Andreas Schadschneider

Einführung in die Hydrodynamik und ihre modernen Anwendungen

Version: 24. Februar 2004

Wintersemester 2003/04

Vorbemerkungen

Die Vorlesung soll eine ausführliche Darstellung der Hydrodynamik geben, die im allgemeinen in der Vorlesung Theoretische Physik I zu kurz kommt. Besonderes Gewicht soll dabei auf moderne Anwendungen gelegt werden. Einfache hydrodynamische Modelle werden bei vielen Fragestellungen angewendet, um einen Überblick über das Verhalten zu gewinnen. Wir werden z.B. Beispiele aus den Bereichen Kosmologie und Astrophysik, Biologie und Medizin, Kernphysik, Straßenverkehr etc. kennen lernen.
Zusätzlich zur Vorlesung werden in unregelmäßigen Abständen begleitende Übungen angeboten. Diese sollen in erster Linie zum Nachdenken anregen.
Die wesentliche Aspekte der Hydrodynamik werden in den meisten Lehrbüchern zur Theoretischen Mechanik besprochen. Besonders empfehlenswert ist

L.D. Landau und E.M. Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI: Hydrodynamik* (Akademie-Verlag)

Der Zusammenhang mit aktuellen Fragestellungen der statistischen Physik ist in

D.H. Rothman und S. Zaleski: *Lattice-gas cellular automata (Simple models of complex hydrodynamics)* (Cambridge University Press)

dargestellt. Weitere spezielle Literaturhinweise werden an entsprechender Stelle in der Vorlesung gegeben.

Für Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar. Sie können auch per email an mich (`as@thp.uni-koeln.de`) geschickt werden. Die jeweils aktuellste Version des Skripts ist im Internet über meine Homepage

`http://www.thp.uni-koeln.de/~as/as.html`

verfügbar.

Andreas Schadschneider

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Einführung

Die Hydrodynamik beschäftigt sich mit der Untersuchung und Beschreibung von Flüssigkeiten und nicht zu stark verdünnten Gasen. Bevor wir detaillierter in die Theorie einsteigen, wollen wir etwas genauer festlegen, wodurch überhaupt Flüssigkeiten charakterisiert sind. Außerdem sollen einige sehr allgemeine Aspekte der Beschreibung von Flüssigkeiten diskutiert werden.

I.1 Was sind Flüssigkeiten?

Aus der Thermodynamik ist das Phasendiagramm einer typischen Substanz wohlbekannt (siehe Abb. I.1.1). Bei niedrigen Temperaturen und hohen Drucken liegt ein Festkörper vor. Dieser ist im i.a. kristallin, d.h. die Moleküle sind auf einem regelmäßigen Kristallgitter angeordnet. Es liegt daher eine langreichweitige periodische Ordnung vor. Außerdem führt dies dazu, daß Festkörper ein festes Volumen einnehmen. Die periodische Ordnung erlaubt auch zahlreiche Vereinfachungen bei der theoretischen Beschreibung von Festkörpern.
Bei hohem Temperaturen und niedrigen Drucken sind normale Stoffe gasförmig. Diese sind im Gegensatz zu den Festkörper ungeordnet und lassen sich daher sehr gut mit Hilfe einer statistischen Beschreibung charakterisieren. Gase tendieren dazu, den gesamten zur Verfügung stehenden Raum auszufüllen.
Flüssigkeiten nehmen in vieler Hinsicht eine Zwischenstellung ein. Aus Streuexperimenten (z.B. mit Neutronen oder Röntgenstrahlung) weiß man, daß sie ein kleinen Bereichen räumlich geordnet sind. Hier liegt eine gewissen Ähnlichkeit zu Kristallen vor. Allerdings sind die Moleküle nicht an feste Plätze gebunden und so liegt keine Fernordnung vor. Diese Eigenschaften machen die Untersuchung von Flüssigkeiten besonders schwierig.
Jenseits des kritischen Punktes (T_c, P_c) verschwindet der Unterschied zwischen Flüssigkeit und Gas. Deshalb faßt man Gase und Flüssigkeiten oft zu den *Fluiden* zusammen. Unterhalb (T_c, P_c) kann man sie z.B. an Hand des Verhaltens der Kompressibilität unterscheiden. Die Phasen sind dabei durch eine Phasenübergang erster Ordnung voneinander getrennt.
Wir wollen nun die Nahordnung in Flüssigkeiten etwas genauer studieren. Dazu betrachten wir die Korrelationsfunktion $g(\mathbf{r}, t)$. Diese ist definiert als die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t am Ort $\mathbf{r}$ ein Molekül zu finden, falls zur Zeit $t = 0$ eines am Ort $\mathbf{r} = 0$ war. Handelt es sich dabei um

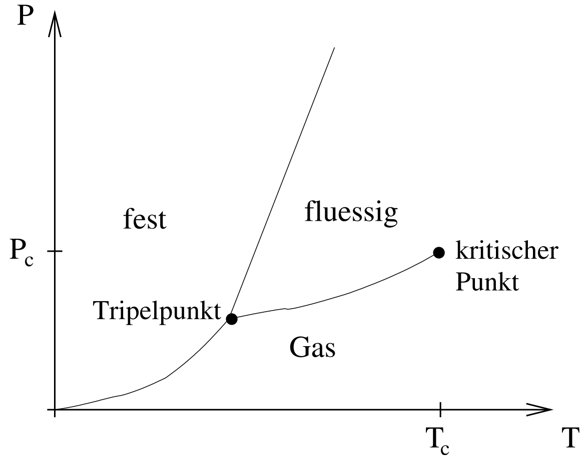

Abbildung I.1.1: Typisches Phasendiagramm.

das gleiche Teilchen, so spricht man von der *Autokorrelationsfunktion* $g_A(\mathbf{r}, t)$. Handelt es sich um ein anderes Teilchen, so nennt man sie *Paarkorrelationsfunktion* $g_P(\mathbf{r}, t)$.
Abb. I.1.2 zeigt das typische Verhalten der (radialen) Paarkorrelationsfunktion einer Flüssigkeit. Man erkennt deutlich Strukturen bei kurzen Abständen die von der Nahordnung herrühren. Dies ist ähnlich zu einem Festkörper, bei im idealisierten Fall Deltapeaks bei Vielfachen der Gitterkonstante auftreten. Für große Abstände wird die Paarkorrelation strukturlos, genau wie in einem Gas. Der Wert dort ist im wesentlichen durch die Dichte bestimmt.
Die Paarkorrelationsfunktion ist experimentell mit Hilfe von Streuexperimenten zugänglich. Dabei kommt die Streuung von Licht, Röntgenstrahlung, Neutronen und Elektronen in Frage. Die Größe der Streuer bestimmt dabei die geeignete Wellenlänge. Außerdem muß man darauf achten, daß die Absorption der eingestrahlten Partikel klein ist, aber die Streuung groß. Die Intensität $I(\mathbf{q})$ der gestreuten Partikel ist dann gegeben durch

$$I(\mathbf{q}) \sim I_0 |\mathbf{a}|^2 N S(\mathbf{q}), \tag{I.1.1}$$

wobei N die Zahl der Streuer ist, I_0 die Intensität der einfallenden Strahlung und $\mathbf{a}$ die Streuamplitude, die die Wechselwirkung zwischen streuenden und gestreuten Teilchen beschreibt. Der Strukturfaktor $S(\mathbf{q})$ hängt eng mit der Korrelationsfunktion zusammen, denn er ist gerade dessen Fouriertransformierte

$$S(\mathbf{q}) = \int g_P(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r. \tag{I.1.2}$$

Somit kann im Prinzip über die Messung des Strukturfaktors die Paarkorrelation bestimmt werden.

I.2 Beschreibung von Flüssigkeiten

In erster Linie ist man an den makroskopischen Eigenschaften von Flüssigkeiten interessiert. Deshalb ist eine Kontinuumsbeschreibung angebracht. Wir werden uns in erster Linie für die

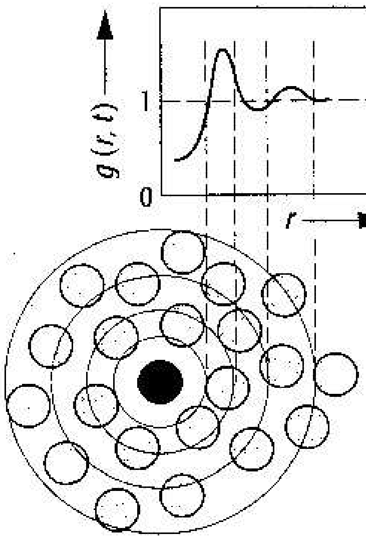

Abbildung I.1.2: Typische Form der Paarkorrelationsfunktion einer Flüssigkeit (oben). Der untere Teil zeigt die zugehörige Nahordnung im Ortsraum.

mechanischen Eigenschaften interessieren. Allerdings wird auch die Thermodynamik eine Rolle spielen.

Im Folgenden werden wir also Flüssigkeiten als ein Kontinuum betrachten, d.h. als von Masse stetig erfüllten Raum. Ein wichtiges Konzept ist das sogenannte *Flüssigkeitselement*. Dabei soll es sich um ein kleines Teilvolumen der Flüssigkeit handeln, in dem die physikalischen Größen als konstant angenommen werden können. Es sollte daher klein gegenüber der mittleren freien Weglänge der Flüssigkeitsmoleküle sein. Auf der anderen Seite enthält es aber viele Moleküle. Allerdings stellt man sich Flüssigkeitselemente doch i.a. als punktförmige Objekte vor!

Bei der Beschreibung der Dynamik von Flüssigkeiten muß man zwei verschiedene Darstellungen unterscheiden, die wir im folgenden vorstellen wollen.

I.2.1 Lagrange'sche Darstellung

Im Rahmen der *Lagrange'schen Darstellung* versucht man — in Analogie zur Mechanik von Massenpunkten — die Bahnkurven einzelner Flüssigkeitselemente anzugeben.

Bzgl. eines fixierten Koordinatensystems befinden sich die Flüssigkeitselemente j zur Zeit t_0 an den Positionen $\mathbf{r}_j(t_0)$. Die Bewegung der Flüssigkeit wird dann vollständig beschrieben durch die Zeitabhängigkeit der Ortsvektoren $\mathbf{r}_j(t)$ aller dieser Elemente. Wir greifen uns eines dieser Elemente heraus, das sich bei $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ befinde. Seine Bewegung ist dann gegeben durch

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t). \tag{I.2.1}$$

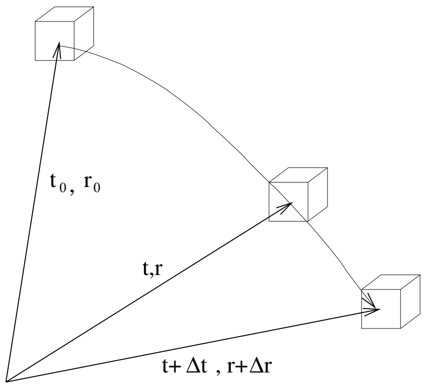

Abbildung I.2.1: Zur Lagrange'schen Darstellung.

Die Geschwindigkeit des Elementes bestimmt sich aus (siehe Abb. I.2.1)

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\bigg|_{\mathbf{r}_0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\Big|_{\mathbf{r}_0} \tag{I.2.2}$$

d.h. also

$$\mathbf{w} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t). \tag{I.2.3}$$

Dabei ist $\mathbf{r}_0$ fest und beim Bilden des Limes sind nur solche Ortsvektoren $\mathbf{r}$ zugelassen, die zur Bahnkurve des durch $\mathbf{r}_0$ charakterisierten Elementes gehören. Analog findet man für die Beschleunigung

$$\mathbf{b} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t). \tag{I.2.4}$$

In der Praxis ist diese scheinbar natürliche Darstellung oft umständlich und schwierig. I.a. ist man auch nicht am Schicksal eines einzelnen Elementes interessiert, sondern am Strömungszustand und seiner zeitlichen Änderung an jedem Raumpunkt.

I.2.2 Euler'sche Darstellung

In der *Euler'schen Darstellung* betrachtet man nicht mehr die Bahnen einzelner Flüssigkeitselemente. Stattdessen werden die physikalischen Größen als Felder behandelt, d.h. alle Größen werden an jedem Raumpunkt skalare oder vektorielle Werte zugeordnet, die sich zeitlich ändern können. Ein Beispiel ist das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t). \tag{I.2.5}$$

Diese Gleichung hat dann folgende Interpretation: Zur Zeit t fließt die Flüssigkeit am Ort $\mathbf{r}$ mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Dabei bleibt unberücksichtigt, auf welcher Bahn sich das Flüssigkeitselement bewegt, das zur Zeit t am Ort $\mathbf{r}$ ist! Die Euler'sche Darstellung entspricht also einer Abfolge von Momentaufnahmen des Zustandes der Flüssigkeit.

Wir wollen nun den Zusammenhang der beiden Darstellungen untersuchen. Dazu fassen wir $\mathbf{r}$ als den Ortsvektor eines Flüssigkeitselements zur Zeit t auf. Diese bewegt sich daher mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Andererseits ist die Geschwindigkeit der Differentialquotient der Ortsänderung längs der Bahnkurve, d.h.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = f(\mathbf{r}, t), \tag{I.2.6}$$

wobei wir im zweiten Schritt (I.2.5) benutzt haben.
Dies ist ein System gekoppelter Differentialgleichungen 1. Ordnung. Dessen Lösung enthält daher drei Integrationskonstanten, mit denen z.B. die Position $\mathbf{r}_0$ zur Zeit t_0 festgelegt werden kann. Damit erhält man dann die (Lagrange-)Darstellung

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t). \tag{I.2.7}$$

I.a. ist die Lösung des Differentialgleichungssystem allerdings sehr schwierig, daß man von der Umrechnung keinen Gebrauch macht.

I.2.3 Stromlinien und Bahnlinien

Zentral in der Lagrange'schen Darstellung sind die sogenannten *Bahnlinien*. Dies sind die Bahnkurven, auf denen sich die Flüssigkeitselemente im Laufe der Zeit bewegen.
In der Euler'schen Darstellung wird die Geschwindigkeit als ein Vektorfeld angesehen. Betrachtet man dieses Feld zu einem festen Zeitpunkt t_0, so kann man Kurven angeben, deren Richtung in jedem Punkt mit der Richtung der Geschwindigkeit übereinstimmen. Startet man an einem Punkt und folgt jeweils der Richtung dieser Vektoren, dann erhält man eine sogenannte *Stromlinie*.
Bei den Stromlinien fehlt eine Beziehung zu den einzelnen Flüssigkeitselementen. I.a. werden die Stromlinien zu verschiedenen Zeiten von verschiedenen Teilchen gebildet. Abb. I.2.2 illustriert, daß Bahn- und Stromlinien i.a. verschieden sind. Ein Flüssigkeitselement, das sich zur Zeit t im Punkt P befindet, bewegt sich längs der Stromlinie nach Q, da die Stromlinie gerade der Richtung der Geschwindigkeit in P entspricht. Dort trifft das Teilchen dann zu einem späteren Zeitpunkt $t + \Delta t$ ein. I.a. wird sich aber die Stromlinie in Q während dieser Zeit verändert haben. Das Flüssigkeitselement bewegt sich dann gemäß der veränderten Stromlinie nach S und nicht nach R, was der Richtung der Stromlinie zur Zeit t entsprochen hätte.
Ist $d\mathbf{s}$ das Linienelement längs einer Stromlinie, so läßt sich diese durch die Bedingung

$$d\mathbf{s} \times \mathbf{v} = 0 \tag{I.2.8}$$

charakterisieren. Die Bahnlinie berührt die Stromlinie an dem Ort, an dem sich das Flüssigkeitselement gerade befindet.
Ein wichtiger Spezialfall sind Geschwindigkeitsfelder, die nicht explizit von der Zeit abhängen, d.h. $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$. Man spricht man von einer *stationären Strömung*. In diesem Fall sind tatsächlich Stromlinien und Bahnlinien identisch.

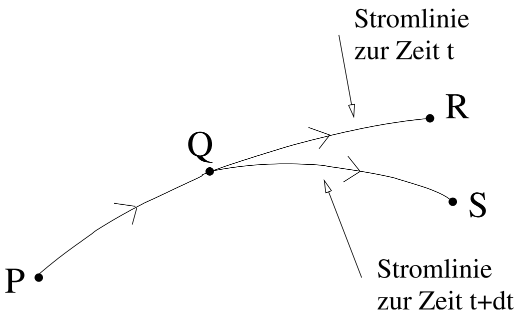

Abbildung I.2.2: Stromlinien in einer nichtstationären Strömung. Die Zeitabhängigkeit der Stromlinien führt dazu, daß Strom- und Bahnlinien verschieden voneinander sind.

Als Vorbereitung für die quantitative Beschreibung in den folgenden Abschnitten wollen wir die Bewegung längs einer Stromlinie noch etwas genauer untersuchen. Dazu sei $\mathbf{s}$ ein Tangenteneinheitsvektor an eine Stromlinie. Die Ableitung in diese Richtung bezeichnen wir mit $\frac{\partial}{\partial s}$. Für ein beliebiges Skalarfeld $a = a(\mathbf{r}, t)$ gilt dann:

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \mathbf{s} \cdot \nabla a, \qquad \text{(I.2.9)}$$

denn offensichtlich ist der Ausdruck auf der rechten Seite gerade die Projektion der Änderung von a in Richtung $\mathbf{s}$. Ist $\mathbf{s} \cdot \nabla a = 0$, so ist $a = const$ längs der Stromlinie. Dabei ist zu beachten, daß a auf verschiedenen Stromlinien verschiedene Werte haben kann.
Analog erhält man für die Komponenten A_j eines Vektorfeldes $\mathbf{A}$ oder die Komponenten T_{jl} eines Tensorfeldes: Ist $(\mathbf{s} \cdot \nabla)A_j = 0$ für $j = 1, 2, 3$, so ist $\mathbf{A} = const$ längs der Stromlinien bzw. ist $(\mathbf{s} \cdot \nabla)T_{jl} = 0$ für $j, l = 1, 2, 3$, so ist $T = (T_{jl})_{j,l} = const$ längs der Stromlinien. Von diesem Ergebnissen werden wir später noch Gebrauch machen.

I.2.4 Zeitliche Änderung von Feldgrößen

Wir wollen nun einige Ergebnisse aus den vorigen Abschnitten etwas quantitativer darstellen. Dazu betrachten wir eine beliebige Feldgröße A. Dies kann ein Skalar oder eine Vektor- bzw. Tensorkomponente sein. Verfolgen wir ein Flüssigkeitselement gemäß der Lagrange'schen Darstellung, so hat die Änderung von A zwei Anteile:

$$A + dA = A(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, t + dt) \simeq A(\mathbf{r}, t) + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} \right) dt. \qquad \text{(I.2.10)}$$

Hieraus ergibt sich die sog. *substantielle Ableitung*

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A. \qquad \text{(I.2.11)}$$

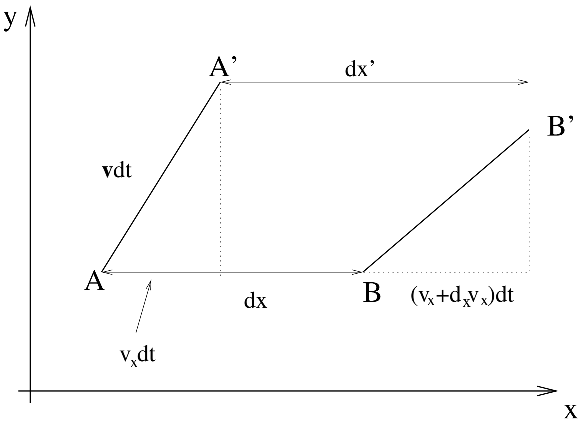

Abbildung I.2.3: Zur Bestimmung der Volumendilatation. A, B bzw. A', B' bezeichnet die Positionen zweier Ecken vor bzw. nach der Verschiebung.

