Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
Präsenzübung

Wintersemester 2008/09

Diese Aufgabenserie wird in der ersten Vorlesungswoche im Rahmen einer Präsenzübung bearbeitet und nicht bepunktet. Nichtsdestoweniger sind alle Aufgaben klausurrelevant, insofern ist es ratsam, die Aufgaben sorgfältig zu bearbeiten und die Lösungswege zu verstehen.

1. Induktionsbeweis

Der Schwerpunkt dieser Vorlesung liegt nicht auf mathematischen Beweisstrategien. Doch verbergen sich in den Beweisen mathematischer Aussagen oft die wichtigen Ideen, die den Dreh- und Angelpunkt der Formeln und Aussagen bilden. Darüberhinaus ergeben sich wichtige Ansatzideen für mathematische Probleme aus der Idee, wie man eine Vermutung beweisen könnte. Eine wichtige Idee ist die vollständige Induktion, die wir Ihnen deshalb nicht vorenthalten wollen.
Im folgenden soll die Gleichung für die Partialsummen der geometrischen Folge mit dem Prinzip der vollständigen Induktion bewiesen werden:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

a) *Induktionsanfang:* Zeigen Sie, daß die obige Aussage für $n = 1$ erfüllt ist.

b) *Induktionsschluß:* Zeigen Sie die Richtigkeit der Aussage für ein beliebiges natürliches $n > 1$ unter der Annahme, die Beziehung gelte für $n - 1$.

Damit ist der Beweis für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ abgeschlossen. Worin steckt nun der Knackpunkt? Der Induktionsanfang stellt sicher, daß die Aussage für $n = 1$ richtig ist. Der Induktionsschluß garantiert die Richtigkeit der Aussage auch für $n = 2$, woraus wiederum die Gültigkeit im Fall $n = 3$ folgt, usw. Ausgehend vom Induktionsanfang (der deshalb wesentlicher Bestandteil des Beweises ist) induziert sich die Richtigkeit der Aussage damit auf alle natürlichen Zahlen.

2. Summen, Produkte

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\sum_{k=0}^{n} k\,; \quad \prod_{k=0}^{n} 2^k$$

3. Trigonometrische Funktionen

Berechnen Sie aus geometrischen Überlegungen die Werte $\sin(\pi/4)$, $\sin(\pi/6)$, $\cos(\pi/3)$ und $\cos(\pi/6)$. Freilich ist es Ihnen gestattet, zur Verkürzung der Rechnungen, zielführende Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen zu verwenden.

4. Gaußscher Algorithmus

Lösen Sie das folgende, in Matrixschreibweise angegebene, lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$