Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
8. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 09.12.2008 vor der Vorlesung

1. Partielle Ableitungen *5 Punkte*

Die Zustandsgleichung für ideale Gase lautet $p \cdot V = nR \cdot T$. Zeigen Sie, daß für ideale Gase damit die Identität

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} = -1.$$

erfüllt ist. (Das naive Kürzen der Differentiale mit Ergebnis 1 führt also auf den Holzweg!)

2. Felder und totale Differentiale *10 + 5 Punkte*

a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$ zu einem Dipolpotential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3},$$

für ein beliebiges Dipolmoment $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x & d_y & d_z \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$. Prüfen Sie, daß $\triangle\phi = 0$.

b) Ein Teilchen bewege sich entlang einer Bahn $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_x(t) & \gamma_y(t) & \gamma_z(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$ in einem statischen Skalarfeld $\psi(x,y,z)$. Zeigen Sie, daß die zeitliche Änderung des Skalarfeldes am Teilchen gegeben ist, durch

$$\frac{\mathrm{d}\psi_{\text{Teilchen}}}{\mathrm{d}t} = (\operatorname{grad}\psi)\cdot\dot{\vec{\gamma}}(t).$$

3. Wegintegrale *8 + 4 Punkte*

a) Im $\mathbb{R}^2$ sei C_1 der Weg der den Graphen der Funktion $y = \sqrt{x}$ für $x \in [0;1]$ beschreibt. Sei C_2 die Strecke von $(0,0)$ nach $(1,1)$. Ferner seien C_3 der Weg aus Strecken zusammengesetzte Weg $(0,0)-(1,0)-(1,1)$ und C_4 entsprechend $(0,0)-(0,1)-(1,1)$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{C_i} \begin{pmatrix} 2xy - x^2 \\ x + y^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\vec{r}$$

für alle $i = 1,2,3,4$.

b) Sei C der Weg mit der Parametrisierung

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \qquad t \in [\pi; 2\pi], \quad \text{und} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z}\mathrm{e}^x \\ x^2 \sin\frac{1}{y} \\ x^3 \cdot \mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld. Berechnen Sie das Wegintegral von $\vec{F}$ längs C.

4. Schwerpunkte

9 + 9 Punkte

Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Ort, an dem man ihn unterstützen muß, damit er im Gleichgewicht bleibt. Er ist gegeben durch das Integral

$$\vec{r}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{M} \int_U \rho(\vec{r}) \cdot \vec{r} \, \mathrm{d}V, \qquad M = \int_U \rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}V.$$

Hierbei sind $\rho : \mathbb{R}^3 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}$ die Massendichte (welche außerhalb von U verschwindet), und M wie angegeben die Gesamtmasse des Körpers.

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt einer homogenen (Massendichte $\rho(x, y, z) = \rho_0$) Halbkugel H_R mit Radius R, spezifiziert durch

$$H_R = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \, z \geq 0 \right\}.$$

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Vollzylinder $Z_{r,h}$ mit Radius r und Höhe h

$$Z_{r,h} = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = r^2, \, 0 \leq z \leq h \right\},$$

dessen Massendichte durch $\rho(x, y, x) = h - z$ beschrieben ist.