Der erste Anteil $\frac{\partial A}{\partial t}$ beschreibt die explizite zeitliche Änderung. Der zweite Anteil $\mathbf{v} \cdot \nabla A$ rührt von der Verschiebung des Flüssigkeitselementes mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ her (vgl. mit der Argumentation in Kap. I.2.3).
Bei der Bewegung der Flüssigkeitselemente ändert sich auf Grund der lokal unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeit i.a. deren Volumen. Diese *Volumendilatation* wollen wir im folgenden mit den Kenngrößen der Strömung in Verbindung bringen. Dazu bezeichne $V = dxdydz$ bzw. $V' = dx'dy'dz'$ das Volumen eines Flüssigkeitselementes vor bzw. nach der Verschiebung. Wir betrachten dazu die Bewegung einer Kante AB des Volumens. Aus Abb. I.2.3 ergibt sich[1]

$$dx' = dx + (v_x + d_x v_x)dt - v_x dt = dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt, \tag{I.2.12}$$

wobei $d_x v_x$ die Änderung von v_x in x-Richtung ist, d.h.

$$d_x v_x = v_x(\mathbf{r} + dx) - v_x(\mathbf{r}). \tag{I.2.13}$$

Analoge Beziehung gelten für die anderen Kanten. Insgesamt ergibt sich für die Volumenänderung

$$V' = V\left(1 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right) dt = V(1 + dt\nabla \cdot \mathbf{v}). \tag{I.2.14}$$

Für die Volumendilatation

$$d\Theta = \frac{V' - V}{V} \tag{I.2.15}$$

folgt daher

$$d\Theta = dt\, \nabla \cdot \mathbf{v} \tag{I.2.16}$$

[1] In führender Ordnung können wir vernachlässigen, daß die verschobene Kante nicht parallel zur ursprünglichen ist.

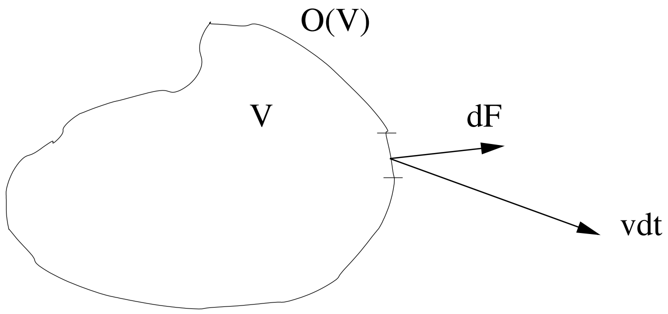

Abbildung I.3.1: Zur Ableitung der Kontinuitätsgleichung.

und für die Geschwindigkeit der Volumendilatation

$$\frac{d\Theta}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}. \tag{I.2.17}$$

Dies spiegelt das anschaulich erwartete Ergebnis, daß die Volumenverzerrung für ungleichmässige Strömungen stärker ist, quantitativ wieder.

I.3 Kontinuitätsgleichung

Wie überall in der Physik so sind auch in der Hydrodynamik Erhaltungssätze wichtig. Eine offensichtliche Erhaltungsgröße ist die Masse $M = \int \rho dV$, wobei ρ die Dichte bezeichne, die i.a. eine Funktion von Ort $\mathbf{r}$ und Zeit t sein kann. Analog zur Ladungserhaltung in der Elektrodynamik läßt sich die Massenerhaltung durch eine Kontinuitätsgleichung ausdrücken. Wir betrachten daher ein Volumen V mit Oberfläche $O(V)$. Gemäß Abb. I.3.1 ist die Masse, die in der Zeit dt durch ein Oberflächenelement $d\mathbf{F}$ fließt, durch $\rho\, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} dt$ gegeben. Diese Masse ist > 0 (< 0), falls Masse heraus (herein) strömt. Die Änderung der Gesamtmasse in V in der Zeit dt ist daher gegeben durch

$$dM_1 = dt \oint_{O(V)} \rho\, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F}. \tag{I.3.1}$$

Andererseits führt die Strömung zu einer zeitlichen Änderung der Dichte im Volumen V. Die entsprechende Massenänderung in der Zeit dt ist gegeben durch

$$dM_2 = dt \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \tag{I.3.2}$$

Da die Gesamtmasse erhalten ist, muß

$$dM_1 = -dM_2 \tag{I.3.3}$$

sein. Das Minuszeichen berücksichtigt dabei, daß bei ausströmender Masse $dM_1 > 0$ und $\frac{\partial\rho}{\partial t} < 0$ ist. Somit ergibt sich

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = -\oint_{O(V)} \rho\,\mathbf{v}\cdot d\mathbf{F} = -\int_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})dV, \tag{I.3.4}$$

wobei wir im letzten Schritt den Gaußschen Integralsatz benutzt haben, um das Flächen- in ein Volumenintegral umzuwandeln. Damit erhalten wir die *Kontinuitätsgleichung* in integraler Form:

$$\int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\right) dV = 0. \tag{I.3.5}$$

Da diese Identität für beliebige Teilvolumina V gilt, speziell für infinitesimal kleine, muß die lokale Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \qquad \text{(I.3.6)}}$$

gelten. Dies ist eine der Grundgleichungen der Hydrodynamik. Der Ausdruck

$$\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v} \tag{I.3.7}$$

wird auch als *Stromdichtevektor* der Flüssigkeit bezeichnet. Seine Richtung gibt die Bewegungsrichtung an, während der Betrag der Flüssigkeitsmenge entspricht, die pro Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit (senkrecht zu $\mathbf{v}$) fließt.

Man beachte, daß $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ die Dichteänderung an einem festgehaltenen Ort ist. Die Dichteänderung eines substantiellen Flüssigkeitsteilchens ist durch $\frac{d\rho}{dt}$ gegeben, d.h.

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho = -\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho = -\mathbf{v}\cdot\nabla\rho - \rho\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho \\ &= -\rho\nabla\cdot\mathbf{v} = -\rho\frac{d\Theta}{dt}. \end{aligned} \tag{I.3.8}$$

Dabei wurde im ersten Schritt die Definition (I.2.11) der substantiellen Ableitung verwendet, im zweiten die Kontinuitätsgleichung (I.3.6) und im letzten Schritt schließlich das Ergebnis (I.2.17) für die Volumendilatation.

Die Kontinuitätsgleichung kann auf Fälle erweitert werden, bei denen sich Quellen oder Senken im betrachteten Volumen befinden. Für eine Quelle, die pro Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge Q abgibt (wobei $Q < 0$ für eine Senke), ist Gleichung (I.3.3) zu modifizieren:

$$dM_1 = -dM_2 + Q dt, \tag{I.3.9}$$

woraus folgt

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \oint_{O(V)} \rho\,\mathbf{v}\cdot d\mathbf{F} = Q \tag{I.3.10}$$

bzw. mit der Quelldichte q definiert durch

$$Q = \int_V q dV \tag{I.3.11}$$

schließlich

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = q \tag{I.3.12}$$

in lokaler Form.

Kapitel II

Ideale Flüssigkeiten

In diesem Kapitel wollen wir uns eine wichtige Klasse von Fluiden genauer anschauen, die sog. *idealen Flüssigkeiten*. Diese sind dadurch charakterisiert, daß Reibungs- und Wärmeleitungseffekte vernachlässigbar sind. Da der Zustand der Flüssigkeit durch die fünf Größen Druck p, Dichte ρ und Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bestimmt ist, benötigen wir auch fünf Gleichungen zur deren Festlegung. Eine, die Kontinuitätsgleichung, haben wir bereits abgeleitet. Die anderen vier werden wir im folgenden für den Fall der idealen Flüssigkeiten angeben.

II.1 Euler'sche Gleichung

Wie in der Newton'schen Mechanik kann man sich vorstellen, daß Kräfte für die Bewegung von Flüssigkeiten verantwortlich sind. Diesen Ansatz, der dann zur Euler'schen Gleichung führt, wollen wir im folgenden konkretisieren.
Zunächst sei darauf hingewiesen, daß bei der Diskussion von Kräften verschiedene Konventionen benutzt werden können. Ist $\Delta\mathbf{K}$ die Kraft, die auf ein Volumen ΔV innerhalb der Flüssigkeit wirkt, so hat man die Darstellungen

$$\Delta\mathbf{K} = \int_{\Delta V} \mathbf{f}^* dV \tag{II.1.1}$$

$$= \int_{\Delta V} \rho\, \mathbf{f} dV = \int_{\Delta m} \rho\, \mathbf{f} dm. \tag{II.1.2}$$

Hierbei bezeichnet man $\mathbf{f}^*$ als *Kraftdichte, Körperkraft* oder auch *Volumenkraft*. Wir werden im folgenden aber i.a. die sog. *Massenkraft* $\mathbf{f} = \frac{1}{\rho}\mathbf{f}^*$ verwenden. Oft wird es sich dabei um die Gravitationskraft handeln, so daß $\mathbf{f}^* = \rho\,\mathbf{g}$ bzw. $\mathbf{f} = \mathbf{g}$.
Zur Ableitung der Euler-Gleichung betrachten wir die Kräfte, die auf das Volumen ΔV wirken. Dies stammen zum Einen von den äußeren Kräften, siehe (II.1.2). Zum Anderen übt die Umgebung Druckkräfte $\Delta\mathbf{K}_p$ auf das Volumen aus. Diese wirken immer senkrecht zur Oberfläche (siehe Abb. II.1.1) nach innen und somit

$$\Delta\mathbf{K}_p = -\oint_{O(\Delta V)} p d\mathbf{F}. \tag{II.1.3}$$

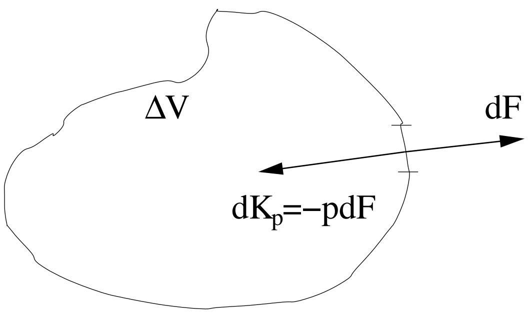

Abbildung II.1.1: Druckkraft auf ein Volumen ΔV.

Als Folge der Krafteinwirkung wird die Masse $\Delta M = \int_{\Delta V} \rho dV$ beschleunigt. Ist ΔV so klein, daß in diesem VOlumen die Beschleunigung als konstant angesehen werden kann, so folgt aus der Newton'schen Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV &= \Delta M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \Delta \mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}_p = \int_{\Delta V} \mathbf{f}^* dV - \oint_{O(\Delta V)} p \, d\mathbf{F} \\ &= \int_V (\rho \, \mathbf{f} - \nabla p) \, dV, \end{aligned} \tag{II.1.4}$$

die beim Übergang zur zweiten Zeile ausgenutzt wurde. Im letzten Schritt wurde wieder der Gaußsche Integralsatz verwendet. Analog zum Vorgehen bei der Kontinuitätsgleichung kann man wieder die lokale Beziehung

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho \, \mathbf{f} - \nabla p \qquad \text{(II.1.5)}}$$

folgern, wobei wir die Definition (I.2.11) der substantiellen Ableitung von $\mathbf{v}$ verwendet haben. Dies ist die *Euler'sche Gleichung*, die Grundgleichung der Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten. Man beachte, daß die Euler-Gleichung intrinsisch nichtlinear ist, da der Term $\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ auftritt. Dies hat zahlreiche Konsequenzen, z.B. für das Superpositionsprinzip.
Zur vollständigen Charakterisierung müssen wir noch Randbedingungen angeben. In der Hydrodynamik bestehen diese oft aus undurchdringlichen Wänden. Sind diese Wände unbeweglich, so lauten die entsprechenden Randbedingungen

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \big|_{\text{Wand}} = 0, \tag{II.1.6}$$

wobei $\mathbf{n}$ der Normalenvektor der Wand ist. Diese Bedingung besagt, daß die Flüssigkeit direkt an der Wand nur tangential strömen kann. Hat man es mit einem Problem mit beweglichen Wänden zu tun, so muß man erst auf ein Koordinatensystem transformieren, in dem die Wand ruht[1]. Dort kann man dann (II.1.6) verwenden.

II.1.1 Kontinuitätsgleichung der Entropie

Bisher haben wir nur die Reibungsfreiheit idealer Flüssigkeiten ausgenutzt. In idealen Flüssigkeiten ist aber auch ein Wärmeaustausch zwischen den Flüssigkeitselementen möglich. Deshalb gibt es auch keinen Wärmeaustausch mit der Umgebung. Die Bewegung verläuft somit überall adiabatisch, d.h. die Entropie eines jeden Teils der Flüssigkeit bleibt konstant, wenn sich diese im Raum bewegt. Man beachte, daß dies nicht bedeuten muß, daß die Entropie überall konstant ist.
Wir betrachten die *spezifische Entropiedichte* s, d.h. die Entropie pro Masseneinheit. Für eine adiabatische Bewegung gilt dann

$$\frac{ds}{dt} = 0. \tag{II.1.7}$$

Das Verschwinden der substantiellen Ableitung drückt die Tatsache aus, das jedes Flüssigkeitselement seine Entropie mitnimmt. Mit (I.2.11) und der Kontinuitätsgleichung (I.3.6) erhalten wir die *Kontinuitätsgleichung für die Entropie*:

$$\boxed{\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0. \qquad \text{(II.1.8)}}$$

ρs ist die Entropiedichte und $\rho s\mathbf{v}$ der Vektor der Entropiestromdichte.
Kennt man die Zustandsgleichung der Flüssigkeit, die eine Beziehung zwischen den thermodynamischen Größen herstellt, dann stellt (II.1.8) die gesuchte fünfte Gleichung zur Beschreibung des Zustandes dar. Wir wollen im folgenden einen wichtigen Spezialfall näher betrachten.

II.1.2 Isentrope (homentrope) Bewegung

Ist die Entropie zu einer Zeit in allen Bereichen gleich, so bleibt sie dies, da $\frac{ds}{dt} = 0$ wegen (II.1.7). Man spricht dann von einer *isentropen* oder *homentropen Bewegung*. Die Kontinuitätsgleichung der Entropie wird dann zur Adiabatengleichung $s = const$. Dies erlaubt auch eine andere Darstellung der Euler-Gleichung, die wir im folgenden ableiten wollen. Dazu müssen wir zunächst ein wenig Thermodynamik betreiben.
Wie in Sec. I.2 erwähnt, sollen in einem Flüssigkeitselement alle physikalischen Größen als konstant angenommen werden können. Dies trifft auch auf die thermodynamischen Größen und Potentiale zu. Auf der anderen Seite haben wir die Elemente immer als punktförmig betrachtet. Daraus ergibt sich, daß die thermodynamischen Größen zwar in einem Flüssigkeitselement konstant sind, trotzdem aber als Felder (mit Orts- und Zeitabhängigkeit) zu betrachten sind. Lokal kann man aber die Gleichgewichtsthermodynamik anwenden. Die räumliche Änderung ergibt

[1]Hier macht sich die Nichtlinearität bemerkbar!

sich dann aus den bekannten thermodynamischen Beziehungen. Ist z.B. w die Enthalpie pro Masseneinheit, so gilt (mit dem spezifischen Volumen $V = \frac{1}{\rho}$)

$$dw = Tds + Vdp, \tag{II.1.9}$$

da die natürlichen Variablen der Enthalpie die Entropie und der Druck sind. Dies ist damit das angemessene Potential, um aus der Kontinuitätsgleichung der Entropie eine Gleichung für den Druck zu erhalten, der ja eine der fünf fundamentalen Größen zur Beschreibung des Zustandes ist.

Faßt man die in Gleichung (II.1.9) auftretenden Größen als Felder auf, so folgt für deren Gradienten

$$\nabla w = T\nabla s + \frac{1}{\rho}\nabla p \tag{II.1.10}$$

und speziell im isentropen Fall

$$\nabla w = \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{II.1.11}$$

Damit können wir die Euler-Gleichung (II.1.5) schreiben als

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla w. \tag{II.1.12}$$

Nach den bekannten Rechenregeln der Vektoranalysis ist

$$\frac{1}{2}\nabla v^2 = \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \tag{II.1.13}$$

und somit

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = \mathbf{f} - \nabla\left(w + \frac{v^2}{2}\right). \tag{II.1.14}$$

Bildet man die Rotation dieser Gleichung, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{v}) = \nabla\times(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})) + \nabla\times\mathbf{f}. \tag{II.1.15}$$

Dies ist die Euler-Gleichung für eine isentrope Bewegung:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\ \mathbf{v} = \mathrm{rot}\ (\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\ \mathbf{v}) + \mathrm{rot}\ \mathbf{f}. \qquad \text{(II.1.16)}}$$

Sie enthält nur noch die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ und die Kraft $\mathbf{f}$. Letztere verschwindet aber, wenn die Kraft konservativ ist, d.h. ein Potential u mit $\mathbf{f} = -\nabla u$ existiert. Dann wird die Euler-Gleichung zu einer reinen Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\ \mathbf{v} = \mathrm{rot}\ (\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\ \mathbf{v}). \tag{II.1.17}$$

Diese Gleichung ist natürlich immer noch nichtlinear, so daß man keine allgemeine Lösung angeben kann.

II.2 Hydrostatik

Im folgenden wollen den statischen Fall, d.h. eine ruhende Flüssigkeit, genauer untersuchen. Hierbei gibt es im übrigen keinen Unterschied zwischen idealen und zähen (nichtidealen) Flüssigkeiten, da sich z.B. Reibung nur in der Relativbewegung von Flüssigkeitselementen bemerkbar machen würde.
Der statische Fall ist durch das Verschwinden der substantiellen Ableitung $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ gekennzeichnet. Dies ist vom stationären Fall zu unterscheiden, bei dem $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ ist. Die *statische Euler-Gleichung* lautet daher

$$\boxed{\nabla\rho = \mathbf{f}^* = \rho\,\mathbf{f}, \qquad \text{(II.2.1)}}$$

die der Bedingung für das Vorliegen des mechanischen Gleichgewichts entspricht. Im thermischen Gleichgewicht ist zusätzlich $T = const.$, d.h. $\nabla T = 0$. Somit ergibt sich für die freie Enthalpie ϕ (pro Masseneinheit)

$$d\phi = -s dT + V dp \tag{II.2.2}$$

wegen $dT = 0$ mit der Euler-Gleichung (II.2.1)

$$\nabla\phi = V\nabla p = V\rho\,\mathbf{f} = \mathbf{f}. \tag{II.2.3}$$

Diese Gleichung erlaubt folgende Interpretation: Eine Flüssigkeit ist gleichzeitig im mechanischen und thermischen Gleichgewicht, wenn die äußere Kraft $\mathbf{f}$ als Gradient darstellbar ist, d.h. es existiert ein Potential u mit $\mathbf{f} = -\nabla u$. Offensichtlich ist $u = -\phi + const.$
Fordert man nur das Vorliegen eines mechanischen Gleichgewichts ohne thermisches Gleichgewicht, so ist diese Situation nur dann stabil, wenn keine *Konvektion* auftritt. Unter Konvektion versteht man ungeordnete Strömungen, die die Flüssigkeit so vermischen, daß die Temperatur überall gleich wird. Dies wird genauer (z.T. auch quantitativ) diskutiert in Kap. 4 von [1].

II.2.1 Flüssigkeit im Schwerefeld der Erde

Eine wichtige Anwendung der Hydrostatik betrifft das Verhalten von Flüssigkeiten im Gravitationsfeld der Erde. Dies wird in Aufg. 3 der Übungen genauer diskutiert.

