Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
6. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 25.11.2008 vor der Vorlesung

1. Komplexe Wurzeln

4 + 6 + 7 Punkte

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $x^3 = 1$ und zeichnen Sie diese in die Gaußsche Zahlenebene. Verifizieren Sie eine der Lösungen mit nichtverschwindendem Imaginärteil durch die geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation.

b) Ermitteln Sie alle Lösungen von

$$x^2 = 12 + 5\mathrm{i}, \quad x^4 = 81 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} \quad \text{und} \quad x^4 = \frac{16}{5} + \frac{12}{5}\mathrm{i}.$$

c) Motivation für die Einführung der komplexen Zahlen ist das Bedürfnis, auch negative Zahlen zu radizieren. In der Literatur wird nach dieser Feststellung auch flugs die imaginäre Einheit $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ eingeführt, wonach dann Multiplikation und Addition komplexer Zahlen "wie gewöhnlich" durchzuführen und damit definiert sind. So banal und leicht verständlich diese Vorgehensweise erscheinen mag, schießt sie doch nicht nur genau an Pudels Kern vorbei, sondern ist dabei auch strenggenommen falsch. In der Vorlesung wurde bereits großer Wert darauf gelegt, daß man nicht einfach $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ definieren kann, sondern daß man dies als eine beschreibende Eigenschaft von i zu deuten hat. Dies geht jedoch, auch weil es im Skript nicht so leicht als Formel gesetzt werden kann, häufig unter. In dieser Aufgabe soll die Problematik bei der Einführung der imaginären Einheit, und damit den komplexen Wurzeln insgesamt, beleuchtet werden. Ausgehend von der "Definition" der Zahl i als $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$ rechnen wir nämlich fix nach, daß

$$\mathrm{i}^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Freilich, so war das alles nicht gedacht. Was ist hier schiefgegangen? Ihre Aufgabe besteht jedenfalls darin, dies herauszufinden, genau auf den Punkt zu bringen und die Definition der imaginären Einheit in einer schlüssigen und korrekten Form darzulegen. Dies kann einiges an deklaratorischer Vorarbeit in Anspruch nehmen, so außerordentlich knapp wie $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ werden Sie es nicht hinbekommen. Sie werden sich etwas mit Rechengesetzen und derlei Dingen auseinandersetzen müssen. Ich gebe Ihnen zwei Hinweise: mit $\mathrm{i}^2 = -1$ ist man schonmal auf einem guten Weg, jetzt gilt es darauf zu achten, diesen nicht zu verlassen. Zweitens gibt es für kunstvoll schöpferisches Raten weder Punkte, noch lernen Sie etwas dabei. Vergessen Sie nicht, darzulegen, woran die obige Rechnung gescheitert ist! Dies ist nämlich der wesentliche Punkt, den Sie verstanden haben sollten. Denn selbst mit einer sauberen Definition der imaginären Einheit, sind die, für den Einsteiger befremdlichen Eigenschaften der komplexen Wurzeln nicht bereinigt.

2. Komplexe Zahlen *5 + 5 + 3 Punkte*

a) Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, daß jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten in Linearfaktoren zerfällt. Verwenden Sie diesen Satz, um zu zeigen, daß jedes Polynom mit reellen Koeffizienten ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle haben muß.
Hinweis: Was wissen Sie über (komplexe) Nullstellen reeller Polynome?

b) Verwenden Sie die Eulersche Formel, um explizit nachzurechnen, daß

$$\arctan\phi = \frac{\mathrm{i}}{2}\log\frac{\mathrm{i}+\phi}{\mathrm{i}-\phi}.$$

Sie dürfen verwenden, daß $\tan : \mathbb{R} \supset \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ surjektiv ist, also ganz $\mathbb{R}$ ausschöpft. Es kann daher nützlich sein, ϕ in einer naheliegenden Weise allgemein darzustellen und dafür dann die Rechnung auszuführen.

c) Gegeben Seien $z_1 = \exp(\mathrm{i}\pi/3)$ und $z_2 = 2\cdot\exp(\mathrm{i}\pi/2)$. Zeichnen Sie z_1, z_2 und auch das Produkt z_1z_2 in die Gaußsche Zahlenebene. Prüfen Sie, daß die Summe der Phasenwinkel von z_1 und z_2 gleich dem Phasenwinkel des Produktes sind.

3. Lineare Differentialgleichungen *10 Punkte*

Radioaktive Kerne zerfallen nach dem Gesetz:

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t).$$

Dabei ist N die Anzahl der Kerne und $\lambda > 0$ eine zu bestimmende Zerfallskonstante. In einer radioaktiven Zerfallsreihe $1 \to 2 \to \ldots \to n$ mit n verschiedenen Kernen gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\lambda_1 N_1(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t)$$

und so weiter. Diese Gleichungen berücksichtigen die Tatsache, daß die Zahl der Kerne vom Typ 2 durch den Zerfall zwar geschmälert wird, durch den Zerfall von Kernen vom Typ 1 jedoch wieder anwächst. Wir beschränken uns hier auf den Fall $n = 2$. Bestimmen Sie $N_2(t)$ mit den Anfangsbedingungen $N_1(0) = N_0$ und $N_2(0) = 0$. In welcher Beziehung steht λ_1 zur Halbwertszeit der Kerne vom Typ 1? Die Halbwertszeit mißt, nach welcher Zeit die Hälfte aller Kerne einer Probe (ohne Zufuhr) zerfallen ist.

4. Integrieren *10 Punkte*

Nachdem Sie sich in der vergangenen Woche schon auf die Ermittlung von Stammfunktionen eingestimmt haben, gibt es hier noch eine, damit Sie nicht so rasch aus der Übung kommen. Schließlich gehen wir stramm auf die Probeklausur zu. Bestimmen Sie die Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{3\cdot\sin 2x}{4\cdot\sin^3 x - 3\cdot\sin x + 1}.$$