Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
13. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Freiwillige Abgabe im Übungskasten am 27.01.2009 vor der Vorlesung

Wie versprochen, ist diese Übungsserie nicht mehr relevant für den Hauptstoff der ersten Klausur. Es ist jedoch möglich, daß Bonusaufgaben aus dieser Serie hervorgehen. Desweiteren sind **alle** Hausaufgaben relevant für die Wiederholungsklausur!

1. Untergruppen

** Punkte*

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \subset G$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, daß H genau dann eine Untergruppe ist, wenn für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt $h_1 \circ h_2^{-1} \in H$. Beachten Sie, daß $h^{-1} \in G$, aber nicht zwingend $h^{-1} \in H$, dies ist unter anderem zu zeigen!

2. Direktes Produkt

** Punkte*

Zeigen Sie, daß das *direkte Produkt* $G_1 \otimes G_2$ zweier Gruppen $(G_1, \circ_1)$, $(G_2, \circ_2)$ tatsächlich eine Gruppe bildet. Das direkte Produkt ist als Menge definiert durch

$$G_1 \times G_2 := \{(g_1, g_2) \,|\, g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2\},$$

und die Verknüpfung sei

$$\circ : (G_1 \otimes G_2) \times (G_1 \otimes G_2) \longrightarrow G_1 \otimes G_2 \quad ; \quad (g_1, g_2) \circ (g_1', g_2') := (g_1 \circ_1 g_1', g_2 \circ_2 g_2').$$

3. Die $SU(2)$ als Gruppe

** Punkte*

Zeigen Sie, daß die Spingruppe $SU(2)$, wie sie in der Vorlesung definiert wurde:

$$SU(2) = U(2) \cap SL(2) = \{s \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \,|\, s^\dagger s = 1; \quad \det s = 1\},$$

mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung tatsächlich eine Gruppe bildet, indem Sie alle Gruppenaxiome prüfen.

4. Treue Darstellungen

** Punkte*

Sei $R = (\mathbb{R}, \cdot)$ die multiplikative Gruppe der reellen Zahlen. Zeigen Sie, daß die eindimensionale Darstellung im $\mathbb{C}^1$:

$$R \longrightarrow \mathrm{Mat}(1 \times 1, \mathbb{C}) \quad ; \quad \mathbb{R} \ni r \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}r}$$

nicht treu sein kann (ganz leicht!).