II.2.2 Gleichförmig rotierende Flüssigkeit

Als weiteres Beispiel wollen ein Problem diskutieren, bei dem es sich streng genommen um einen stationären Fall handelt. Wir betrachten einen Wassereimer, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seine Symmetrieachse rotiert wird (siehe Abb. II.2.1). Wir erwarten dann eine Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche. Diese wollen wir im folgenden berechnen. Da auch hier im stationären Zustand keine Relativbewegung der Flüssigkeitselemente stattfindet, gelten die folgenden Überlegungen ebenso für nichtideale Flüssigkeiten.
Im stationären Zustand ist das Geschwindigkeitsfeld durch

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \tag{II.2.4}$$

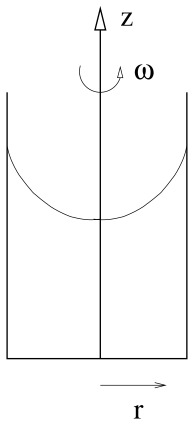

Abbildung II.2.1: Rotierender Wassereimer.

gegeben. Somit ist

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{v} = \omega\,(\nabla\cdot\mathbf{r}) - (\omega\cdot\nabla)\,\mathbf{r} = 2\omega. \tag{II.2.5}$$

Weiterhin gilt

$$2(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = 2(\mathbf{v}\cdot\nabla)(\omega\times\mathbf{r}) = 2\omega\times(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{r} = 2\omega\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\ \mathbf{v}, \tag{II.2.6}$$

wobei wir im letzten Schritt (II.2.5) verwendet haben. Mit der Identität $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\ \mathbf{v}$ (siehe (II.1.13)) ergibt sich somit

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{2}\nabla v^2. \tag{II.2.7}$$

Ist $\mathbf{v}$ zeitlich konstant, so hieraus mit der Euler-Gleichung

$$\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \rho\,\mathbf{f} - \nabla p \tag{II.2.8}$$

schließlich

$$\rho\,\mathbf{f} - \nabla p + \frac{1}{2}\nabla v^2 = 0. \tag{II.2.9}$$

Für eine konservative Kraft ist dann

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2} - u\right) - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0. \tag{II.2.10}$$

Bei einer isentropen Bewegung ($ds = 0$) ist $\nabla w = \frac{1}{\rho}\nabla p$. Somit läßt sich (II.2.10) schreiben als

$$\frac{v^2}{2} - u - w = const. \tag{II.2.11}$$

Da auch $w = \int \frac{dp}{\rho}$ folgt im Falle $\rho = const.$ einer inkompressiblen Flüssigkeit

$$\rho\,\frac{v^2}{2} - \rho u - p = const. \tag{II.2.12}$$

Speziell für den Fall der Schwerkraft ist $u = gz$ und somit

$$p = C - \rho g z + \rho\,\frac{v^2}{2}, \tag{II.2.13}$$

wobei die Konstante C durch den Druck bei $z = 0$ auf der Rotationsachse gegeben ist. Dieses Ergebnis zeigt schon, daß die Druckverhältnisse sich innerhalb der Flüssigkeit ändern, denn $p = p(r, z)$ (in Zylinderkoordinaten).
Um die Form der Oberfläche zu bestimmen nutzen wir aus, das dort der Druck gleich dem Atmoshpärendruck p_A ist. Die Flüssigkeitsoberfläche ist dann durch die Bedingung

$$p_A = C - \rho g z + \frac{\rho}{2}(\omega \times \mathbf{r})^2 \tag{II.2.14}$$

charakterisiert. Dies ist die Gleichung eines Rotationsparaboloids, die in Zylinderkoordinaten ($r^2 = x^2 + y^2$) in der Form

$$z = \frac{C - p_A}{g\rho} + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \tag{II.2.15}$$

geschrieben werden kann.
Eine verwandte Untersuchung erlaubt die Bestimmung der sog. Rotationsabplattung von rotierenden Körpern, z.B. der Erde. Die entsprechenden Rechnungen sind sehr aufwändig und z.B. in [2] zu finden.

II.3 Bernoulli'sche Gleichung

Im folgenden wollen wir *stationäre Strömungen* betrachten. Für diese ist die Strömungsgeschwindigkeit in jedem Punkt zeitlich konstant ist, d.h. $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ bzw. $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Die Frage, die wir im folgenden untersuchen wollen ist, ob es für solche Systeme eine Art Energiesatz gibt. Wir betrachten daher konservative äußere Kräfte $\mathbf{f} = -\nabla u$. Die (stationäre) Euler-Gleichung kann dann mit (II.1.13) in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{2}\rho\,\nabla v^2 - \rho\,\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = -\nabla p - \rho \nabla u. \tag{II.3.1}$$

Für eine isentrope Bewegung hatten wir schon die Beziehung $\nabla p = \rho\,\nabla w$ abgeleitet. Damit ergibt sich dann für

$$\epsilon = \frac{1}{2} v^2 + u + w \tag{II.3.2}$$

aus der Euler-Gleichung

$$\nabla \epsilon = \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v}. \tag{II.3.3}$$

Da $\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$ ist schließlich

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \epsilon = 0. \tag{II.3.4}$$

Nach den Überlegungen aus Kapitel I.2.3 folgt aus dieser Identität, daß ϵ entlang einer Stromlinie konstant sein muß (siehe (I.2.9)):

$$\boxed{\epsilon = \frac{1}{2}v^2 + u + w = const. \qquad \text{(II.3.5)}}$$

Dies ist die *Bernoulli'sche Gleichung* für stationäre, isentrope Strömungen. Die Konstante kann wieder unterschiedliche Werte für verschiedene Stromlinien annehmen.
Die Bernoulli-Gleichung entspricht dem Energieerhaltungssatz für ein Flüssigkeitselement. $\rho\epsilon$ hat die Dimension einer Energiedichte bzw. eines Druckes. ρw ist der Druck (da $w = \int \frac{dp}{\rho(p)}$) und ρu die Potentialdichte der äußeren Kräfte. Schließlich bezeichnet man

$$p' = \frac{1}{2}v^2 \tag{II.3.6}$$

als kinetische Energiedichte oder *Staudruck*. Dieser spielt eine wichtige Rolle z.B. beim *Prandtl'schen Staurohr*, das u.a. zur Geschwindigkeitsmessung bei Flugzeugen eingesetzt wird.
Ein *inkompressible Flüssigkeit* ist dadurch charakterisiert, daß für sie $\mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0$ ist. Für stationäre Strömungen, bei denen also ρ und $\mathbf{v}$ zeitunabhängig sind, vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung zu $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$. Hieraus folgt für inkompressible Flüssigkeiten, daß in diesem Fall $\nabla \rho = 0$ ist und somit $\rho = const.$ sein muß. Deshalb ist die Enthalpie $w = \int \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{p}{\rho}$ und wir erhalten die Bernoulli'sche Gleichung für stationäre inkompressible Flüssigkeiten

$$\boxed{\rho\, \epsilon = \frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho u + p = const. \qquad \text{(II.3.7)}}$$

Aus der Euler-Gleichung (II.3.3) folgt, daß $\nabla \epsilon = 0$ ist, falls $\mathrm{rot}\, \mathbf{v} = 0$ ist. Dies ist gerade der Fall für ein sog. *Potentialströmung*, welche durch die Bedingung $\mathrm{rot}\, \mathbf{v} = 0$ definiert sind. Aus der Mechanik wissen wir, daß das Verschwinden der Rotation als Wirbelfreiheit zu deuten ist und die Existenz eines Potentials impliziert[2]. Man beachte, daß für Potentialströmungen wegen $\nabla \epsilon = 0$ die Energiedichte (II.3.7) im gesamten Flüssigkeitsvolumen konstant ist und nicht mehr von der betrachteten Stromlinie abhängt.

II.3.1 Energiestrom

Als nächstes wollen wir den Energiestrom untersuchen, d.h. die Frage, wie sich die Energie einer idealen Flüssigkeit in einem festen Volumen ΔV im Laufe der Zeit ändert. Dazu definieren wir die Energiedichte

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho \bar{\epsilon}. \tag{II.3.8}$$

[2]Natürlich nur unter geeigneten Voraussetzungen an die Definitionsmenge des Feldes.

Der erste Anteil ist natürlich die Dichte der kinetischen Energie. $\bar{\epsilon}$ bezeichne die innere Energie (im Sinne des thermodynamischen Potentials). Jede Änderung der Energiedichte ε in ΔV hat einen Energiestrom durch die Oberfläche zur Folge.
Wir betrachten zunächst die zeitliche Änderung der kinetischen Energiedichte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{2}v^2\right) &= \frac{v^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\\ &= -\frac{v^2}{2}\nabla\cdot(\rho\,\mathbf{v}) + \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{f} - \mathbf{v}\cdot\nabla p - \rho\,\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\\ &= -\nabla\cdot\left(\rho\,\mathbf{v}\frac{v^2}{2}\right) - \rho\,\mathbf{v}\,(\nabla w - T\nabla s) + \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}. \end{aligned} \tag{II.3.9}$$

Hierbei haben wir beim Übergang zur zweiten Zeile die Kontinuitäts- und Euler-Gleichung verwendet. Im zweiten Schritt wurde schließlich $\nabla w = T\nabla s - \frac{1}{\rho}\nabla p$ und $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\nabla(v^2/2)$ ausgenutzt.
Für die zeitliche Änderung der inneren Energie gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\bar{\epsilon}) &= \bar{\epsilon}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} = \left(\bar{\epsilon} + \frac{p}{\rho}\right)\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,T\frac{\partial s}{\partial t}\\ &= -w\nabla\cdot(\rho\,\mathbf{v}) - \rho T\mathbf{v}\cdot\nabla s. \end{aligned} \tag{II.3.10}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß Temperatur und Volumen (bzw. Dichte) die natürlichen Variablen der inneren Energie sind und somit[3] $d\bar{\epsilon} = T ds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$. Außerdem folgt aus der Kontinuitätsgleichung (II.1.8) für die Entropie, daß $\frac{\partial s}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla s$ ist. Im letzten Schritt haben wir dann $w = \bar{\epsilon} + \frac{p}{\rho}$ verwendet.
Insgesamt erhalten wir also

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right) + \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{f} \tag{II.3.11}$$

für die Änderung der Energiedichte. Integration über ein Volumen ΔV ergibt dann unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Delta V}\varepsilon dV = -\oint_{O(\Delta V)}\rho\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\mathbf{v}\cdot d\mathbf{F} + \int_{\Delta V}\rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}dV. \tag{II.3.12}$$

Dies legt die Interpretation von

$$\mathbf{S} = \rho\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\mathbf{v} \tag{II.3.13}$$

als *Energiestromdichte* nahe. Man beachte, daß in $\mathbf{S}$ die Enthalpie w auftritt, und nicht die innere Energie $\bar{\epsilon}$. Da $w = \bar{\epsilon} + \frac{p}{\rho}$ kann man das Oberflächenintegral auch in der Form

$$-\oint_{O(\Delta V)}\rho\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\mathbf{v}\cdot d\mathbf{F} = -\oint_{O(\Delta V)}\rho\left(\frac{v^2}{2} + \bar{\epsilon}\right)\mathbf{v}\cdot d\mathbf{F} - \oint_{O(\Delta V)}p\mathbf{v}\cdot d\mathbf{F} \tag{II.3.14}$$

[3] Man beachte, daß $dV = d\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2}d\rho$ ist.

schreiben. Der erste Anteil ist die kinetische plus innere Energie, die von der Masse der Flüssigkeit durch die Oberfläche transportiert werden. Zusätzlich muß aber noch Arbeit gegen die Druckkräfte an der Oberfläche geleistet werden. Diese stecken im zweiten Anteil.

II.3.2 Impulsstrom

Wir wollen im folgenden in ähnlicher Weise die zeitliche Änderung des Impulses und damit den Impulsstrom untersuchen. Der Impuls pro Volumeneinheit ist gerade der (Teilchen-)Strom $\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}$. Betrachten wir eine Komponente ($j = x, y, z$), so ist dessen Änderung durch

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_j) = \rho\,\frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_j \tag{II.3.15}$$

gegeben. Im folgenden wird es zweckmäßig sein, die Einstein'sche Summationskonvention zu verwenden. Diese besagt, daß über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist, z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\, v_k) \equiv \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\, v_k) = \nabla \cdot (\rho\, \mathbf{v}) \tag{II.3.16}$$

und

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{II.3.17}$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet daher

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\, v_k) \tag{II.3.18}$$

und die Euler-Gleichung

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = -\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + f_j. \tag{II.3.19}$$

Damit erhalten wir für die zeitliche Änderung der Impulsdichte

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_j) = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\, v_j v_k) - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho\, f_j = -\frac{\partial \Pi_{jk}}{\partial x_k} + \rho\, f_j \tag{II.3.20}$$

wobei wir unter Ausnutzung von $\frac{\partial p}{\partial x_j} = \delta_{jk}\frac{\partial p}{\partial x_k}$ den *Tensor der Impulsstromdichte*

$$\Pi_{jk} = p\delta_{jk} + \rho\, v_j v_k \tag{II.3.21}$$

eingeführt haben.
Nach Integration über das Volumen ΔV folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Delta V} \rho\, v_j dV = -\oint_{O(\Delta V)} \Pi_{jk} dF_k + \int_{\Delta V} \rho\, f_j dV. \tag{II.3.22}$$

Die Impulsänderung der j-ten Komponente ist daher gegeben durch den Fluß durch die Oberfläche von ΔV und die Impulsänderung, die durch die äußere Kraft verursacht wird. Wir können $\Pi_{jk}dF_k$ als die j-te Komponente der Impulsänderung auf Grund der Flüssigkeitsbewegung interpretieren. Ist $\mathbf{n}$ die äußere Oberflächennormale, d.h. $dF_k = n_k dF$, so ist

$$\Pi_{jk}n_k = pn_j + \rho\, v_j v_k n_k \tag{II.3.23}$$

bzw.

$$\Pi \cdot \mathbf{n} = p\mathbf{n} + \rho\, \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}). \tag{II.3.24}$$

II.4 Anwendungen

In den folgenden Abschnitten wollen wir anhand von zwei einfachen Anwendungen zeigen, daß man die bisher abgeleiteten Ergebnisse auch in Bereichen erfolgreich anwenden kann, die auf den ersten Blick wenig mit Hydrodynamik zu tun haben.

II.4.1 Modell des Kosmos

Wir wissen heute, daß das Universum nicht statisch ist. So haben Sterne eine endliche Lebensdauer. E. Hubble hat 1929 eine Rotverschiebung der Spektrallinie entfernter Galaxien beobachtet. Diese deutet darauf hin, daß sich entfernte Galaxien von der Erde mit einer Geschwindigkeit weg bewegen, die proportional zu ihrer Entfernung ist Abb. II.4.1). Mathematisch drückt sich dies dann im *Hubble'schen Gesetz*

$$\mathbf{v} = H\mathbf{r}. \tag{II.4.1}$$

aus. Dabei ist die sog. *Hubble-Konstante* $H = H(t)$ zeitabhängig.
Man beachte aber, daß aus dem Hubble'schen Gesetz nicht folgt, daß die der Mittelpunkt des Universums ist. Stattdessen scheint jeder beliebige Stern den (scheinbaren) Mittelpunkt der Expansion zu bilden. Dies kann man folgendermaßen einsehen. Sei $\mathbf{R}(t)$ die Koordinate einer beliebigen Galaxie, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{V}(t) = H(t)\mathbf{R}(t)$ von der Erde entfernt. Betrachtet man eine weitere beliebige Galaxie am Ort $\mathbf{r}(t)$, die sich ebenfalls gemäß (II.4.1) von der Erde entfernt (Abb. II.4.2). Definieren wir die Relativkoordinaten $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t)$ und die Relativgeschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{V}(t)$, so folgt:

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = H(t)\mathbf{r}(t) - H(t)\mathbf{R}(t) = H(t)\tilde{\mathbf{r}}(t), \tag{II.4.2}$$

d.h. auch in Bezug auf andere Galaxien gilt das Hubble'sche Gesetz.
Wie schon erwähnt gibt es starke Hinweise darauf, daß die Hubble-Konstante H zeitlich veränderlich ist. Dies ist ein Problem, da wir nur den heutigen Wert $H_0 = H(t_0)$ kennen. Die Hubble-Konstante hat die Dimension einer inversen Zeit. Ihre "natürliche" Einheit ist Kilometer pro Sekunde und Megaparsec. 1 Parsec entspricht dabei 3.26 Lichtjahren[4]. Bei Angabe von H wird

[4]Parsec steht für "Parallaxensekunde und ist definiert als die Entfernung, aus der der mittlere Radius der Erdumlaufbahn unter einem Winkel von einer Bogensekunde erscheint.

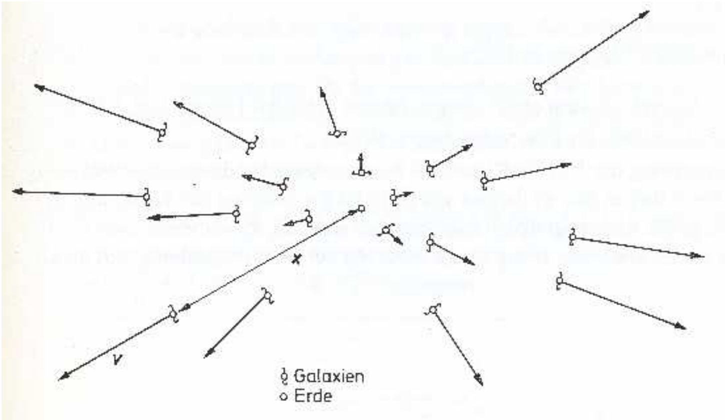

Abbildung II.4.1: Gemäß dem Hubble'schen Gesetz entfernen sich Galaxien mit einer Geschwindigkeit von der Erde, die proportional zu ihrer Entfernung ist.

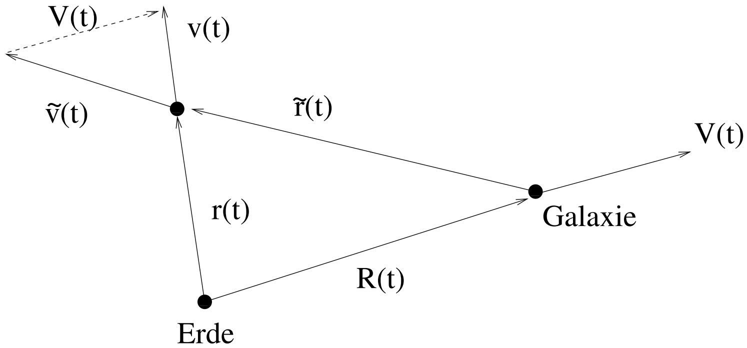

Abbildung II.4.2: Das Hubble'schen Gesetz gilt in Bezug auf jede beliebige Galaxie.

aber diese Einheit meist weggelassen. Der aktuelle Wert beträgt

$$H_0 = 72 \pm 8. \tag{II.4.3}$$

Dies entspricht einer Zeit $T_0 = 1/H_0$ von $T_0 = (13 \pm 1)10^9$ Jahren T_0 wird oft auch *Weltalter* genannt. Diese Deutung werden wir später noch etwas genauer diskutieren.
Ein großes Problem bei der Bestimmung der Hubble-Konstanten ist die Entfernungsmessung. Dies ist nur auf indirektem Wege über ihre Leuchtkraft möglich, da die Helligkeit quadratisch mit der Entfernung abnimmt. Dies ist z.B. für eine bestimmte Klasse von Sternen, die sog. Cepheiden, möglich. Deren äußere Atmosphäre führt Schwingungen aus, die zu einem oszillatorischen Verhalten der Helligkeit führen. Diese ist proportional zur Länge der Oszillationsperiode. Damit ist dann eine Bestimmung der Entfernung möglich. Außerdem gibt es einen Zusammenhang zwischen der Rotationsgeschwindigkeit von Galaxien und ihrer Helligkeit (Tully-Fisher-Relation).

