Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
2. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung. Heften Sie Ihre Blätter fest zusammen!

Abgabe im Übungskasten am 28.10.2008 vor der Vorlesung

1. Vektoridentitäten *2 + 4 Punkte*

a) Zeigen Sie, daß das Kreuzprodukt schiefsymmetrisch ist, d.h. daß

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Wenn Sie begründen können, warum es ausreichend ist, brauchen Sie diese Identität nur für die erste Komponente zeigen.

b) Rechnen Sie die bac-cab-Regel nach!

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Auch hier genügt es, falls Sie eine Begründung liefern können, wenn Sie sich auf die erste Komponente beschränken.

2. Vektorräume abstrakt *10 Punkte*

In der Vorlesung wurde der Begriff des Vektorraumes anhand der charakterisierenden Axiome eingeführt. Tatsächlich versteckt sich die Vektorraumstruktur in vielen Zusammenhängen, und wird Ihnen an vielen Stellen der Mathematik und der Physik begegnen. Als vorausgreifende Beispiele könnte man hier die Fourierentwicklung oder den Hilbertraum der Zustände eines Quantensystems anführen.
Um Ihnen schon ein Gefühl zu geben, wie sich die Vektorraumstruktur in abstrakten Räumen offenbart, stellen wir Ihnen diese Aufgabe:
Zeigen Sie, daß die Menge aller reellen Polynome bis Grad n (für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$) mit der üblichen (naheliegenden) Addition einen Vektorraum bilden. Es bedarf wohl keiner weiteren Erklärung, daß Ihr Vorgehen darin besteht, alle Vektorraumaxiome nachzuprüfen.

3. Determinanten *6 Punkte*

Berechnen Sie, möglichst vorteilhaft, die folgenden Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} ; \qquad \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & d & e \end{pmatrix} ; \qquad \det\begin{pmatrix} 2 & a & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ b & c & d & 3 \\ 7 & e & 5 & 0 \end{pmatrix} .$$

4. Lokale Koordinatensysteme

4 + 6 + 4 Punkte

a) Geben Sie zu den folgenden Koordinatenpaaren in kartesischer bzw. polarer Schreibweise die jeweils andere Darstellung an!

$$\begin{pmatrix} r = 3 \\ \varphi = (\pi/6) \end{pmatrix} \; ; \quad \begin{pmatrix} r = 2 \\ \varphi = (\pi/3) \end{pmatrix} \; ; \quad \begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 2 \end{pmatrix} \; ; \quad \begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeichnen Sie die folgenden, in Polarkoordinaten angegebenen Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi] \mid 1 < r < 2\} \\ M_2 &= \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi] \mid r < 2;\ 0 \leq \varphi \leq (\pi/6)\} \\ M_3 &= \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi] \mid r \leq \sin^2 \varphi\} \end{aligned}$$

c) Parametrisieren Sie die folgenden, verbal formulierten Mengen in Kugelkoordinaten: (1) eine Halbkugelschale mit Innenradius 2 und Außenradius 2,5; (2) einen (Voll-) Kegel mit Öffnungswinkel $\pi/3$, der sich unbeschränkt ausdehnt.
Die Parametrisierung ist nicht eindeutig. Es liegt an Ihnen, sie geschickt zu wählen.

5. Lineare Gleichungssysteme

10 + 4 Punkte

a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch Bildung der Inversen.

b) Gegeben sei die 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mit reellen Einträgen $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Determinante $\det A$ und die Spur $\operatorname{tr} A$. Bestimmen Sie die Inverse von A. Wann existiert diese nicht?