Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
4. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 11.11.2008 vor der Vorlesung

Falls der ein oder andere schon ahnt, nach 11.11 Uhr nicht mehr in der Lage zu sein, den Schlitz im Übungskasten zu treffen, sollten Sie die Aufgaben **vorher** einwerfen! Nachträgliche Einreichungen können nicht mehr berücksichtigt werden.

1. Exponentialfunktion und Logarithmus

4 + 7 Punkte

a) Zeigen Sie die in der Vorlesung angegebenen Rechenregeln

$$\log(ab) = \log a + \log b\,; \quad \log a^b = b \log a\,; \quad \log \frac{1}{a} = -\log a\,; \quad \log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

b) Die hyperbolischen Funktionen sind definiert durch $\cosh x := (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$, $\sinh x := (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$ sowie $\tanh x := \sinh x / \cosh x =: 1/\coth x$. Diskutieren Sie den hyperbolischen Cosinus und Sinus. Was sind deren Ableitungen? Finden Sie das hyperbolische Analogon zur Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. Taylorentwicklung: Morsepotential Teil 2

5 Punkte

Wie schon in (vgl. Übung 3) erwähnt, kann man für das Morsepotential

$$V(r) = D \cdot \left[1 - \mathrm{e}^{-a\cdot(r-r_0)}\right]^2 + V_0.$$

das Schwingungsspektrum eines zweiatomigen Moleküls mit quantenmechanischen Methoden ausrechnen. In der Nähe der Gleichgewichtslage verhält es sich näherungsweise harmonisch (d.h. die Rückstellkraft ist proportional zur Auslenkung), und man kann erwarten, daß eine harmonische Näherung vom exakten Resultat nicht allzu stark abweichen sollte.
Ihre Aufgabe besteht konkret darin, für kleine Auslenkungen von der Gleichgewichtslage $r = r_0$ die harmonische Rückstellkraft zu berechnen. Berechnen Sie also das Taylorpolynom um $r = r_0$ bis zu einer sinnvollen Ordnung, dann brauchen Sie das Ergebnis nur noch abzulesen...
Hinweis: Für die Kraft f gilt: $f(r) = -V'(r)$.

3. Ableitungen

6 + 9 + 5 Punkte

a) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen nach a! (Alle anderen Parameter sind natürlich als konstant zu betrachten.)

$$f_1(a) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\mathrm{e}^{-a\cdot x^2}\,; \quad f_2(a) = \sin(\sin(\omega \cdot a))\,; \quad f_3(a) = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{a}$$

b) Sei $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Versuchen Sie, die maximalen Definitionsbereiche der folgenden Funktionen so zu finden, daß die Funktionen überall (reell) differenzierbar sind, und berechnen Sie deren Ableitung!

$$f_1(x) = \frac{1}{1+\varphi(x)}\ ; \quad f_2(x) = \sin(\varphi(x))\ ; \quad f_3(x) = \mathrm{e}^{-\ln\varphi(x)}\ ; \quad f_4(x) = [\varphi(x)]^{\varphi(x)}$$

c) Begründen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ; \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ stetig ist. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion. Ist diese stetig in $x = 0$? Differenzierbar in $x = 0$ ist f jedenfalls mit Sicherheit! Zeigen Sie dies, indem Sie die Ableitung von f an $x = 0$ explizit berechnen (Definition!).
Bemerkung: Hier haben Sie ein hübsches Beispiel für eine Funktion, die differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist. Aus der Unstetigkeit der Ableitung auf Nichtdifferenzierbarkeit zu schließen, ist im allgemeinen falsch!

4. Integrale

8 + 4 + 2 Punkte

a) Berechnen Sie die folgenden (unbestimmten) Integrale:

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}\ ; \quad I_2 = \int \mathrm{d}x\ \frac{\ln x}{x^2}\ ; \quad I_3 = \int \mathrm{d}x\ \frac{\mathrm{e}^x}{5+2\mathrm{e}^x}\ ; \quad I_4 = \int \mathrm{d}x\ \sin^5 x \cdot \cos x.$$

b) Brechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}\ ; \qquad \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\ \cos^{32} x \cdot \sin^{49} x.$$

c) Zeigen Sie:

$$\tan x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$