Schnell rotierende Galaxien strahlen heller. Auch dies kann man zur Entfernungsbestimmung ausnutzen. Eine detailliertere Diskussion findet man in [3].
Wir wollen nun ein einfaches Modell des Kosmos entwickeln. Dazu betrachten wir ihn als eine (ideale) Flüssigkeit mit einem Geschwindigkeitsfeld, das durch das Hubble'sche Gesetz (II.4.1) gegeben ist. Die Annahmen, die wir bei der Modellentwicklung machen wollen, sind:

1. Der Raum ist euklidisch, d.h. wir vernachlässigen Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie.

2. Die Materieverteilung ist (im Mittel) homogen und isotrop.

3. Es gilt das Hubble'sche Gesetz (II.4.1).

4. Die Newton'sche Mechanik ist gültig.

5. Speziell gilt das Newton'sche Gravitationsgesetz

$$\mathbf{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2}\hat{\mathbf{r}}_{12}. \tag{II.4.4}$$

Da wir es bei der Bewegung der Galaxien mit einer Radialbewegung zu tun haben, ist $\mathbf{r}(t) = r(t)\hat{\mathbf{r}}(t)$ und somit

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}(t)\hat{\mathbf{r}}(t) = \frac{\dot{r}}{r}\mathbf{r} = \frac{d\ln r}{dt}\mathbf{r}. \tag{II.4.5}$$

Damit ist die Hubble-Konstante gerade die logarithmische Ableitung der Entfernung:

$$H(t) = \frac{d}{dt}\ln r(t). \tag{II.4.6}$$

Wir betrachten nun die Kontinuitätsgleichung. Aus dieser folgt

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + 3\rho H. \tag{II.4.7}$$

Hierbei haben wir die substantielle Ableitung (I.2.11) der Dichte eingeführt. Nach Division durch ρ folgt zunächst mit (II.4.6)

$$\frac{d}{dt}(\ln\rho + 3\ln r) = 0 \tag{II.4.8}$$

und somit

$$\rho(t) = \frac{const}{r^3(t)}. \tag{II.4.9}$$

Dies haben wir natürlich auf Grund der Massenerhaltung und der Annahme 2 erwartet, denn die Gesamtmasse ist gerade $M = \frac{4\pi}{3}\rho(t)r^3(t)$.
Als nächstes betrachten wir die Euler-Gleichung

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{II.4.10}$$

Im folgenden wollen wir von einer freien Expansion ausgehen und deshalb $\nabla p = 0$ annehmen. Außerdem gilt

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = H(t)(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{r} = H(t)\mathbf{v} = H^2\mathbf{r} \tag{II.4.11}$$

und, da bei der partiellen Ableitung $\mathbf{r}$ konstant zu halten ist,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \dot{H}\mathbf{r}. \tag{II.4.12}$$

Somit lautet die Euler-Gleichung für unser Kosmosmodell

$$(\dot{H} + H^2)\mathbf{r} = \mathbf{f}. \tag{II.4.13}$$

Bilden wir die Divergenz dieser Gleichung, so folgt

$$3(\dot{H} + H^2) = \mathrm{div}\,\mathbf{f} = -4\pi G\rho = \frac{3GM}{r^3}. \tag{II.4.14}$$

Dabei haben wir zunächst verwendet, daß die Kraft $\mathbf{f} = -\nabla u$ durch das Potential

$$u(\mathbf{r}) = -G\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV' \tag{II.4.15}$$

gegeben ist. Hieraus ergibt sich in Analogie zur Elektrodynamik (Poisson-Gleichung), daß

$$\mathrm{div}\,\mathbf{f} = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) \tag{II.4.16}$$

ist. Im letzten Schritt haben wir schließlich die Massenerhaltung (II.4.9) verwendet.
Da $H = \frac{\dot{r}}{r}$, ist $\dot{H} = \frac{\ddot{r}r-\dot{r}^2}{r^2}$ und somit $\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{r}}{r}$. Damit können wir schließlich die Euler-Gleichung für unser Universum in die Form

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \tag{II.4.17}$$

mit $M = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$ bringen. Dies entspricht gerade dem Keplerproblem. Wir können dader den Energiesatz ausnutzen und diese Glechung einmal integrieren:

$$\boxed{\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{GM}{r} - k \qquad \text{(II.4.18)}}$$

mit einer Konstanten k, die einer negativen Energiedichte entspricht. Diese Gleichung behält auch in der relativistischen Kosmologie ihre Gültigkeit und ist als *Friedmann-Gleichung* bekannt. Allerdings hat dann die Konstante k eine andere Bedeutung. Sie wird nämlich zu einem Maß für die Raumkrümmung.
Die Lösung der Friedmann-Gleichung

$$\frac{1}{2}\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{GM}{r} - k} \tag{II.4.19}$$

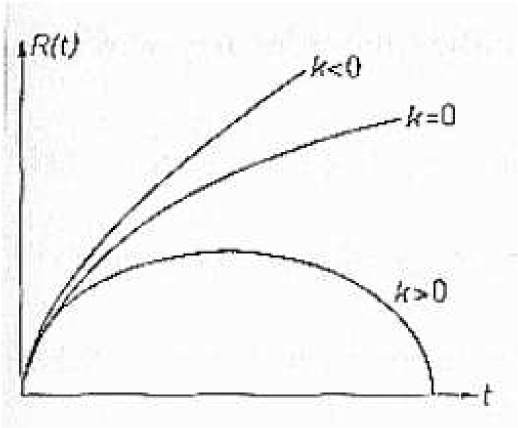

Abbildung II.4.3: Verhalten der Lösungen der Friedmann-Gleichung.

gelingt durch Separation der Variablen

$$t = \int dt = \pm \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{2\left(\frac{GM}{r} - k\right)}}. \tag{II.4.20}$$

Vom Keplerproblem wissen wir, daß wir die drei Fälle $k > 0$, $k = 0$ und $k < 0$ zu unterscheiden haben. Explizit ergibt sich (siehe Aufg. 4) für $k > 0$

$$\frac{t}{2GM} = \frac{1}{(2k)^{3/2}} \left[\arccos\left(1 - \frac{2kr}{GM}\right) - \sqrt{\frac{kr}{GM} - \frac{(kr)^2}{G^2M^2}} \right], \tag{II.4.21}$$

für $k = 0$

$$\frac{t}{2GM} = \frac{2}{3}\left(\frac{r}{2GM}\right)^{3/2} \tag{II.4.22}$$

und für $k < 0$

$$\frac{t}{2GM} = \frac{1}{(2|k|)^{3/2}} \left[\sqrt{\frac{|k|r}{GM} + \frac{(|k|r)^2}{G^2M^2}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arcosh}\left(\frac{2|k|r}{GM} + 1\right) \right]. \tag{II.4.23}$$

Zur Zeit $t = 0$ ist in allen Fällen $r(t = 0) = 0$. Dies entspricht dem *Urknall*. Das Anfangsverhalten ist für alle drei Fälle ähnlich, denn für kleine Zeiten gilt (siehe Aufg. 4)

$$r(t) \propto t^{2/3}. \tag{II.4.24}$$

Das Verhalten der Lösungen ist in Abb. II.4.3 dargestellt. Wie beim Keplerproblem gibt es gebundene (endliche) und nicht-gebundene (unendliche) Lösungen. Für den Fall $k > 0$ negativer Energie, nimmt der Abstand der Galaxien zunächst zu. Nach einem Maximum nimmt er aber

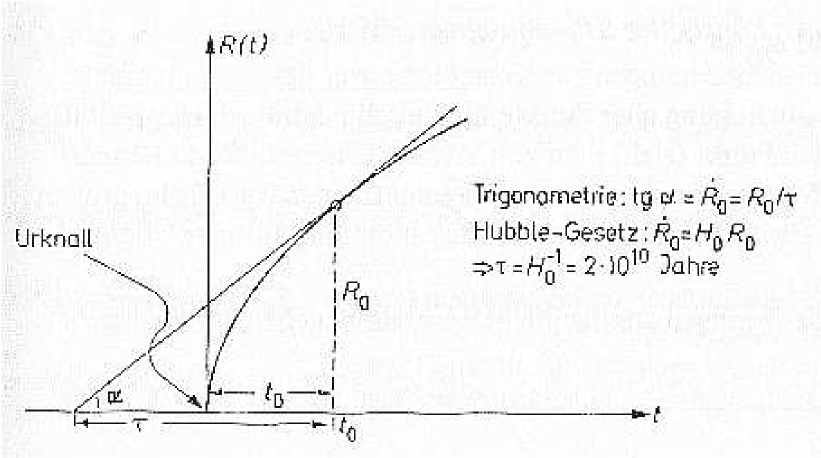

Abbildung II.4.4: Die inverse Hubble-Konstante $\frac{1}{H_0}$ ist eine obere Schranke für das Weltalter τ.

wieder ab, bis zum Big Crunch, dem Kollaps des Universums. Dieses entält nicht genug Energie, um die Expansion für immer aufrecht zu erhalten. In der relativistischen Kosmologie spricht man von einem *geschlossenen Universum*. Für $k \leq 0$ liegt ein *offenes Universum* vor, das ewig expandiert.

Abschließend wollen wir uns noch mit der Frage beschäftigen, inwiefern die aktuelle Hubble-Konstante H_0 Informationen über das Alter des Universums liefert. H_0 ist durch die Steigung der Tangente in t_0 bestimmt. Diese schneidet die Zeitachse auf Grund des $t^{2/3}$-Verhaltens bei einem negativen Wert. Deshalb ist $\frac{1}{H_0} = \tau > t_0$, d.h. die Hubble-Konstante liefert eine obere Schranke für das Weltalter t_0.

Eine genauere Diskussion des kosmologischen Hintergrundes findet man z.B. in [4].

II.4.2 Statische Sternmodelle

Als zweite Anwendung soll einfaches Sternmodell auf Grundlage der Hydrostatik betrachtet werden. Im Gegensatz zu unser alltäglichen Erfahrung, tendieren Gaswolken kosmischen Ausmaßes nicht unbedingt dazu, den gesamten zur Verfügung stehenden Raum einzunehmen. Stattdessen sind sie oft instabil: Sie kollabieren und bilden dabei Sterne. Diese Instabilität wird quantitativ durch das sog. *Jeans-Kriterium* beschrieben [4]. Demnach ist eine Gaswolke instabil, wenn die Gravitationsenergie größer als die thermische Energie der Moleküle ist.

Im folgenden wollen wir uns allerdings nicht mit der Frage der Stabilität von interstellaren Gaswolken beschäftigen, sondern mit der Frage, wann die Kontraktion der Wolke beendet und ein stabiles Gleichgewicht erreicht ist. Diese wird durch ein Wechselspiel von Druck und Gravitationskraft bestimmt.

Die relevante äußere Kraft ist also die Gravitationskraft $\mathbf{f} = -\text{grad}\, u$, wobei das Potential $u(\mathbf{r})$ wieder durch (II.4.15) gegeben ist und die Poisson-Gleichung (II.4.16) erfüllt.

Wir nehmen nun an, daß die Gleichgewichtssituation durch die statische Euler-Gleichung (vgl. (II.2.1)

$$\text{grad}\, p = \rho \mathbf{f} = -\text{grad}\, u \tag{II.4.25}$$

beschrieben werden kann. Ferner betrachten wir eine kugelsymmetrische Situation, d.h. $\rho = \rho(r)$ und $p = p(r)$. Damit ist z.B. grad $p = \frac{dp}{dr}\hat{\mathbf{r}}$. Bilden wir nun die Divergenz der statischen Euler-Gleichung, so folgt mit (II.4.16)

$$-4\pi G\rho = \text{div}\, \left(\frac{1}{\rho}\text{grad}\, p\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right). \tag{II.4.26}$$

Dabei haben wir benutzt, daß die Divergenz radialsymmetrischer Vektorfelder durch div $\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{r^2 A_r}{dr}$ gegeben ist.
Um weitere Informationen zu erhalten, benötigen wir wieder eine Zustandsgleichung. Eine sehr allgemeine Form ist die sog. *polytrope Zustandsgleichung*

$$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \tag{II.4.27}$$

mit einer Konstanten K und dem Parameter n. Diese enthält als Spezialfälle z.B. isobare ($n = -1$, d.h. $p = K = const.$ und isotherme ($n \to \infty$, d.h. $pV = const.$) Zustandsänderungen.
Wir können nun durch Einführung von dimensionslosen Variablen die Euler-Gleichung (II.4.26) in eine bekannte Form bringen. Dazu definieren wir die Dichte $\rho_c = \rho(r = 0)$ und den Druck $p_c = p(r = 0)$ im Zentrum des Sterns, womit wir die Konstante K in der Form $K = \frac{p_c}{\rho_c^{1+1/n}}$ schreiben können. Weiterhin führen wir die dimensionslose Dichtevariable $\theta = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{1/n}$ und die dimensionslose Länge $\xi = \frac{r}{r_n}$ ein, wobei $r_n = \frac{(n+1)p_c}{4\pi G\rho_c^2}$ die sog. *Emden-Länge* ist. In den neuen Variablen nimmt die Euler-Gleichung dann die Form

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n \tag{II.4.28}$$

an. Dies ist die sog. *Lane-Emden-Gleichung*. Die Randbedingungen sind $\theta(0) = 1$ und $\theta'(0) = 0$. Letzteres garantiert, daß die Dichteverteilung im Stern nicht singulär wird.
Für die Lane-Emden-Gleichung sind drei analytische Lösungen bekannt, nämlich in den Fällen $n = 0, 1, 5$. Explizit sind die Lösungen gegeben durch

$$\theta_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}, \qquad \theta_1(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi},, \qquad \theta_5(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2/3}}. \tag{II.4.29}$$

Die beiden ersten Lösungen beschreiben Sterne mit einer "scharfen Oberfläche", denn $\theta_0(\xi = \sqrt{6}) = 0$ bzw. $\theta_1(\xi = \pi) = 0$. Jenseits dieser Nullstellen verschwindet daher die Dichte. Im Gegensatz dazu ist $\theta_5(\xi) > 0$ für alle $xi > 0$, d.h. dies beschreibt einen Stern ohne scharfe Oberfläche.
Für Sterne mit einem wohldefiniertem Radius R können wir alternativ eine andere grobe Näherung der Euler-Gleichung angeben. Dazu approximieren wir die Druckableitung durch den Differenzenquotienten

$$\frac{dp}{dr} \approx \frac{p(R) - p(0)}{R} \approx -\frac{\bar{p}}{R}, \tag{II.4.30}$$

wobei $\bar{p}$ der mittlere Druck ist. Weiterhin ist

$$\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \approx \frac{GM}{R^2}\bar{\rho} \tag{II.4.31}$$

mit der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ und der Gesamtmasse $M = M(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr$. Damit wird aus der Euler-Gleichung

$$\frac{\bar{p}}{R} \approx \frac{GM}{R^2}\bar{\rho} \tag{II.4.32}$$

oder, wenn wir den *Schwarzschild-Radius* $\mathcal{R} = \frac{2GM}{c^2}$ einführen,

$$\frac{2\bar{p}}{\rho c^2} \approx \frac{\mathcal{R}}{R}. \tag{II.4.33}$$

Hiermit lassen sich Druck oder Dichte im Inneren von Sternen größenordnungsmäßig abschätzen.

II.5 Wirbel und Zirkulation

In diesem Abschnitt wollen wir uns qualitativ und quantitativ mit den Eigenschaften von Wirbeln in Flüssigkeitsströmungen befassen.

II.5.1 Erhaltung der Zirkulation

Viele der folgenden Überlegungen sind analog aus der Elektrodynamik bekannt. Wir definieren die *Zirkulation* durch das Weegintegral

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \tag{II.5.1}$$

längs eines geschlossenen Weges c. Γ ist ein Maß für die Wirbel des Geschwindigkeitsfelds. Die Zirkulation steht in enger Verbindung mit der Rotation, denn

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \lim_{F\to 0} \frac{1}{F} \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}, \tag{II.5.2}$$

wobei $F = F(c)$ die vom Weg c eingeschlossene Fläche bezeichnet. Ein Strömung, deren Zirkulation überall verschwindet, ist *wirbelfrei*, d.h. $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$. Dann liegt also eine Potentialströmung vor. Die Umkehrung dieser Aussage gilt aber i.a. nicht, denn eine Potentialströmung kann durchaus eine nichtverschwindende Zirkulation haben. Nur für ein einfach-zusammenhängendes Gebiet[5] ist der Umkehrschluß möglich.
Zur Berechnung der Zirkulation um ein nicht einfach-zusammenhängendes Gebiet betrachten wir den dreifach-zusammenhängenden Bereich aus Abb. II.5.1, in dem die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v}$ überall verschwinden soll. Das Gebiet kann durch Aufschneiden längs

[5]d.h. ein Gebiet ohne “Löcher”.

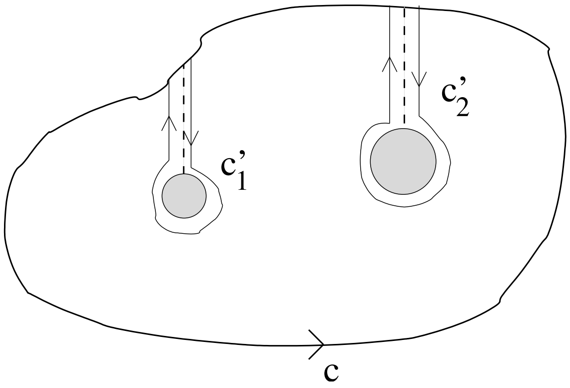

Abbildung II.5.1: Zur Berechnung der Zirkulation um ein nicht einfach-zusammenhängendes Gebiet. Durch Aufschneiden längs der gestrichelten Linien wird das Gebiet einfach-zusammenhängend.

geeigneter Linien einfach-zusammenhängend gemacht werden. Die Anwendung des Satzes von Stokes auf den deformierten Weg $c + c_1' + c_2'$, der längs der Schnitte um die Löcher verläuft, liefert dann das Verschwinden der Zirkulation längs dieses Weges:

$$\Gamma_0 := \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{c_1'} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{c_2'} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0. \tag{II.5.3}$$

Damit ist dann die Zirkulation Γ längs des ursprünglichen Weges c gegeben durch

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_=2 \qquad \text{mit} \qquad \Gamma_j := \oint_{c_j} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}, \tag{II.5.4}$$

wobei der Weg c_j dem Weg c_j' mit umgekehrtem Umlaufsinn entspricht. Wir haben daher an diesem Beispiel gesehen, daß die Zirkulation längs eines Weges in einem nicht einfach-zusammenhängendem Gebiet gleich der Summe der Zirkulationen um die eingeschlossenen Löcher (auf gleichsinnigen Kurven) ist.

