Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
9. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 16.12.2008 vor der Vorlesung

1. Gradient und Kegelschnitte *10 + 3 Punkte*

a) Die Kegelschnitte sind wichtige Kurven der algebraischen Geometrie, und auch in der Physik, etwa als Bahnkurven klassischer Systeme, kommt ihnen einige Bedeutung zu. Die Gleichung $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ beschreibt eine Hyperbel mit Brennpunkt $f = \begin{pmatrix} e & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$ $(e^2 = a^2 + b^2)$. Eine weitere Kegelschnittklasse sind die Ellipsen, die durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben sind, und deren Brennpunkt durch $f = \begin{pmatrix} e & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$ $(e^2 = a^2 - b^2)$ bestimmt ist. Zeigen Sie, daß sich konfokale (identischer Brennpunkt) Ellipsen und Hyperbeln orthogonal schneiden! (Es reicht, wenn Sie sich auf einen Hyperbelzweig beschränken.)

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, wie man mit dem Satz von Green Flächen über ein Wegintegral entlang des Randes bestimmen kann. Bestimmen Sie hiermit die Fläche einer Ellipse mit den Halbachsen a und b. Verwenden Sie dazu die in der Vorlesung angegebene Parametrisierung der Ellipse.

2. Kontinuitätsgleichung *8 + 4 Punkte*

a) Die Strömung einer idealen Flüssigkeit genügt der Kontinuitätsgleichung. Seien $\rho(\vec{r}, t)$ die Massendichte am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t und $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$ die Stromdichte. Die Stromdichte (Strom pro Fläche) gibt die Masse an, die pro Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche normal zur Strömung fließt. Als Vektor zeigt $\vec{\jmath}$ folglich in Richtung des Stromes. Die Kontinuitätsgleichung lautet nun:

$$\partial_t \rho(\vec{r}, t) + \operatorname{div} \vec{\jmath}(\vec{r}, t) = 0.$$

Diese Gleichung soll von Ihnen aus elementaren Überlegungen abgeleitet werden. Aufgrund der Massenerhaltung ist bekannt, daß die Änderung der Masse m innerhalb eines beschränkten Volumens U gleich dem Massenfluß durch die Berandungsfläche ∂U sein muß. Lapidar kann man dies so umformulieren, daß alles, was weniger im Topf U ist als vorher, jetzt woanders sein muß also rausgeflossen ist. Als Gleichung liest sich diese Aussage wie folgt:

$$\partial_t m = \partial_t \int_U \rho(\vec{r}, t) \mathrm{d}V = - \int_{\partial U} \vec{\jmath}(\vec{r}, t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Nutzen Sie diese Gleichung unter der Annahme, daß sie für beliebige Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^3$ gelten muß, um die Kontinuitätsgleichung abzuleiten.

b) Sei die Stromdichte gegeben als $\vec{\jmath}(\vec{r}, t) = \cos(\omega t) \cdot \vec{r}$. Bestimmen Sie die Funktion $\rho(\vec{r}, t)$ für $\rho(\vec{r}, 0) = \rho_0$.

3. Vektoranalysis

8 Punkte

Zeigen Sie mithilfe der Sätze von Gauß und Stokes, daß für jedes Vektorfeld $\vec{v}$ gilt $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 0$, und für jedes Skalarfeld f die Gleichung $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ erfüllt ist.
Die Betonung liegt hier auf der Verwendung der Integralsätze! Sie dürfen verwenden, daß das Integral über die leere Menge gleich 0 ist.

4. Flächenintegral

4 + 5 + 3 Punkte

Betrachten Sie einen nach oben geöffneten Kegel um die z-Achse mit einem Winkel ϑ zwischen Kegelmantel und z-Achse und einer Höhe h. Berechnen Sie unter Verwendung von Kugelkoordinaten

a) die Oberfläche des Kegels und

b) den Fluß des Feldes $\vec{A}(\vec{r}) = ar^n \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$ (die Komponenten des Feldes sind kartesisch!, fragen Sie bei Mißverständnissen) durch die Kegeloberfläche!

c) Leiten Sie die Oberflächenformel für eine Kugel mit Radius R her!

5. Taylorentwicklung

5 Punkte

Diese Aufgabe dient dazu, Sie mit der Nase darauf zu stoßen, daß die Taylorentwicklung durchaus eine wichtige Technik ist, die Sie beherrschen sollten. Deshalb sollten Sie hier die Vorklausurlösung nocheinmal sauber darstellen, am besten ohne Ihre Mitschriften zu konsultieren.
Ein Teilchen mit Ruhemasse m_0, welches sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, besitzt die relativistische Gesamtenergie:

$$E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Bedienen Sie sich der Taylorentwicklung, um zu zeigen, daß die relativistische Gesamtenergie für hinreichend kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ in die bekannte Form $T = E(v) - E(0) = (m_0/2)v^2$ übergeht. Berechnen Sie auch die erste relativistische Korrektur.
Hinweis: Anstatt eine Reihe in v oder v/c aufzustellen, kann man auch nach dem Parameter $u = v^2/c^2$ entwickeln.