Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
3. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 04.11.2008 vor der Vorlesung

1. Matrizen als lineare Abbildungen *4 + 10 Punkte*

Mithilfe einer linearen Koordinatenabbildung kann man jeden abstrakten d-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit dem $\mathbb{R}^d$ identifizieren. In letzterem kann man auch besonders gut rechnen. Eine lineare Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ zwischen zwei Vektorräumen der Dimensionen m und n kann man in Koordinaten als Matrix $m(f) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ schreiben.

a) Rechnen Sie den fundamentalen Merksatz "*Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Standard-einheinheitsvektoren* $(e_1, \ldots, e_n)$." am speziellen Beispiel der allgemeinen 2×2-Matrix explizit nach.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad ; \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Machen Sie sich den linearen Abbildungsmechanismus, der sich hinter dem Matrixkalkül verbirgt, mit den folgenden 2 Matrizen klar.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie dazu das Bild des Vektors v unter der Abbildung B, also Bv. Berechnen Sie anschließend das Bild von Bv unter der Abbildung A, d.h. $A(Bv)$. Vergleichen Sie dies mit dem Bild des Vektors v unter der Abbildung, die durch die Produktmatrix AB beschrieben ist, also $(AB)v$.
Führen Sie diese Rechnungen mit vertauschten Rollen von A und B nocheinmal durch. Erkennen Sie, warum Matrixmultiplikation im allgemeinen nicht kommutativ sein kann?

2. Leibnizformel für Determinanten *3 + 3 + 2 Punkte*

In der Vorlesung haben Sie die Leibnizformel für Determinanten kennengelernt:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}_n} \mathrm{sign}\,(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Beziehung, daß für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ gilt: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

b) Verwenden Sie die Leibnizformel, um zu zeigen, daß für jede quadratische Matrix A gilt: $\det A = \det A^{\mathrm{t}}$.

c) Zeigen Sie anhand eines selbstgewählten Beispiels, daß im allgemeinen

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

(Dieser Aufgabenteil hat nichts mit der Leibnizformel zu tun.)

3. Bedeutung der Determinante *8 + 2 Punkte*

In dieser Aufgabe geht es darum, daß Sie verstehen, was sich hinter der Determinante, die ja ersteinmal nichts weiter ist als eine Zahl, geometrisch anschaulich verbirgt.

a) Das Skalarprodukt gibt eine Möglichkeit an die Hand, Vektorräume zu vermessen, also Längen von Vektoren zu bestimmen. In der Vorlesung haben Sie das (sog. euklidische) Skalarprodukt schon kennengelernt. Die Determinante einer quadratischen Matrix A ist nun ein Maß, inwieweit das orientierte Volumen des von den Standardeinheitsvektoren $\{e_1, \dots, e_n\}$ ausgespannten Spates durch die Abbildung verzerrt wird. Anders gesprochen, mißt die Determinante das orientierte Volumen des Spates, der durch die Bilder $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ aufgespannt wird. Der Begriff der Orientierung sollte Sie hierbei noch nicht sonderlich interessieren, er bezieht sich auf die Reihenfolge, also den Orientierungssinn der Basisvektoren und wirkt sich ausschließlich auf das Vorzeichen der Determinante aus.
In zwei Raumdimensionen ist das Problem leicht. Zeigen Sie, daß der Betrag der Determinante einer 2×2 Matrix genau dem Flächeninhalt des durch die Spalten aufgespannten Parallelograms entspricht! Auch in drei Raumdimensionen kennen Sie eine Gleichung für das Spatvolumen: das Spatprodukt. Aus dem eben Erläuterten folgt nun die Identität

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Rechnen Sie diese Identität explizit nach!

b) Erklären Sie kurz, bezugnehmend auf die geometrische Deutung der Determinante, den Zusammenhang zwischen Determinante und Invertierbarkeit einer quadratischen Matrix!

4. Trigonometrische Funktionen *3 + 3 + 2 Punkte*

a) Bestimmen Sie A und φ in Abhängigkeit von a und b!

$$a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

b) Zeigen Sie die Identität

$$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

c) Geben Sie die Periodendauer der Schwingung an, die durch folgende Bahnkurve beschrieben wird:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{5} c_i \cdot \sin(i \cdot \omega t).$$

5. Kurvendiskussion: Morsepotential Teil 1 *10 Punkte*

Zur Beschreibung des Schwingungsspektrums eines zweiatomigen Moleküls gelingt eine, in vieler Hinsicht sehr gute, Näherung durch das Morsemodell. Das Morsepotential entspricht der potentiellen Energie des Moleküls als Funktion des Abstandes der beiden Konstituentenatome.

$$V(r) = D \cdot \left[1 - \mathrm{e}^{-a \cdot (r - r_0)}\right]^2 + V_0.$$

Bestimmen Sie den Gleichgewichtsabstand der beiden Atome, d.h. den Abstand, für den das Molekül die geringste potentielle Energie annimmt. Ermitteln Sie weiter die Dissoziationsenergie des Moleküls, also die Energie, die nötig ist, um das Molekül aus dem Gleichgewichtszustand heraus zu dissoziieren (d.h. die Atome beliebig weit voneinander zu trennen). Ist es (im Rahmen des Morsemodells) möglich, die beiden Atome beliebig nah aneinanderzupressen?