Als konkretes Beispiel betrachten wir zwei konzentrische Zylinder mit den Radien $r_1 < r_2$. Der Bereich $r_1 < r < r_2$ sei von einer Flüssigkeit erfüllt, deren Geschwindigkeitsfeld durch

$$\mathbf{v} = \frac{a}{r}\mathbf{e}_\varphi = (-v \sin\varphi, v\cos\varphi) = \frac{a}{x^2 + y^2}(-y, x), \tag{II.5.5}$$

wobei wir hier bereits Darstellung in kartesischen und Zylinderkoordinaten angegeben haben. $\mathbf{e}_\varphi$ ist dabei der Einheitsvektor in Winkelrichtung (senkrecht zu $\hat{\mathbf{r}}$). Offensichtlich ist das Gebiet zweifach-zusammenhängend, aber $(\text{rot }\mathbf{v})_z = 0$, wobei wir uns das Geschwindigkeitsfeld als dreidimensional mit $v_z = 0$ vorstellen. Obwohl die Rotation verschwindet, folgt für die Zirkulation längs eines Kreisweges c_r vom Radius r (mit $r_1 < r < r_2$)

$$\Gamma = \oint_{c_r} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} r d\varphi = 2\pi a \neq 0. \tag{II.5.6}$$

da $d\mathbf{s} \propto \mathbf{e}_\varphi$. D.h., daß es trotz der Wirbelfreiheit $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$ geschlossene Stromlinien gibt. Das Geschwindigkeitsfeld kann auch aus dem Potential $\phi = a \arctan \frac{y}{x}$ abgeleitet werden, das allerdings eine mehrdeutige Funktion ist.
Als nächstes wollen wir die Zeitentwicklung der Zirkulation genauer untersuchen. Dazu betrachten wir die substantielle Ableitung

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}, \qquad \text{(II.5.7)}$$

d.h. die Änderung von Γ längs einer sich bewegenden Flüssigkeitskurve, nicht einer raumfesten. Dabei kann sich natürlich auch die Form der Kurve verändern, die allerdings immer aus den gleichen Teilchen gebildet werden soll. Somit haben wir

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_c \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} + \oint_c \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{s}. \qquad \text{(II.5.8)}$$

Die zeitliche Entwicklung ist in Abb. II.5.2 veranschaulicht, insbesonder die zeitliche Änderung des Kurvenelements $d\mathbf{s}$. Die Geschwindigkeiten der infinitesimal getrennten Punkte P_1 und P_2 hängen gemäß der Entwicklung $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (d\mathbf{s} \cdot \nabla)\mathbf{v}_1$ zusammen. Damit ergibt sich

$$d\mathbf{s}' = d\mathbf{s} + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)dt = d\mathbf{s} + (d\mathbf{s} \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 dt. \qquad \text{(II.5.9)}$$

Wählen wir den Punkt P_1 als Aufpunkt und lassen deshalb den Index weg, so folgt hieraus

$$\frac{d}{dt} d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{s}' - d\mathbf{s}}{dt} = (d\mathbf{s} \cdot \nabla)\mathbf{v} \qquad \text{(II.5.10)}$$

und somit

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{s} = \mathbf{v} \cdot (d\mathbf{s} \cdot \nabla)\mathbf{v} = d\mathbf{s} \cdot \nabla \frac{v^2}{2}. \qquad \text{(II.5.11)}$$

Deshalb verschwindet der Beitrag von der Änderung der Flüssigkeitskurve zur zeitlichen Änderung der Zirkulation:

$$\oint_c \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{s} = \oint_c d\mathbf{s} \cdot \nabla \frac{v^2}{2} = \int_{F(c)} \mathrm{rot} \, \left(\nabla \frac{v^2}{2} \right) \cdot d\mathbf{F} = 0. \qquad \text{(II.5.12)}$$

Dies gilt ganz allgemein. Zur Berechnung des anderen Beitrages betrachten wir speziell ein isentrope Bewegung unter dem Einfluß einer konservativen Kraft. In diesem Falle lautet die Euler-Gleichung

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(u + w) \qquad \text{(II.5.13)}$$

mit dem Potential u und der Enthalpie w. Deshalb haben wir

$$\oint_c \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = -\oint_c \nabla(u + w) \cdot d\mathbf{s} = -\int_{F(c)} \mathrm{rot} \, (\nabla(u + w)) \cdot d\mathbf{F} = 0. \qquad \text{(II.5.14)}$$

Wir haben damit den *Erhaltungssatz der Zirkulation*

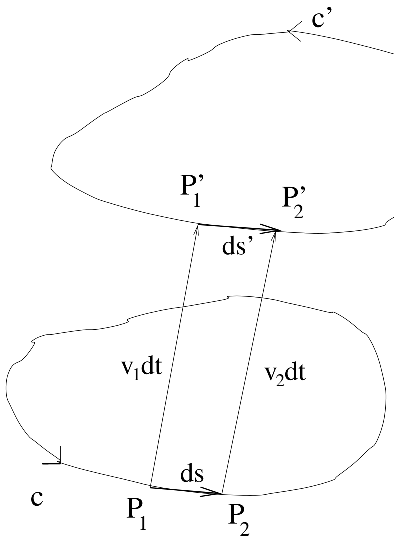

Abbildung II.5.2: Zur zeitlichen Entwicklung der Zirkulation. c und c' bezeichnet die Flüssigkeitskurve zu den Zeiten t bzw. $t + dt$.

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \qquad \text{(II.5.15)}}$$

bewiesen, der auch als *Satz von Thomson* bekannt ist. In einer idealen Flüssigkeit ändert sich also bei isentroper Bewegung unter Einfluß von konservativen Kräften die Zirkulation längs geschlossener Kurven zeitlich nicht! Diese Aussage gilt i.a. nicht mehr, wenn die Strömung nicht isentrop ist, d.h. wenn kein eindeutiger Zusammenhang zwischen p und ρ besteht.
Betrachten wir eine infinitesimale Kurve δc, die die Fläche δF einschließt, so gilt

$$const = \oint_{\delta c} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\delta F} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} \approx (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{F}. \qquad \text{(II.5.16)}$$

rot $\mathbf{v}$ heißt daher auch *Wirbelung* der Strömung. Die Identität $\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{v} = const$ kann man dann auch so interpretieren, daß sich die Wirbelung mit der Flüssigkeit mitbewegt.

II.5.2 Helmholtz'sche Wirbelsätze

Im folgenden betrachten wir eine inkompressible ideale Flüssigkeit, d.h. das Geschwindigkeitsfeld erfüllt div $\mathbf{v} = 0$. Wir definieren dann den *Wirbelvektor* $\mathbf{w}$ durch

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}. \qquad \text{(II.5.17)}$$

Speziell für das Standardwirbelfeld $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{v}$ (mit konstantem Vektor ω) ist dann $\mathbf{w} = \mathbf{omega}$. Dies motiviert die Einführung des Faktors $\frac{1}{2}$ in der Definition. Ferner definieren wir *Wirbellinien* als die Linien, die überall die Richtung des lokalen Wirbelvektors haben. In einer graphischen Darstellung ist darüberhinaus die Dichte der Linie proportional zu $|\mathbf{w}|$. Wegen div $\mathbf{w} = 0$

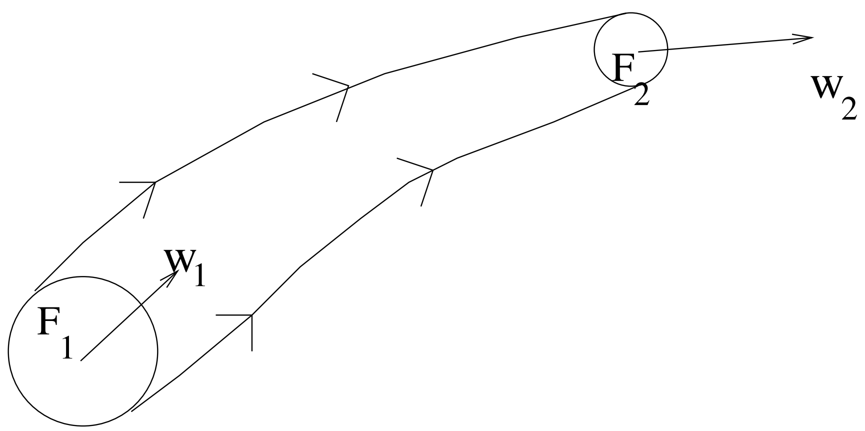

Abbildung II.5.3: Eine Wirbelröhre gebildet von allen Wirbellinien, die durch F_1 gehen. Die Pfeile markieren die Richtung des Wirbelvektors.

können Wirbellinien im Inneren von Flüssigkeiten weder anfangen noch enden. Sie bilden daher geschlossene Kurven oder schneiden die Begrenzungsflächen.
Wir betrachten nun ein kleines Flächenstück F_1. Verfolgen wir alle Wirbellinien, die durch diese Fläche laufen, so bilden diese eine *Wirbelröhre* (siehe Abb. II.5.3). Ist der Querschnitt der Wirbelröhre so klein, daß $\mathbf{w}$ auf ihm als konstant angesehen werden kann, so spricht man auch von einem *Wirbelfaden*.
Betrachten wir einen endliches Stück einer Wirbelröhre, so gilt nach dem Gaußschen Satz wegen $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$

$$\oint_O \mathbf{w} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{w} dV = 0. \tag{II.5.18}$$

Hierbei bezeichnet V das Volumen des Wirbelröhrenabschnitts und O seine Oberfläche. Auf der Mantelfläche des Abschnitts ist nun aber $\mathbf{w} \perp \mathbf{dF}$ nach Definition der Wirbellinie. Hieraus folgt z.B. das das Integral von $\mathbf{w}$ längs eines beliebigen Weges, der ganz auf dem Mantel verläuft, verschwindet. Damit tragen nur die Boden- und Deckelflächen F_1 und F_2 zum Flächenintegral in (II.5.18) bei, d.h.

$$\int_{F_1} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{F} + \int_{F_2} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{F} = 0. \tag{II.5.19}$$

Berücksichtigt man die Tatsache, daß die Flächennormale $d\mathbf{F}$ bei geschlossenen Flächen konventionsgemäß immer nach außen zeigt, so bedeutet dies, daß der Wirbelfluß in allen Querschnitten F einer Wirbelröhre gleich ist:

$$\int_F \mathbf{w} \cdot d\mathbf{F} = const. \tag{II.5.20}$$

Speziell für einen Wirbelfaden gilt sogar

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{F} = const. \tag{II.5.21}$$

Hieraus kann man z.B. folgern, daß die Drehgeschwindigkeit invers proportional zum Querschnitt ist. In der Literatur $\mathbf{F} \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{v} = 2\mathbf{F} \cdot \mathbf{w}$ auch als *Wirbelstärke* bezeichnet. Sie ist längs eines Wirbelfadens konstant.

Eine weitere Konsequenz aus (II.5.20) ist die Konstanz der Zirkulation um eine Wirbelröhre, denn es gilt

$$\int_{F(c)} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{F} = \frac{1}{2} \int_{F(c)} \mathrm{rot}\, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} = \frac{1}{2} \int_{c} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\Gamma}{2}. \qquad \text{(II.5.22)}$$

Hierbei ist c ein beliebiger Weg auf der Mantelfläche, der die Wirbelröhre umschließt, und $F(c)$ die von diesem Weg eingschlossene Querschnittsfläche. Die Zirkulation um die Wirbelröhre ist daher räumlich konstant.

Wir wollen nun die zeitliche Änderung von Wirbeln untersuchen. Aus der Euler-Gleichung (II.1.16) für die isentrope Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit folgt für eine konservative Kraft

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \mathrm{rot}\ (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0. \qquad \text{(II.5.23)}$$

Da div $\mathbf{w} = 0$ und, wegen der Inkompressibilität, auch div $\mathbf{v} = 0$, gilt

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\nabla \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} \quad \text{(II.5.24)}$$

und somit

$$\boxed{\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \qquad \text{(II.5.25)}}$$

Hieraus kann man folgenden *Wirbelsatz* ablesen: Wirbel können in einer inkompressiblen idealen Flüssigkeit weder entstehen noch vergehen. Ist nämlich z.B. $\mathbf{w}(t = 0) = 0$, so bleibt $\mathbf{w}(t) = 0$. Wir werden dies später noch genauer diskutieren.

Als nächstes sehen wir uns die räumlichen Eigenschaften der Wirbellinien an. Wir betrachten dazu, wie in Abb. II.5.4 dargestellt, zwei benachbarte Punkte P und P' auf einer Wirbellinie. Per definition zeigt der Verbindungsvektor $\delta\mathbf{s}$ der Punkte in Richtung des Wirbelvektors $\mathbf{w}$. Wir können ihn daher als $\delta\mathbf{s} = \mathbf{w}\delta\xi$ darstellen. Nach einer Zeit dt hat sich die Wirbellinie weiter bewegt. Die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}'$ der Punkte P und P' sind i.a. verschieden. In erster Ordnung hängen sie über

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (\delta\mathbf{s} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{v} + \delta\xi(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \qquad \text{(II.5.26)}$$

Eine analoge Entwicklung gilt für den neuen Verbindungsvektor $\delta\mathbf{s}'$:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{s}' &= \delta\mathbf{s} + (\delta\mathbf{s} \cdot \nabla)\mathbf{v}dt = \delta\xi(\mathbf{w} + dt(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v}) \\ &= \delta\xi\left(\mathbf{w} + dt\frac{d\mathbf{w}}{dt}\right) = \delta\xi\,(\mathbf{w} + d\mathbf{w}) = \mathbf{w}'\delta\xi. \end{aligned} \qquad \text{(II.5.27)}$$

Hierbei haben wir beim Übergang zur zweiten Zeile den Wirbelsatz (II.5.25) verwendet. Die Tatsache, daß der Verbindungsvektor $\delta\mathbf{s}'$ zur Zeit $t + dt$ wieder parallel zum neuen Wirbelvektor $\mathbf{w}'$ ist, können wir so interpretieren: Der Punkt P' ist auf der Wirbellinie geblieben, die durch den Punkt P geht. Die Wirbellinie bewegt sich also mit den auf ihr befindlichen Teilchen fort. Die Wirbel haften also gewissermaßen an der Materie und ein Wirbelfaden wird immer aus den

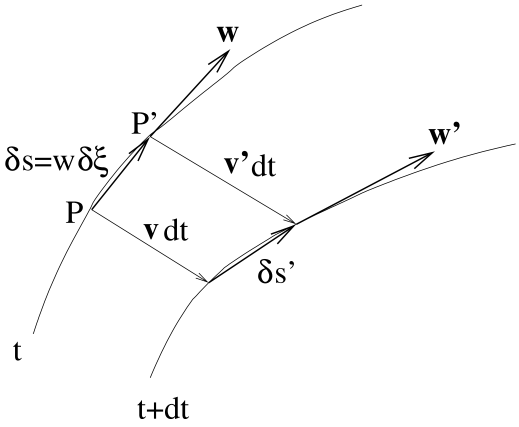

Abbildung II.5.4: Bewegung einer Wirbellinie.

gleichen Flüssigkeitsteilchen gebildet. Im Fall der Inkompressibilität bedeutet dies auch, daß das Volumen einer Flüssigkeitsröhre konstant bleibt. Wegen

$$\frac{|\delta \mathbf{s}'|}{|\delta \mathbf{s}|} = \frac{|\mathbf{w}'|}{|\mathbf{w}|} \tag{II.5.28}$$

wird der Wirbelvektor größer, wenn sich der Wirbel streckt.
Wir können die bisherigen Ergebnisse in Form der *Helmholtz'schen Wirbelsätze* zusammenfassen. Demnach gibt es zwei Erhaltungssätze, einen zeitlichen und eine räumlichen. Der zeitliche Erhaltungssatz besagt, daß die Zirkulation zeitlich konstant ist, d.h. insbesondere können Wirbel weder enstehen noch vergehen. Der räumliche Erhaltungssatz drückt aus, daß die Zirkulation längs jeder Wirbelröhre konstant ist.
Die bisherigen Ergebnisse werfen ein Problem auf: Warum können überhaupt Wirbel entstehen? Aus der alltäglichen Erfahrung wissen wir ja, daß Wirbel tatsächlich existieren und auch entstehen oder verschwinden können. Ein naheliegender Grund wäre die Vernachlässigung der Reibung in unseren bisherigen Betrachtungen. Dem ist aber nicht so, denn ähnliche Ergebnisse gelten auch für zähe Flüssigkeiten. Tatsächlich können Wirbel in Flüssigkeiten nur über die Randflächen (Gefäßwände) einwandern. Bei zähen Flüssigkeiten spielen vor allem tangentiale Haftkräfte eine entscheidende Rolle.
Abschließend wollen wir noch einige Ergebnisse der Elektrodynamik auf die Theorie der Flüssigkeiten übertragen. Dort haben wir gelernt, daß man das Geschwindigkeitsfeld berechnen kann, wenn das Wirbelfeld bekannt ist. Diese Argumentation soll im folgenden noch einmal skizziert werden.
Wir betrachten eine inkompressible Flüssigkeit. Da dann div $\mathbf{v} = 0$ ist, liegt die Einführung eines 'Vektorpotentials' $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{v} = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}$ nahe. Bildet man die Rotation der letzten Gleichung, so erhält man die Poisson-Gleichung $\Delta\mathbf{A} = -2\mathbf{w}$. Die Lösung dieser Gleichung ist aus der Elektrodynamik bekannt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\mathbf{w}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV', \tag{II.5.29}$$

woraus dann

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\mathbf{w}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \tag{II.5.30}$$

folgt.
Betrachtet man speziell einen Wirbelfaden, so kann man analog zum Biot-Savart'schen Gesetz für stromführende Drähte die folgenden Beziehungen ableiten:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \qquad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{II.5.31}$$

Dabei ist die Integration jeweils längs des Wirbelfadens auszuführen. Γ ist die (konstante) Zirkulation um den Faden.

II.6 Potentialströmungen

Im folgenden betrachten wir wieder eine isentrope ideale Flüssigkeit. Außerdem soll die Strömung wirbelfrei sein, d.h. $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. Wir nehmen an, daß wir es mit einer Potentialströmung zu tun haben,

$$\mathbf{v} = \nabla\phi, \tag{II.6.1}$$

mit dem *Geschwindigkeitspotential* ϕ.
In diesem Fall ist dann $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ und die Euler-Gleichung (II.1.14) vereinfacht sich zu

$$\nabla \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\left((\nabla\phi)^2\right) = -\nabla(u + w), \tag{II.6.2}$$

wobei u und w das Potential der äußeren Kraft bzw. die Enthalpie bezeichnet. Offensichtlich folgt hieraus, daß $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + u + w$ räumlich konstant ist und mithin nur eine Funktion der Zeit sein kann:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + u + w = f(t). \tag{II.6.3}$$

Dabei können wir o.B.d.A. sogar $f(t) = 0$ wählen, da auch das Geschwindigkeitspotential ϕ nur bis auf eine beliebige Zeitfunktion bestimmt ist. Deshalb können wir mit der Eichtransformation

$$\phi \longrightarrow \tilde{\phi} := \phi + \int f(t)dt, \tag{II.6.4}$$

die $\mathbf{v}$ nicht ändert, immer $\tilde{f}(t) = 0$ erreichen.
Betrachten wir speziell eine stationäre Strömung, so ist $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$. Damit folgt sogar

$$\frac{v^2}{2} + u + w = 0. \tag{II.6.5}$$

Dies ist die Bernoulli-Gleichung für wirbelfreie Strömungen. Im Vergleich zu (II.3.5) ist hier die auftretende Konstante für alle Stromlinien gleich. Sie kann deshalb durch Umeichen des (äußeren) Potentials u immer zu Null gemacht werden.

Für eine inkompressible Flüssigkeit erfüllt das Geschwindigkeitspotential wegen div $\mathbf{v} = 0$ die Laplace-Gleichung

$$\delta\phi = 0. \tag{II.6.6}$$

Dies bestimmt, zusammen mit den Randbedingungen, das Potential. Die Randbedingungen ergeben sich aus der Tatsache, daß die Normalkomponente $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ an den Randflächen mit der Bewegungsgeschwindigkeit der Ränder in Richtung der Normalen $\mathbf{n}$ übereinstimmen muß. Man hat dann eine Bedingung der Form

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\text{Rand}} = s(\mathbf{r}, t) \tag{II.6.7}$$

wobei die Funktion $s(\mathbf{r}, t)$ durch die Bewegung der Rändern bestimmt wird.

II.6.1 Ebene Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten

Wir wollen uns nun den Fall einer ebenen Strömung genauer ansehen. Hierbei handelt es um eine Strömung, bei der keine z-Abhängigkeit vorliegt. Als Anwendung werden wir später die Strömung um einen unendlich langen Zylinder betrachten. Hier liegt aus Symmetriegründen in jeder Ebene senkrecht zur Zylinderachse das gleiche Strömungsmuster vor, so daß man die Bewegung als zweidimensional ansehen kann.

