Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
1. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 21.10.2008 vor der Vorlesung!

Diese Hausaufgabenserie soll Sie ermuntern, Ihre Schulkenntnisse aufzufrischen! Falls Sie viele Schwierigkeiten haben, diese Aufgaben zu bearbeiten, sollten Sie schnellstmöglich alle entdeckten Wissenslücken schließen. Sie werden sonst dem Fluß der Vorlesung auf Dauer nicht folgen können!
Wenn Sie Probleme haben, die Aufgaben zu verstehen, fragen Sie in der ersten Präsenzübung!

1. Analytische Geometrie und Vektorrechung *3+4+3+12 Punkte*

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden, die durch die Gleichungen

$$g_1: \quad 2x + 3y = -2 \qquad \text{und} \qquad g_2: \quad x - 2y = 1$$

gegeben sind.

b) Zeichnen Sie die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie graphisch deren Differenz. Zeichnen Sie dazu die Differenz $\vec{v} - \vec{w}$ ebenfalls als Vektor (ausgehend vom Ursprung) in Ihr Diagramm.

c) Bestimmen Sie alle Vektoren der Ebene $\mathbb{R}^2$, die die Länge 2 haben und auf $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

d) Betrachtet werden die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen sie zu jedem dieser Vektoren v_i einen Vektor w_i, der die gleiche Richtung aber Länge 1 hat. Bestimmen Sie die Winkel zwischen jeweils 2 der Vektoren. Berechnen Sie ebenfalls die Kreuzprodukte zwischen jedem Vektorenpaar.

2. Summen, Produkte *4+2+3+4 Punkte*

a) Zeigen Sie die allgemeine binomische Formel durch einen Induktionsbeweis:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} \quad \text{mit} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

In der Präsenzübung wird das Prinzip der vollständigen Induktion an einem Beispiel wiederholt.

b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

c) Vereinfachen Sie die Teleskopsumme. Sei dazu (a_i) eine beliebige Zahlenfolge.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}).$$

Wann ist die Teleskopsumme konvergent?

d) Berechnen Sie nun die folgende Summe, indem Sie sie auf eine Teleskopsumme zurückführen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

3. Ableitungen

3 Punkte + 4 Bonuspunkte

a) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen bezüglich x!

$$f_1(x) = h \cdot \cos(\omega x)\,; \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}\,; \quad f_3(x) = \frac{\sin x}{x}$$

b) Vorausgeschickt sei die Bemerkung, daß der Bonuscharakter dieser Aufgabe nicht bedeutet, daß diese Aufgabe zu schwer für Sie ist. Vielmehr sollten Sie sich angespornt fühlen sauber nachzudenken, und schon wichtige Hausaufgabenpunkte für die Klausurzulassung zu sammeln.
Wenn Sie die Produktregel beherrschen, sollte es Ihnen möglich sein, formal die folgende, durch ein Produkt dargestellte Funktion abzuleiten.

$$f_4(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Dem fortgeschrittenen Rechner, der hier Konvergenzverhalten hinterfragt, sei versichert, daß das Produkt für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert. Mit Hilfsmitteln aus der Funktionentheorie kann man sogar zeigen, daß $f_3(x) = f_4(x)$, dies wird von Ihnen an dieser Stelle allerdings noch nicht erwartet. Kritische Zweifler, die (löblicherweise), *in dubio contra reo*, grundsätzlich Differenzierbarkeitsschwierigkeiten unterstellen, mögen sich daher bitte etwas gedulden. Arbeiten Sie die Aufgabe einfach formal durch.

4. Matrizen

12 Punkte

Berechnen Sie *alle* möglichen Produkte folgender Matrizen:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \;; \quad b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;; \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$