G(t) = \delta(t),$$

indem Sie beide Seiten der Gleichung fouriertransformieren. Verwenden Sie das Integral aus der Funktionentheorie, worin Θ die Heavisidefunktion bezeichnet.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{a - \mathrm{i}x} = \Theta(k) \cdot \mathrm{e}^{-ak}.$$

b) Zeigen Sie, daß

$$x_s(t) = \int\limits_{t_0}^{\infty} G(t-s) \cdot f(s) \mathrm{d}s$$

für alle $t > t_0$ eine spezielle Lösung von Gleichung (1) ist. Es reicht auch, wenn Sie $t_0 = -\infty$ behandeln, falls Sie sonst unsicher sind.

c) Berechnen Sie sie spezielle Lösung für

$$f(t) = f \cdot \mathrm{e}^{-(\lambda t)^2}$$

4. Drehung ** Punkte*

Berechnen Sie die Matrix, die (in kartesischen Koordinaten) eine Drehung um den Winkel $3\pi/2$ um die y-Achse beschreibt. Die Drehung erfolg eim mathematisch positiven Drehsinn, d.h. die z-Achse muß in Richtung der x-Achse gedreht werden.
Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die Eigenvektoren dieser Matrix!

5. Trägheitstensor ** Punkte*

Der Trägheitstensor eines starren Körpers in einem körperfesten Bezugssystem ist gegeben durch

$$I_{kl} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}V \ \rho(\vec{x})(|\vec{x}|^2 \delta_{kl} - x_l \cdot x_k).$$

Hierin ist $\rho(x)$ die starre Massendichte und δ_{kl} das Kröneckersymbol, 1 wenn $k = l$, 0 sonst. Zeigen Sie, für jeweils verspiedene Indexparameter i, j, k gilt $I_{ii} + I_{jj} \geq I_{kk}$.

6. Hermitesche Operatoren ** Punkte*

Ein Operator p operiere auf seinem Definitionsbereich $D(p) \subset H$ im Hilbertraum $H = L^2[-a; a]$ (reellwertiger Funktionen) durch

$$p : H \supset D(p) \longrightarrow H \quad ; \quad H \ni f \mapsto p(f) = f'.$$

Dabei sei der Definitionsbereich gegeben als

$$D(p) := \{f \in H \mid f \in C^1[-a; a],\ f' \in H,\ f(-a) = f(a) = 0\}.$$

$C^1[-a; a]$ bezeichnet die Menge aller differenzierbarer Funktionen auf dem Intervall $[-a; a]$. Zeigen Sie, daß p hermitesch ist.
Bemerkungen: (a) Der Operator taucht, mit einem zusätzlichen Vorfaktor verziert, als der Impulsoperator für das Kastenpotentialproblem in der Quantenmechanik auf. In der Quantenmechanik sind die Wellenfunktionen jedoch komplexwertig. Die Hermitezität ist daher sehr wichtig, da physikalische Obvervable (wie eben auch der Impuls) nur reelle Eigenwerte (mögliche Meßwerte) haben dürfen. Dies stellt die Hermitezität gerade sicher.
(b) Mit dem angegebenen Definitionsbereich ist p nicht selbstadjungiert! Der Definitionsbereich seines adjungierten Operators $D(p) \subset D(p^\dagger)$ ist nämlich echt größer. Durch die Wahl

$$D(p) := \{f \in H \mid f \in AC[-a; a],\ f' \in H,\ f(-a) = f(a)\}$$

(AC sind die absolut stetigen Funktionen - differenzierbar fast überall) kann man ihn selbstadjungiert machen. Die selbstadjungierte Erweiterung ist jedoch nicht eindeutig, da auch die Randbedingung $f(-a) = -f(a)$ zum Ziel führt. Die Definitionsbereiche machen die Funktionalanalysis unbeschränkter Operatoren sehr knifflig. Für Sie hat das aber im Moment keine Bedeutung, in der Klausur schon gar nicht. Im Falle beschränkter Operatoren, insbesondere endlichdimensionale, ist Hermitezität und Selbstadjungiertheit identisch.