Wir wollen zunächst noch nicht von einer Potentialströmung ausgehen, sondern lediglich die Inkompressibilität der Flüssigkeit fordern. Es ist also

$$\text{div}\,\mathbf{v} = 0 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}. \tag{II.6.8}$$

Wir definieren nun die *Stromfunktion* ψ durch

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{II.6.9}$$

Es handelt sich also um eine Art zweidimensionales Vektorpotential. Wenn wir $\mathbf{v}$ so darstellen, ist die Inkompressibilitätsbedingung (II.6.8) automatisch erfüllt:

$$\text{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0. \tag{II.6.10}$$

Wir betrachten nun die Euler-Gleichung für isentrope Bewegung in der Form (II.1.16). Für eine konservative äußere Kraft ist $\text{rot}\,\mathbf{f} = 0$ und somit

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\mathbf{v} = \text{rot}\,\left(\mathbf{v} \times \text{rot}\,\mathbf{v}\right). \tag{II.6.11}$$

Für eine ebene Strömung gilt

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z = \left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\mathbf{e}_z = -(\Delta\psi)\mathbf{e}_z, \tag{II.6.12}$$

wobei $\mathbf{e}_z$ der Einheitsvektor in z-Richtung ist. Analog ergibt sich, da der Vektor $\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ auch in der $x-y$-Ebene liegt:

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v}) = \left(\Delta\psi \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + v_x \frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi + v_y \frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi\right) \mathbf{e}_z. \qquad \text{(II.6.13)}$$

Insgesamt ergibt sich daher aus (II.6.11) folgende Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi = 0. \qquad \text{(II.6.14)}$$

Diese bestimmt zusammen mit den Randbedingungen (II.6.7) die Stromfunktion.
Ist die Stromfunktion einmal bekannt, so können wir aus ihr direkt die Stromlinien bestimmen. Für diese stimmt ja die Richtung der Tangente mit der Richtung der Geschwindigkeit überein. Deshalb ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}. \qquad \text{(II.6.15)}$$

Hieraus folgt

$$0 = -v_y dx + v_x dy = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = d\psi. \qquad \text{(II.6.16)}$$

Somit ist also $d\psi = 0$, d.h. die Stromfunktion ist längs einer Stromlinie konstant!
Im folgenden werden wir nun Potentialströmungen betrachten. Da wir zwei unterschiedliche Darstellungen (II.6.1) und (II.6.9) der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ als Ableitung haben, stellt sich die Frage, wie diese zusammenhängen. Explizit haben wir

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad \text{(II.6.17)}$$

Eine solches DGl-System ist aus der Funktionentheorie wohlbekannt. Es sind die sogenannten Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (siehe Anhang A.1), die garantieren, daß die Funktion

$$w := f(z) := \phi(x,y) + i\psi(x,y) \qquad \text{(II.6.18)}$$

mit $z = x + iy$ komplex-differenzierbar ist.
Aus (II.6.17) folgt durch differenzieren, daß

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{(II.6.19)}$$

d.h. das Geschwindigkeitspotential und die Stromfunktion genügen einer Laplace-Gleichung. Weiterhin gilt

$$(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \qquad \text{(II.6.20)}$$

Somit sind die Linien $\phi(x,y) = const.$ und $\psi(x,y) = const.$ orthogonal zueinander.

Die in (II.6.18) eingeführte Größe heißt auch *komplexes Potential*, ihre Ableitung $\frac{dw}{dz}$ *komplexe Geschwindigkeit*, denn es gilt (siehe Aufg. 5)

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = ve^{-i\theta}, \tag{II.6.21}$$

wobei v der Betrag der Geschwindigkeit ist und θ der Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und der x-Achse.
An der Oberfläche eines umströmten Körpers ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ tangential, d.h. die Randflächen sind per definition Stromlinien. Dies bedeutet nach (II.6.16), daß die Stromfunktion auf dem Rand konstant sein muß. Hat man es nur mit einem umströmten Körper zu tun, so kann man o.B.d.A. $\psi|_{\text{Rand}} = 0$ fordern.
Insgesamt läßt sich also ein ebenes Strömungsproblem auf folgende mathematische Fragestellung zurückführen: Gesucht wird eine holomorphe Funktion $w(z)$, die auf dem umströmten Körper nur reelle Werte annimmt!
Bevor wir ein konkretes Beispiel untersuchen sei noch angemerkt, daß freie Oberflächen i.a. nur schwer zu behandeln sind.

II.6.2 Ebene Strömung um ein Hindernis

Wir betrachten nun eine Strömung um ein Hindernis. Die Form des Hindernisses soll dabei nicht von der z-Koordinate abhängen, damit wir wieder von einer ebenen Strömung sprechen können. Das Hindernis ist also eine Art Zylinder mit beliebigem Querschnitt.
Den Ursprung des Koordinatensystems legen wir in der Schwerpunkt des Hindernisses. Die Geschwindigkeit der Strömung wird konstant für $x, y \to \infty$. Damit ist auch die komplexe Geschwindigkeit $w'(z) = v_x - iv_y$ im Unendlichen konstant: $w'(z \to \infty) = v_x^{(\infty)} - iv_y^{(\infty)}$. Somit können wir das komplexe Potential nach Potenzen von $1/z$ entwickeln:

$$w'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}. \tag{II.6.22}$$

Durch Integration folgt daher, daß das komplexe Potential die Form

$$w(z) = a_0 z + a_1 \ln z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)z^{n-1}} \tag{II.6.23}$$

hat. Für $z \to \infty$ ist $w'(z) = v_x^{(\infty)} - iv_y^{(\infty)}$. Daher ist $a_0 = v_x^{(\infty)} - iv_y^{(\infty)}$ ein Maß für die asymptotische Geschwindigkeit.
Um die physikalische Bedeutung des Koeffizienten a_1 zu bestimmen, betrachten wir das Integral der komplexen Geschwindigkeit längs eines Weges c auf der Oberfläche des Hindernisses, der dieses umschließt:

$$\oint_c w'(z)dz = \oint_c (v_x - iv_y)(dx + idy) = \oint_c (v_x dx + v_y dy) + i \oint_c (v_x dy - v_y dx). \tag{II.6.24}$$

Das erste Integral ist gerade die Zirkulation:

$$\oint_c (v_x dx + v_y dy) = \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma. \tag{II.6.25}$$

Das zweite Integral verschwindet, denn

$$\oint_c (v_x dy - v_y dx) = \oint_c \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \oint_c d\psi = 0. \tag{II.6.26}$$

da ψ längs einer Stromlinie (also auch der Oberfläche) konstant ist. Somit haben wir nach dem Residuensatz

$$\Gamma = \oint_c w'(z) dz = 2\pi i a_1. \tag{II.6.27}$$

Der Koeffizient a_1 ist also ein Maß für die Zirkulation![6] Man beachte, daß $\ln z$ strenggenommen keine holomorphe Funktion ist, da sie einen Schnitt besitzt. Daran spiegelt sich wieder, daß wir es nicht mit einem einfach-zusammenhängenden Gebiet zu tun haben. Daher wird es i.a. kein eindeutiges Potential ϕ geben.
Als nächstes wollen wir die Kraft berechnen, die die Strömung auf das Hindernis ausübt. Dazu betrachten wir ein Teilstück der Länge L in z-Richtung. Die Kraft auf dieses Stück ist dann

$$\mathbf{K} = -\oint_c p d\mathbf{F} = -\oint_c p(L dy, -L dx). \tag{II.6.28}$$

Für eine isentrope inkompressible Potentialströmung ohne äußere Kräfte lautet die Bernoulli-Gleichung

$$\rho\epsilon = \frac{\rho}{2} v^2 + p = const. = \frac{\rho}{2} v_\infty^2 + p_\infty, \tag{II.6.29}$$

wobei die Konstante unabhängig von der Stromlinie ist. Damit haben wir dann

$$\frac{1}{L} K_x = -\oint_c p L dy = -\rho\epsilon \oint_c dy + \frac{\rho}{2} \oint_c (v_x^2 + v_y^2) dy, \tag{II.6.30}$$

$$\frac{1}{L} K_y = \oint_c p L dx = \rho\epsilon \oint_c dx - \frac{\rho}{2} \oint_c (v_x^2 + v_y^2) dx. \tag{II.6.31}$$

Die ersten Integrale verschwinden, da längs einer geschlossenen Kurve integriert wird: $\oint_c dx = \oint_c dy = 0$. Wir definieren nun die komplexe Kraft

$$Z = \frac{1}{L}(K_y + i K_x) = -\frac{\rho}{2} \oint_c (v_x^2 + v_y^2)(dx - i dy). \tag{II.6.32}$$

Auf der Oberfläche, die eine Stromlinie ist, ist $0 = d\psi = v_x dy - v_y dx$ und somit

$$\oint_c 2i(v_x - i v_y)(v_x dy - v_y dx) = 0. \tag{II.6.33}$$

[6] Wie diese Zirkulation tatsächlich entsteht, kann man nur durch eine Diskussion von zähen Flüssigkeiten verstehen!

Addieren wir dies zum Ausdruck (II.6.32), so folgt

$$Z = -\frac{\rho}{2}\oint_c (v_x^2 - 2iv_x v_y - v_y^2)(dx + idy) = -\frac{\rho}{2}\oint_c \left(w'(z)\right)^2 dz. \qquad \text{(II.6.34)}$$

Aus der Entwicklung (II.6.22) folgt

$$\left(w'(z)\right)^2 = a_0^2 + \frac{2a_1 a_0}{z} + \frac{2a_0 a_2 + a_1^2}{z^2} + \cdots \qquad \text{(II.6.35)}$$

und deshalb mit dem Residuensatz

$$\oint_c \left(w'(z)\right)^2 dz = 2\pi i 2a_0 a_1 = 2a_0\Gamma. \qquad \text{(II.6.36)}$$

Deshalb ist

$$Z = -\rho a_0 \Gamma = -\rho\Gamma(v_x^{(\infty)} - iv_y^{(\infty)}) \qquad \text{(II.6.37)}$$

und somit

$$\boxed{K_x = \rho L \Gamma v_y^{(\infty)}, \qquad K_y = -\rho L \Gamma v_x^{(\infty)}. \qquad \text{(II.6.38)}}$$

Dieses Resultat ist als *Kutta-Joukowski'sche Auftriebsformel* bekannt und spielt eine wichtige Rolle beim Flugzeugbau, hydraulischen Maschine etc.
Durch eine analoge Rechnung kann man auch das Drehmoment bestimmen. Es ist gegeben durch

$$M = -\frac{\rho}{2}\,\mathrm{Re}\oint_c \left(zw'(z)\right)^2 dz. \qquad \text{(II.6.39)}$$

Die Ergebnisse (II.6.38) und (II.6.39) bezeichnet man auch als *Blasius'sche Formeln*.
Wir wollen nun diese Ergebnisse diskutieren. Wählen wir die x-Richtung so, daß die Strömung im Unendlichen parallel zu ihr verläuft, d.h. $\mathbf{v}_\infty = (v_x^{(\infty)}, 0)$. Dann ist offensichtlich $K_x = 0$. Dies ist sehr überraschend. Es bedeutet, daß eine Strömung auf ein Hindernis nur eine Kraft ausübt, die quer zur Stromrichtung im Unendlichen zeigt (Querkraft). Hieraus folgt z.B., daß ein Fluß auf einen Brückenpfeiler keine Kraft in Stromrichtung ausübt. Eine Kraft senkrecht dazu wird auch nur dann ausgeübt, wenn die Zirkulation nicht verschwindet. Diese überraschenden Ergebnisse bezeichnet man als *d'Alembert'sches Paradoxon*. In der Praxis wird nahe am Hindernis die Reibung wichtig. Diese führt zur Wirbelbildung, weshalb wir es nicht mehr mit einer Potentialströmung zu tun haben[7]. I.a. ist eine Strömung um einen beliebigen Körper keine wirkliche Potentialströmung. Die Ausnahme bilden die sog. *stromlinienförmigen Körper.*

[7]Die bisherigen Ergebnisse wurden unter der Annahme erzielt, daß wir eine Potentialströmung betrachten. Das dem wirklich so ist, haben wir nicht begründet!

II.6.3 Strömung um einen Kreiszylinder

Wir betrachten eine unbegrenzte inkompressible Flüssigkeit, die sich in x-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit $v_x = v$ bewegt. In dieses Geschwindigkeitsfeld setzen wir einen Kreiszylinder. Die Strömung wird sich asymptotisch ($r \to \infty$) nicht verändern, aber in der Nähe des Hindernisses stark gestört sein. Dies wollen wir im folgenden unter der Annahme berechnen, daß es sich um eine Potentialströmung handelt.
Wir suchen daher ein komplexes Potential $w(z) = \phi + i\psi$ mit $z = x + iy = re^{i\varphi}$, das holomorph ist. Gleichzeitig muß es gewisse Randbedingungen erfüllen. Die Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Zylinderoberfläche muß verschwinden. Dies bedeutet, daß die Geschwindigkeit dort tangential gerichtet ist und somit die Oberfläche $r = R$ des Zylinders eine Stromlinie ist. Deshalb ist $\psi|_{r=R} = const.$. Außerdem soll für $r \gg R$ eine ungestörte Translationsströmung mit der Geschwindigkeit $(v_\infty, 0)$ vorliegen. Somit ist (siehe Kap. II.6.2

$$w(z) = a_0 z + a_1 \ln z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)z^{n-1}} \tag{II.6.40}$$

mit $a_0 = v_\infty$ und $a_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}$. Wir müssen nun noch die Koeffizienten a_n für $n \geq 2$ bestimmen. Dazu spalten wir sie in Real- und Imaginärteil auf: $a_n =: c_n + ib_n$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} \psi|_{r=R} &= \operatorname{Im}\left(w(z)\right)|_{r=R} \\ &= v_\infty R\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln R + \frac{c_2\sin\varphi}{R} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{c_n\sin(n-1)\varphi}{(n-1)R^{n-1}} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n\cos(n-1)\varphi}{(n-1)R^{n-1}}. \end{aligned} \tag{II.6.41}$$

Dabei haben wir den $n = 2$-Term der ersten Summe explizit hervorgehoben. Da $d\psi|_{r=R} = 0$ ist, muß $\psi|_{r=R}$ unabhängig von φ sein. Somit folgt

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \quad \text{für } n \geq 2, \\ c_n &= 0 \quad \text{für } n \geq 3, \\ c_2 &= -v_\infty R^2 \end{aligned} \tag{II.6.42}$$

und daher ist das komplexe Potential gegeben durch

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z + v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right). \tag{II.6.43}$$

Für die Stromlinien $\psi = const.$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \psi = \operatorname{Im}(w(z)) &= -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + v_\infty r\sin\varphi\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(x^2+y^2) + v_\infty y\left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) \end{aligned} \tag{II.6.44}$$

und für die Äquipotentiallinien $\phi = const.$

$$\begin{aligned} \phi = \mathrm{Re}(w(z)) &= \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi + v_\infty r\cos\varphi\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right) \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi}\arctan\frac{y}{x} + v_\infty x\left(1+\frac{R^2}{x^2+y^2}\right). \end{aligned} \tag{II.6.45}$$

Die komplexe Geschwindigkeit ist schließlich

$$w'(z) = v_x - iv_y = \frac{\Gamma}{2\pi i z} + v_\infty\left(1-\frac{R^2}{z^2}\right). \tag{II.6.46}$$

Die Nullstellen der komplexen Geschwindigkeit $w'(z)$ heißen *Staupunkte*:

$$z_{1/2} = x_{1/2} + iy_{1/2} = -\frac{\Gamma}{4\pi i v_\infty} \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty}\right)^2}. \tag{II.6.47}$$

Ist die Wurzel reell, so ist $|z_1| = |z_2| = R$, d.h. die Staupunkte liegen auf dem Zylinder. Mit $z_{1/2} = Re^{i\varphi_{1/2}}$ gilt dabei

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}, \qquad \cos\varphi_1 = -\cos\varphi_2 = \sqrt{1-\left(\frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}\right)^2}. \tag{II.6.48}$$

Dann kann man drei Fälle unterscheiden.
Verschwindet die Zirkulation ($\Gamma = 0$), dann liegen die Staupunkte auf der x-Achse. Die Strömung um das Hindernis ist symmetrisch (siehe Abb. II.6.1a).
Bei kleiner Zirkulation $\Gamma \neq 0$ nähern sich die Staupunkte an, bleiben aber auf der Zylinderoberfläche (Abb. II.6.1b). Die Annäherung erfolgt, je nach Vorzeichen von Γ, oben oder unten herum. Man beachte, daß sich die Richtung der Geschwindigkeit in den Staupunkten umkehrt. Dies geschieht aber stetig, da gleichzeitig der Betrag der Geschwindigkeit verschwindet.
Bei $\Gamma = 4\pi R v_\infty$ fallen die Staupunkte schließlich zusammen (Abb. II.6.1c). In allen drei Fällen, die in Abb. II.6.1 dargestellt sind, ist die Geschwindigkeit oberhalb des Hindernisses größer als v_∞ und unterhalb kleiner.
Für $|\Gamma| > 4\pi R v_\infty$ sind die Staupunkte durch

$$z_{1/2} = i\left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi v_\infty}\right)^2 - R^2}\right) \tag{II.6.49}$$

gegeben und liegen daher nicht mehr auf dem Zylinder. Entweder ist $|z_1| < R$, $|z_2| > R$ oder $|z_1| > R$, $|z_2| < R$. Es gibt daher nur einen echten Staupunkt, der andere liegt im Inneren des Zylinders. Es lassen sich dann drei Bereiche der Strömung unterscheiden (siehe Abb. II.6.1d). Nahe am Zylinder zirkuliert die Strömung um das Hindernis. Oberhalb der Stromlinien, die durch den Staupunkt verlaufen, fließt die Strömung oben am Zylinder vorbei, unterhalb unten herum.

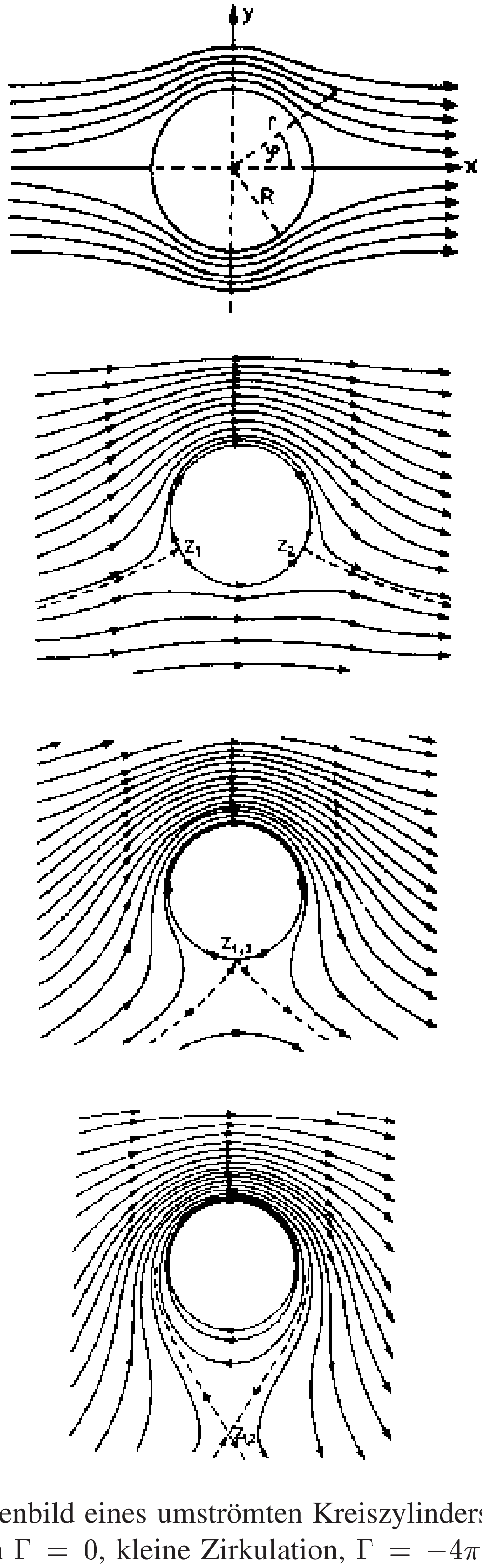

Abbildung II.6.1: Stromlinienbild eines umströmten Kreiszylinders für (von oben nach unten) verschwindende Zirkulation $\Gamma = 0$, kleine Zirkulation, $\Gamma = -4\pi R v_\infty$ und große Zirkulation $\Gamma = -6\pi R v_\infty$. Gezeigt ist jeweils das Verhalten für $\Gamma \leq 0$. Für $\Gamma \geq 0$ muß man die Bilder an der x-Achse spiegeln. $z_{1/2}$ bezeichnet die Lage der Staupunkte.

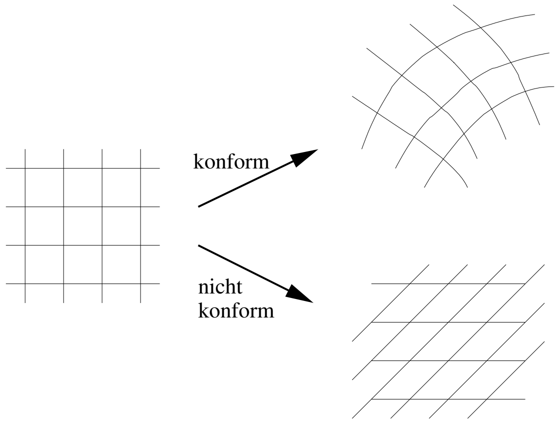

Abbildung II.6.2: Konforme Abbildungen sind winkeltreu.

Wir können auch den Druck auf die Zylinderoberfläche bestimmen. Nach der Bernoulli'schen Gleichung ist $e_\infty := \rho\epsilon_\infty = \frac{\rho v^2}{2} + p = const. = \frac{\rho v_\infty^2}{2} + p_\infty = e_\infty$. Somit folgt für den Druck

$$p = e_\infty - \frac{\rho v^2}{2} = e_\infty - \frac{\rho}{2}(v_x^2 + v_y^2) = e_\infty - \frac{\rho}{2}\left|w'(Re^{i\varphi})\right|^2 = e_\infty - \frac{\rho}{2}\left(v_\infty \sin\varphi - \frac{\Gamma}{4\pi R}\right). \tag{II.6.50}$$

Die Querkraft auf ein Teilstück der Länge L ist $K_y = -\rho v_\infty \Gamma L$ ist zu der Seite gerichtet, auf der die Richtung der ursprünglichen Translationsströmung mit der der Zirkulation übereinstimmt.

II.6.4 Ebene Strömung um beliebige Profile

Zur Untersuchung ebener Strömung um beliebig geformte Profile können wir wieder Gebrauch von den schlagkräftigen Methoden der Funktionentheorie machen. Besonders nützlich sind die sog. *konformen Abbildungen*. Ganz allgemein bezeichnet man so differenzierbare Abbildungen, die überall winkeltreu und orientierungserhaltend sind. Insbesondere enthalten sie keine Scherungskomponente (siehe Abb. II.6.2). In zwei Dimensionen ist die Klasse der konformen Abbildungen besonders groß, denn jede komplex-differenzierbare Funktion mit $f'(z) \neq 0$ ist konform.

Jeder konforme Abbildung der w-Ebene, die durch Real- und Imaginärteil ϕ und ψ des komplexen Potentials definiert wird, auf die z-Ebene entspricht eine Potentialströmung in der z-Ebene. Wir haben ja früher schon gesehen, daß die Äquipotential- und Stromlinie orthogonal sind, genau so wie die Koordinatenlinie $x = const.$ und $y = const.$ Einem Stromfaden in der z-Ebene, der durch benachbarte Stromlinien $\psi = const.$ gebildet wird, entspricht in der w-Ebene ein Streifen parallel zur ϕ-Achse (siehe Abb. II.6.3). Eine stationäre ebene Potentialströmung zwischen zwei Wänden in der z-Ebene kann daher auf eine konforme Abbildung $f(z)$ zurückgeführt werden. Man sucht eine Funktion $w = f(z)$, die achsenparallele Streifen in der w-Ebene (also eine Parallelströmung in der w-Ebene) auf das gegebene Gebiet zwischen den Wänden, die die Grenzlinien bilden, in der z-Ebene abbildet.
Allgemein gilt sogar: Kennt man eine ebene Potentialströmung in einem Gebiet, so auch in allen

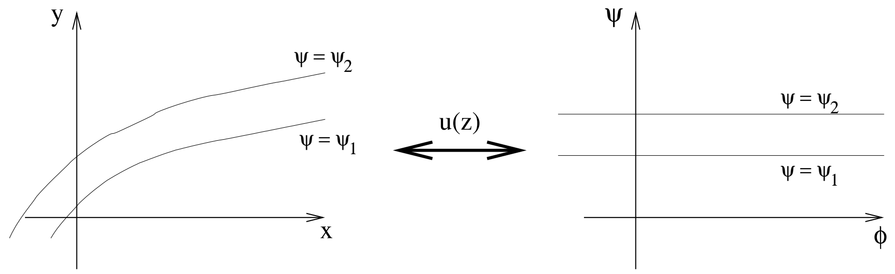

Abbildung II.6.3: Ein Stromfaden in der z-Ebene wird konform auf einen Streifen in der w-Ebene abgebildet.

anderen Gebieten, die sich auf dieses konform abbilden lassen Die Strömung um einen beliebig geformten Zylinder läßt sich z.B. immer auf den Kreiszylinder aus Abschnitt II.6.3 zurückführen. Hinter dieser Aussage steckt der sog. Riemann'sche Abbildungssatz. Dieser besagt, daß sich jedes einfach-zusammenhängende Gebiet konform auf die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ abbilden läßt.
Ist $u = u(z)$ die konforme Abbildung, die einen beliebig geformten Zylinder (in der z-Ebene) auf den Kreiszylinder (in der u-Ebene) abbildet, so ist das komplexe Potential für die Strömung gegeben durch

$$\tilde{w}(z) = w(u(z)), \tag{II.6.51}$$

wobei $w(z)$ das in Kap. II.6.3 berechnete Potential für die Strömung um den Kreiszylinder ist. Die komplexe Geschwindigkeit ist dann

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{w}}{dz} = w'\frac{du}{dz}. \tag{II.6.52}$$

Zu beachten ist noch, daß die Geschwindigkeit im Unendlichen für beide Probleme gleich sein soll, d.h. $\lim_{u\to\infty} \frac{du}{dz} = 1$.

II.6.5 Widerstandskraft bei Potentialströmungen

Wir betrachten nun einen festen Körper, der sich durch eine ruhende inkompressible Flüssigkeit bewegt. Dies können wir z.B. durch Transformation auf ein Koordinatensystem erreichen, in dem die Flüssigkeit im Unendlichen ruht. Die Strömung muß dabei nicht unbedingt eben sein. Wir wollen aber eine Potentialströmung betrachten, d.h. das Geschwindigkeitspotential ist durch die Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ und die Randbedingung $\mathbf{v}(\mathbf{r} \to \infty) = 0$ bestimmt. Dies genügt, um die Geschwindigkeitsverteilung zu einem festen Zeitpunkt in großer Entfernung vom umströmten Körper zu bestimmen.
Allgemein sind die Lösungen der Laplace-Gleichung $\frac{1}{r}$ und Ableitungen hiervon. Somit hat das Potential die Struktur

$$\phi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A} \cdot \nabla\frac{1}{r} + \cdots\,, \tag{II.6.53}$$

wobei die nicht explizit angegebenen Terme höhere Ableitung von $\frac{1}{r}$ enthalten.

Zunächst überlegen wir uns, daß $a = 0$ sein muß. Für $\phi = -\frac{a}{r}$ ist $\mathbf{v} = \frac{a\mathbf{r}}{r^3}$. Der Flüssigkeitsstrom J_R durch eine Kugel vom Radius R ist in diesem Falle, da die Geschwindigkeit an Kugeloberfläche gerade $\frac{a}{R^2}$ ist, gegeben durch

$$J_R = \rho \frac{a}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi\rho a. \tag{II.6.54}$$

Dies kennen wir aus der Elektrodynamik und entspricht dem Fluß einer Punktladung bei $r = 0$. Andererseits ist die betrachtete Flüssigkeit inkompressibel, d.h. der Strom durch jede geschlossene Fläche ist auf Grund des Gauß'schen Satzes Null. Somit muß in Gleichung II.6.54 $a = 0$ sein. Damit ist unser Geschwindigkeitspotential in führender Ordnung durch

$$\phi = \mathbf{A} \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{II.6.55}$$

gegeben, mit dem zugehörigen Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v} = \nabla\phi = \frac{3(\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{A}}{r^3}, \tag{II.6.56}$$

das also für große Abstände wie r^{-3} abfällt. $\mathbf{A}$ ist dabei abhängig von der Form des Körpers und seiner Geschwindigkeit $\mathbf{u}$. Zu seiner Bestimmung ist allerdings i.a. die vollstaändige Lösung des Problems erforderlich.
Im folgenden wollen wir die wirkende Kraft über eine energetische Betrachtung bestimmen. Da die innere Energie einer inkompressiblen Flüssigkeit konstant ist, genügt es, die kinetische Energie

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{V \setminus V_0} v^2 dV \tag{II.6.57}$$

zu betrachten. Dabei ist das Integral über den Außenraum $V \setminus V_0$ des Körpers (Volumen V_0) zu bilden. Zur Berechnung der kinetischen Energie betrachten wir eine große Kugel vom Radius R um den Körper (siehe Abb. II.6.4). Dann ist die kinetische Energie in dieser Kugel

$$E_R = \frac{\rho}{2} \int_{V_R \setminus V_0} v^2 dV = \frac{\rho}{2} \int_{V \setminus V_0} u^2 dV + \frac{\rho}{2} \int_{V \setminus V_0} (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV. \tag{II.6.58}$$

Da die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ des Körpers konstant ist, können wir das erste Integral leicht auswerten. Das zweite Integral werden wir in ein Oberflächenintegral umwandeln. Dazu verwenden wir $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \nabla(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})$. Außerdem ist $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, da $\mathbf{u}$ konstant, und $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ wegen der Inkompressibilität. Deshalb ist $(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \nabla \cdot ((\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}))$ und somit nach dem Gauß'schen Satz

$$E_R = \frac{\rho}{2}(V_R - V_0) + \frac{\rho}{2} \oint_{S_R + S_0} (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{F}. \tag{II.6.59}$$

Dabei ist S_R bzw. S_0 die Oberfläche der Kugel bzw. des Körpers. Das Integral über S_0 verschwindet nun, da auf der Oberfläche des umströmten Körpers die Normalkomponenten von $\mathbf{v}$

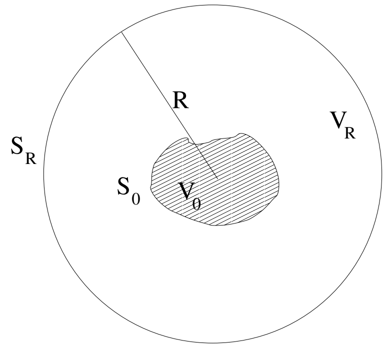

Abbildung II.6.4: Zur Berechnung der kinetischen Energie einer Flüssigkeit um einen bewegten Körper.

und $\mathbf{u}$ gleich sein müssen. Daher ist dort $(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{F} = 0$. Auf der Kugeloberfläche haben wir $d\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} R^2 d\Omega$. Somit ergibt sich für $R \to \infty$ bis auf Terme, die in diesem Limes verschwinden:

$$E_R = \frac{\rho}{2}(V_R - V_0) + \frac{\rho}{2} \int_{S_R} \left(3(\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 R^3\right) d\Omega + O(1/R). \tag{II.6.60}$$

Das Integral kann nun explizit ausgewertet werden und man erhält für die gesamte kinetische Energie

$$E = E_{R\to\infty} = \frac{\rho}{2}\left(4\pi \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - V_0 u^2\right). \tag{II.6.61}$$

Da die Laplace-Gleichung und die Randbedingungen linear in ϕ und $\mathbf{u}$ sind, muß auch $\mathbf{A}$ eine lineare Funktion der Komponenten von $\mathbf{u}$ sein. Daher läßt sich E darstellen als[8]

$$E = \frac{1}{2} m_{jk} u_j u_k \tag{II.6.62}$$

mit dem konstanten symmetrischen Tensor m_{jk}, der auch als *Tensor der zusätzlichen Masse* bezeichnet wird. Dieser tritt auch in der Darstellung des Impulses $\mathbf{P}$ auf. Multipliziert man $d\mathbf{P} = \mathbf{F}dt$ mit $\mathbf{u}$, so ist $dE = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P}$ gerade die Arbeit, die die Kraft $\mathbf{F}$ auf dem Weg $\mathbf{u}dt$ leistet. Daher haben wir

$$P_j = m_{jk} u_k. \tag{II.6.63}$$

Hieraus ergibt sich explizit

$$\mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0 \mathbf{u}. \tag{II.6.64}$$

Pro Zeiteinheit wird der Impuls $\frac{\mathbf{P}}{dt}$ auf die Flüssigkeit übertragen. Dies entspricht der Reaktion $-\mathbf{F}$ der Flüssigkeit, so daß sich für die Kraft $\mathbf{F}$, die auf den Körper wirkt, ergibt

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt}. \tag{II.6.65}$$

Die Kraftkomppnente parallel zu $\mathbf{u}$ bezeichnet man als *Widerstandskraft*, die senkrecht zu $\mathbf{u}$ als *Auftrieb* oder *Auftriebskraft*.

[8] Wir verwenden wieder die Summationskonvention!

Diese Ergebnisse können wir nun folgendermaßen interpretieren. Wäre um einen Körper, der sich in einer idealen Flüssigkeit gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ bewegt, eine Potentialströmung möglich (wie in obiger Rechnung vorausgesetzt), dann wäre $\mathbf{P}$ konstant (da $\mathbf{u}$ konstant) und somit $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}} = 0$. Die Druckkräfte auf die Oberfläche kompensieren sich also. Dies ist eine andere Form des *d'Alembert'schen Paradoxons*.
Andererseits, wäre $\mathbf{F} \neq 0$, so müßte eine äußere Quelle ununterbrochen Arbeit leisten, um die Strömung aufrecht zu erhalten. Diese Arbeit müßte dann entweder dissipiert oder in kinetische Energie umgewandelt werden. Ersteres ist in einer idealen Flüssigkeit nicht möglich. Die zweite Möglichkeit ist ausgeschlossen, weil es wegen $\mathbf{v}(r \to \infty) \to 0$ keinen Energiestrom im Unendlichen gibt.
Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß die Betrachtungen in diesem Abschnitt nur für unbegrenzte Flüssigkeiten gelten. Hat die Flüssigkeit eine freie Oberfläche, so gibt es einen zusätzlichen Widerstand für Bewegungen parallel zur Oberfläche, den man *Wellenwiderstand* bezeichnet. Man muß berücksichtigen, daß Wellen Energie ins Unendliche transportieren können. Bevor wir dieses Problem genauer untersuchen, wollen wir uns zunächst allgemein mit Wellen in idealen Flüssigkeiten beschäftigen.

II.7 Wellen in idealen Flüssigkeiten

Im folgenden betrachten wir Flüssigkeiten, die nicht in alle Richtungen unendlich ausgedehnt oder durch eine Wand begrenzt sind. Diese Flüssigkeiten haben daher eine freie Oberfläche, die im Gleichgewicht eben ist. Durch Störungen können allerdings Wellen entstehen, die sich an der Oberfläche ausbreiten. Im folgender werden wir das Koordinatensystem so wählen, daß die z-Richtung senkrecht zur Oberfläche ist, die im Gleichgewicht bei $z = 0$ liegt.

II.7.1 Schwerewellen

Als erstes Beispiel untersuchen wir Schwerewellen, die wesentlich durch die Gravitation beeinflußt werden. Sie entstehen hauptsächlich an der Oberfläche und erfassen innere Schichten mit zunehmender Tiefe immer weniger.
Im folgenden wollen wir annehmen, daß die Geschwindigkeiten so klein sind, daß

$$\left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right| \gg |(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}| \tag{II.7.1}$$

ist. Um ein Gefühl dazu bekommen, wann dies gültig ist, hilft eine einfache Abschätzung. Für eine Welle mit Schwingungsamplitude a und Schwingsdauer τ ist die typische Geschwindigkeit $v \sim \frac{a}{\tau}$. Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit ist dann von der Größenordnung $\frac{v}{\tau}$ und die räumliche Änderung von der Größenordnung $\frac{v}{\lambda}$. Hierbei ist λ die Wellenänge. All dies macht man sich klar für den speziellen Fall $f(x,t) = a\sin(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t)$. Die Bedingung (II.7.1) ist dann erfüllt, falls

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2 \ll \frac{a}{\tau}\cdot\frac{1}{\tau}, \qquad \text{d.h.} \quad a \ll \lambda. \tag{II.7.2}$$

Mit anderen Worten: Wir betrachten im folgenden den Fall, bei dem die Wellenlänge viel größer als die Amplitude der Schwingung ist.
Die Euler-Gleichung hat daher für eine inkompressible Flüssigkeit ($\rho = const.$) die Form

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(gz + \frac{p}{\rho} \right). \tag{II.7.3}$$

Hieraus lesen wir ab, daß es sich um eine Potentialströmung mit dem Geschwindigkeitspotential $\tilde{\phi}$ handelt, das durch $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -(gz + \frac{p}{\rho})$ bestimmt ist. Der Druck ist daher gegeben durch

$$p = -\rho g z - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \rho. \tag{II.7.4}$$

Der Druck p_0 an der Oberfläche sei konstant. Dann können wir zu dem Potential

$$\phi = \tilde{\phi} + \frac{p_0}{\rho} t \tag{II.7.5}$$

übergehen, daß das gleiche Geschwindigkeitsfeld generiert. Damit nimmt die Randbedingung $p|_{\text{Oberfläche}} = p_0$ die Form

$$\left(gz + \frac{\phi}{\partial t} \right)_{\text{Oberfläche}} = 0 \tag{II.7.6}$$

an. Parametrisieren wir die Oberfläche durch $\zeta(x, y)$, so lautet diese Bedingung

$$g\zeta + \left(\frac{\phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} = 0. \tag{II.7.7}$$

Für Wellen mit kleiner Amplitude ist ζ klein und die Vertikalkomponente $v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ der Geschwindigkeit ist gerade $v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$. Somit ist

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{II.7.8}$$

In der hier betrachteten Näherung können wir die Auswertung bei $z = 0$ statt bei $z = \zeta$ vornehmen. Damit ergibt sich aus (II.7.7) durch Differenzieren nach t die folgende Randbedingung für die Ausbreitung von Schwerewellen an der freien Flüssigkeitsoberfläche:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)_{z=\zeta} = 0. \tag{II.7.9}$$

Als konkretes Beispiel wollen wir eine Welle betrachten, die sich in x-Richtung fortpflanzt und die in y-Richtung homogen ist. Wir machen den Ansatz

$$\phi(\mathbf{r}, t) = f(z) \cos(kx - \omega t) \tag{II.7.10}$$

mit der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Da ϕ der Laplace-Gleichung genügt, folgt

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0 \tag{II.7.11}$$

und somit

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}. \tag{II.7.12}$$

Damit die Lösung nicht mit zunehmender Tiefe unbeschränkt anwächst, muß $B = 0$ sein[9] und wir erhalten als Lösung

$$\phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t). \tag{II.7.13}$$

Die Randbedingung (II.7.9) liefert

$$0 = \left(k - \frac{\omega^2}{g}\right) A \cos(kx - \omega t) \tag{II.7.14}$$

woraus wir die *Dispersionsbeziehung von Schwerewellen* ablesen können:

$$\omega^2 = kg. \tag{II.7.15}$$

Im Gegensatz zu elektromagnetischen Wellen ist also $\omega \propto \sqrt{k}$ statt $\omega \propto k$.
Für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$v_x = -Ake^{kz} \sin(kx - \omega t), \qquad v_z = -Ake^{kz} \cos(kx - \omega t), \tag{II.7.16}$$

die also exponentiell mit der Tiefe abnimmt. Betrachten wir einen festen Raumpunkt, so dreht sich dort der Geschwindigkeitsvektor gleichförmig in der $x - z$-Ebene, wobei der Betrag $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = Ake^{kz}$ konstant ist.
Zum Abschluß betrachten wir noch die Bahnkurven von Flüssigkeitselementen. Dazu verfolgen wir ein Element, dessen Gleichgewichtslage (zur Zeit $t = 0$) bei $\bar{x}_0$, $\bar{z}_0$ liegt. Bezeichnen wir die Koordinaten zu späteren Zeiten mit $\bar{x}(t)$, $\bar{z}(t)$, so ist die Geschwindigkeit $\bar{v}_x = \frac{d\bar{x}}{dt}$, $\bar{v}_z = \frac{d\bar{z}}{dt}$.
Für kleine Auslenkungen können wir das Ergebnis (II.7.16) verwenden und dort näherungsweise $\bar{x}(t) = \bar{x}_0$ und $\bar{z}(t) = \bar{z}_0$ setzen:

$$\bar{v}_x \approx -Ake^{k\bar{z}_0} \sin(k\bar{x}_0 - \omega t), \qquad \bar{v}_z = -Ake^{k\bar{z}_0} \cos(k\bar{x}_0 - \omega t). \tag{II.7.17}$$

Durch Integration erhalten wir die Bahnkurve

$$\bar{x} - \bar{x}_0 \approx -Ake^{k\bar{z}_0} \cos(k\bar{x}_0 - \omega t), \qquad \bar{z} - \bar{z}_0 = -A\frac{k}{\omega} e^{k\bar{z}_0} \sin(k\bar{x}_0 - \omega t). \tag{II.7.18}$$

Die Flüssigkeitselemente beschreiben also Kreise um $(\bar{x}_0, \bar{z}_0)$ vom Radius $A\frac{k}{\omega}e^{k\bar{z}_0}$, der exponentiell mit der Tiefe abnimmt (siehe Abb. II.7.1).
Für reale Wasserwellen ist i.a. die Amplitude nicht sehr viel kleiner als die Wellenlänge. Die Bahnen der Flüssigkeitselemente sind dann nicht mehr geschlossen und es gibt einen (geringen) Massentransport an der Oberfläche.

[9] In Aufgabe 8 wird der Fall einer endlichen Wassertiefe untersucht.

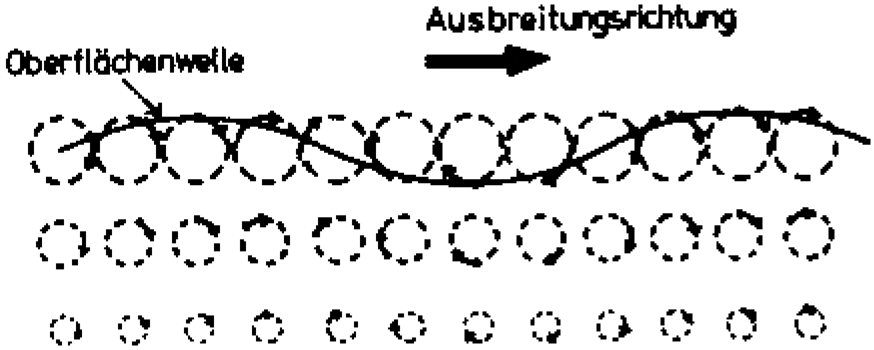

Abbildung II.7.1: In einer Schwerewelle kleiner Amplitude bewegen sich die Flüssigkeitselemente auf Kreisbahnen, deren Radius mit zunehmender Tiefe exponentiell abnimmt.

II.7.2 Ringwellen

Wir betrachten nun die Wellen, die durch einen (punktförmigen) Körper erzeugt werden, der periodisch mit Frequenz ω bei $\mathbf{r} = 0$ in die Flüssigkeit getaucht wird. Das Geschwindigkeitspotential erfüllt die Laplace-Gleichung, die in Zylinderkoordinaten lautet

$$0 = \Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \tag{II.7.19}$$

und die Randbedingung (II.7.9) mit $\zeta = 0$. Wir machen den in komplexer Darstellung den Separationsansatz

$$\phi(\mathbf{r}) = h(r)f(z)e^{-i\omega t}. \tag{II.7.20}$$

Betrachtet man dann $\frac{\Delta\phi}{\phi}$, so folgt

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}\right) + \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \tag{II.7.21}$$

Da der erste Summand nur von r, der zweite aber nur von z abhängt, müssen beide konstant sein:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}\right) = -\mu, \qquad \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \mu. \tag{II.7.22}$$

Die zweite Gleichung kann leicht integriert werden:

$$f(z) = Ae^{\sqrt{\mu}z} + Be^{-\sqrt{\mu}z}. \tag{II.7.23}$$

Dabei muß die Separationskonstante nicht-negativ sein, damit $\sqrt{\mu}$ reell ist. Ansonsten würde eine Lösung vorliegen, bei der sich periodische Bewegungen an der Oberfläche periodisch mit der Tiefe wiederholen. Diese Lösung wäre unphysikalisch. Daher können wir $\mu =: k^2$ schreiben und erhalten

$$f(z) = Ae^{kz}, \tag{II.7.24}$$

da aus dem gleichen Grund wie in Kap. II.7.1 $B = 0$ sein muß.

Nach der Reskalierung $\xi := kr$ folgt nun aus der Gleichung für die Funktion h

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial h}{\partial \xi} + h = 0. \tag{II.7.25}$$

Dies ist ein Spezialfall der Bessel'schen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 h}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dh}{dz} + \left(1 - \frac{\nu}{z^2}\right) h = 0 \tag{II.7.26}$$

mit dem reellen Parameter ν. Die Lösungen, die für unseren Fall in Betracht kommen, sind die sog. Hankel-Funktionen $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$:

$$h(\mathbf{r}) = CH_0^{(1)} + DH_0^{(2)}. \tag{II.7.27}$$

Für $kr \gg 1$ ist

$$\phi(\mathbf{r}) \approx A\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{kz - i\pi/4} \left(Ce^{i(kr-\omega t)} + De^{i\pi/2 - i(kr+\omega t)}\right). \tag{II.7.28}$$

Der erste Term in der Klammer beschreibt eine auslaufende, der zweite eine einlaufende Welle. Auf Grund der Problemstellung ist deshalb klar, daß $D = 0$ sein muß, damit der einlaufende Anteil verschwindet. Daher hat unsere Lösung die Asymptotik

$$\phi(\mathbf{r}) \approx E\frac{e^{kz}}{\sqrt{r}} e^{i(kr-\omega t)} \tag{II.7.29}$$

mit

$$\omega^2 = kg, \tag{II.7.30}$$

was aus der Randbedingung folgt. Asymptotisch sieht die Ringwelle ähnlich aus wie die Schwerewelle aus Abschnitt II.7.1, allerdings fällt die Amplitude ab wie $1/\sqrt{r}$.

II.7.3 Lange Schwerewellen

Wir betrachten nun Wellen, deren Amplitude nach wie vor klein sein soll. Im Gegensatz zu den vorigen Abschnitten betrachten wir jetzt den entgegengesetzten Grenzfall bei dem die Wellenänge viel größer als die Flüssigkeitstiefe ist.
Zunächst wollen wir ein Kanal mit beliebigem (evtl. veränderlichem) Querschnitt betrachten, der in x-Richtung verläuft. Seine Breite sei viel kleiner als die Wellenlänge. Die Querschnittsfläche der Flüssigkeit senkrecht zur x-Achse bezeichnen wir mit $S(x,t)$. Die Zeitabhängigkeit berücksichtigt, daß sich der Querschnitt bei Anwesenheit einer Welle zeitlich ändern kann.
Da sich die Flüssigkeit längs des Kanals bewegt, verlaufen die Wellen longitudinal. Wir wollen daher annehmen, daß für die Geschwindigkeit gilt: $v := v_x \gg v_y, v_z$. Die Euler-Gleichung lautet dann, wenn man die quadratischen Terme wegläßt,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g. \tag{II.7.31}$$

An einer freien Oberfäche (bei $z = \zeta$) herrscht der Druck $p(z = \zeta) = p_0$. Somit folgt aus der zweiten Gleichung $p = p_0 + g\rho(\zeta - z)$ und daher

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \tag{II.7.32}$$

Wir leiten nun eine geeignete Form der Kontinuitätsgleichung zwischen zwei Querschnitten im Abstand dx her. Das in diesen Bereich einströmende Flüssigkeitsvolumen ist $(Sv)_{x+dx}$, das ausströmende Volumen $(Sv)_x$. Hier sei daran erinnert, daß die Flüssigkeit in $+x$-Richtung fließt und $v = v_x$ ist. Die Änderung des Flüssigkeitsvolumens zwischen den Querschnitten bei x und $x+dx$ ist daher

$$(Sv)_{x+dx} - (Sv)_x = \frac{\partial(Sv)}{\partial x}dx. \tag{II.7.33}$$

Auf Grund der Inkompressibilität der Flüssigkeit muß diese Volumenänderung mit einer Änderung des Flüssigkeitsspiegels einher gehen. Da die Änderung des Volumens pro Zeiteinheit gerade $\frac{\partial S}{\partial t}dx$ ist, folgt

$$\frac{\partial S}{\partial t}dx = -\frac{\partial(Sv)}{\partial x}dx \tag{II.7.34}$$

oder, in Form einer Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv)}{\partial x} = 0. \tag{II.7.35}$$

Wir bezeichnen nun mit S_0 den Gleichgewichtsquerschnitt (ohne Welle) und mit S' die durch die Welle verursachte Änderung, d.h. $S = S_0 + S'$. Wir hatten angenommen, daß die Wellenamplitude klein ist. Dann können wir schreiben $S' = b\zeta$, wobei b die Breite des Kanals in Höhe der Flüssigkeitsoberfläche ist. Dann folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$b\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(S_0 v)}{\partial x} = 0. \tag{II.7.36}$$

Differenzieren wir diese Gleichung noch einmal nach der Zeit t, so ergibt sich mit (II.7.32)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(S_0\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = 0. \tag{II.7.37}$$

Ist der Kanalquerschnitt unabhängig von x, so erhalten wir die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{gS_0}{b}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \tag{II.7.38}$$

Hieraus können wir die Ausbreitungsgeschwindigkeit von langen Schwerewellen ablesen:

$$U = \sqrt{\frac{gS_0}{b}}. \tag{II.7.39}$$

Diese hängt also nicht von der genauen Form des Kanals ab, sondern nur von seiner Querschnittsfläche und der Breite an der Oberfläche.

Als zweites Beispiel betrachten wir nun lange Schwerewellen in einem großen Becken, das wir als unbegrenzt in der $x - y$-Ebene annehmen. In diesem Fall ist nur v_z klein. Eine analoge Argumentation wie für den Kanal ergibt die Euler-Gleichung in der Form

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \tag{II.7.40}$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (hv_y)}{\partial y} = 0. \tag{II.7.41}$$

Dabei ist $h = h_0 + \zeta$ die Tiefe und h_0 die Gleichgewichtstiefe, so daß

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (h_0 v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h_0 v_y)}{\partial y} = 0. \tag{II.7.42}$$

Wir differenzieren wieder nach der Zeit t und erhalten nun die zweidimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh_0\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{II.7.43}$$

Hieraus lesen wir die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$U = \sqrt{gh_0} \tag{II.7.44}$$

ab. Wie wir das von einer Schwerewelle erwarten, tritt die Gravitationskonstante g auf. Ansonsten hängt die Geschwindigkeit in der hier betrachteten Näherung nur von der Flüssigkeitstiefe h_0 ab. Man beachte, daß das Ergebnis (II.7.39) für den Kanal in für einen rechteckigen Kanal der Tiefe h_0 in (II.7.44) übergeht.

II.7.4 Schallwellen

Für die Ausbreitung von Schallwellen ist die Kompressibilität wesentlich. Auch die Viskosität spielt eine Rolle. Deren Einfluß werden wir aber erst später im Rahmen der Navier-Stokes-Gleichung genauer studieren können.
Bei Schallwellen ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ klein gegen ihre räumlichen und zeitlichen Änderungen. Wir können daher $\mathbf{v}$ gegen $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ und $\nabla \cdot \mathbf{v}$ vernachlässigen. Ebenso ist

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}| \ll \left|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right|, \qquad |\mathbf{v} \cdot \nabla\rho| \ll \rho\,|\nabla \cdot \mathbf{v}|\,, \tag{II.7.45}$$

womit Euler- und Kontinuitätsgleichungen linear werden:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v}. \tag{II.7.46}$$

Zur weiteren Untersuchung benötigen wir den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte. Wir nehmen an, daß die Dichte nicht allzu stark um ihren Gleichgewichtswert ρ_0 schwankt. Dann können wir entwickeln:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \kappa(p - p_0)\right) \tag{II.7.47}$$

mit der (konstanten) Kompressibilität κ und dem Gleichgewichtswert p_0 des Druckes. Aus der Entwicklung ergibt sich

$$\nabla p = \frac{1}{\kappa\rho_0}\nabla\rho. \tag{II.7.48}$$

Mit der Abkürzung $\sigma := \ln\rho$ können wir unser lineares Gleichungssystem (II.7.46) auch schreiben als

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa\rho_0}\nabla\sigma, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{II.7.49}$$

und, nach einer Zeitableitung,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa\rho_0}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}), \qquad \frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa\rho_0}(\nabla\cdot\nabla)\sigma. \tag{II.7.50}$$

Aus der ersten Gleichung in (II.7.49) folgt $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\ \mathbf{v} = 0$. Entsteht das Geschwindigkeitsfeld aus der Ruhe heraus ($\mathrm{rot}\ \mathbf{v}(t=0) = 0$), so ist es zu allen Zeiten wirbelfrei und wir haben nach einer bekannten Identität der Vektoranalysis $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) = \Delta\mathbf{v}$. Damit erfüllen alle Komponenten der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ und die logarithmische Dichte σ eine Wellengleichung der Form

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa\rho_0}\Delta f \qquad (f = v_x, v_y, v_z, \sigma) \tag{II.7.51}$$

Damit ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c, also die *Schallgeschwindigkeit*, der Wellen durch

$$c^2 = \frac{1}{\kappa\rho_0} \tag{II.7.52}$$

gegeben. Aus (II.7.46) folgt, daß auch das Geschwindigkeitspotential ϕ die Gleichung (II.7.51) erfüllt.

Im folgenden wollen wir kurz einige spezielle Lösungen der Wellengleichung genauer untersuchen.

Kugelförmige Schallwellen

Bei der Abstrahlung von einer punktförmigen Quellen entstehen Kugelwellen. Damit ist $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(r, t)$ etc. Die Wellengleichung (II.7.51) nimmt in Kugelkoordinaten die Form

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial t^2} \tag{II.7.53}$$

an, mit $\hat{\phi} := r\phi$. Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$\phi(r,t) = \frac{A}{r}f(r - ct) + \frac{B}{r}g(r + ct) \tag{II.7.54}$$

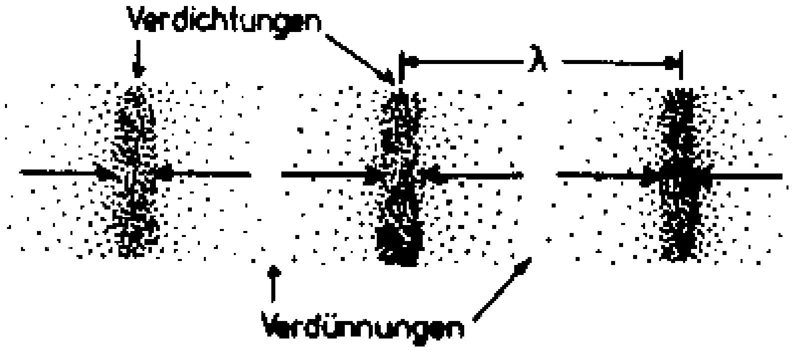

Abbildung II.7.2: Eine Schallwelle besteht aus räumlichen Verdichtungen und Verdünnungen. Die Pfeile zeigen die momentane Bewegungsrichtung der Teilchen.

mit beliebigen zweifach differenzierbaren Funktionen f und g. Der zweite Anteil beschreibt wieder eine auslaufende Welle, weshalb wir $B = 0$ wählen. Für das Geschwindigkeitsfeld ergibt sich

$$\mathbf{v} = \nabla\phi = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A}{r}f\right) = \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}f' - \frac{f}{r^2}\right), \tag{II.7.55}$$

was sich weit weg von der Quelle zu $\mathbf{v} \approx \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}f'$ vereinfacht. Wir sehen also, daß die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ parallel zur Ausbreitungsrichtung $\hat{\mathbf{r}}$ ist. Schallwellen sind also longitudinal und bestehen aus periodischen Verdichtungen und Verdünnungen (siehe Abb. II.7.2.

Ebene Schallwellen

Betrachtet man nur einen kleinen Raumbereich, so sind viele Wellen in guter Näherung als eben anzusehen. Dies gilt z.B. auch für Kugelwellen weit weg von der Quelle.
Wir betrachten nun eine ebene Welle, die sich in x-Richtung ausbreitet,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \tag{II.7.56}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\phi(x,t) = f(x \pm ct). \tag{II.7.57}$$

Für die Geschwindigkeit und die logarithmische Dichte folgt (vgl. (II.7.49))

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial x} = f', \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -f''. \tag{II.7.58}$$

Nach Integration der zweiten Gleichung haben wir

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{1}{c}f' = \frac{v}{c}. \tag{II.7.59}$$

Andererseits ist für kleine Dichteänderungen $\sigma - \sigma_0 = \ln\frac{\rho}{\rho_0} = \ln\left(1 + \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\right) \approx \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}$ und somit

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \approx \frac{v}{c}, \tag{II.7.60}$$

d.h. die relative Dichteänderung hängt direkt mit der Geschwindigkeit v zusammen.
Betrachten wir speziell eine periodische Welle, z.B. eine kosinusförmige, so ist

$$v = f' = A\sin(kx - \omega t), \qquad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \approx \frac{v}{c}. = \frac{A}{c}\sin(kx - \omega t) \tag{II.7.61}$$

Der Druck ist dann nach Gleichung (II.7.47) gegeben durch

$$p - p_0 \approx \frac{A}{\kappa c}\sin(kx - \omega t) = A\rho_0 c\sin(kx - \omega t). \tag{II.7.62}$$

Wir sehen also, daß Druck- und Dichteschwankungen proportional zur Geschwindigkeit sind, wie man das für longitudinale Wellen erwartet.

Schallenergie

Abschließend wollen wir die Schallenergie bestimmen. Dazu müssen wir die Energiedichte (II.3.8)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\bar{\epsilon} \tag{II.7.63}$$

(mit der inneren Energie $\bar{\epsilon}$) aufteilen in die Energie der ruhenden Flüssigkeit und die Schallenergie, die in der Schallbewegung steckt.
Im folgenden bezeichnen wir die Anteile, die unabhängig vom Schall vorliegen, mit ρ_0 und $\bar{\epsilon}_0$ und die Zusatzenergie bzw. -dichte mit $\bar{\epsilon}' := \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_0$ und $\rho' := \rho - \rho_0$. Die Geschwindigkeit v brauchen wir nicht aufzuspalten, da die Flüssigkeit als Ganzes ruhen soll. Somit ist v alleine durch den Schall bedingt.
Wir entwickeln nun die Energiedichte bis zur zweiten Ordnung:

$$\varepsilon \approx \rho_0\bar{\epsilon}_0 + \rho' \frac{\partial(\rho\bar{\epsilon})}{\partial\rho}\bigg|_{\rho_0} + \frac{\rho'^2}{2}\frac{\partial^2(\rho\bar{\epsilon})}{\partial\rho^2}\bigg|_{\rho_0} + \frac{\rho_0 v^2}{2}. \tag{II.7.64}$$

Der erste Term $\varepsilon_0 := \rho_0\bar{\epsilon}_0$ ist die Energiedichte der ruhenden Flüssigkeit. Man beachte, daß der Term $\frac{\rho' v^2}{2}$ nicht auftaucht, da er von 3. Ordnung ist.
Die Vorgänge in Schallwellen laufen in guter Näherung adiabatisch ab. Daher sind die Ableitungen bei konstanter Entropie S zu bilden. Es gilt:

$$\left(\frac{\partial(\rho\bar{\epsilon})}{\partial\rho}\right)_S = \bar{\epsilon} + \frac{p}{\rho} = w \tag{II.7.65}$$

mit der Enthalpie w und deshalb

$$\left(\frac{\partial^2(\rho\bar{\epsilon})}{\partial\rho^2}\right)_S = \left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)_S = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_S\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{\kappa\rho}\bigg|_{\rho_0} = \frac{c^2}{\rho_0}. \tag{II.7.66}$$

Damit nimmt die Energiedichte die Form

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \rho' w_0 + \varepsilon' \tag{II.7.67}$$

mit

$$\varepsilon' := \frac{c^2}{2\rho_0}\rho'^2 + \frac{\rho_0 v^2}{2} \tag{II.7.68}$$

(mit $w_0 = w|_{\rho_0}$) an.
Wir betrachten nun die Gesamtenergie

$$E = \int \varepsilon dV = \int \varepsilon_0 dV + \int w_0\rho' dV + \int \varepsilon' dV =: E_0 + \int w_0\rho' dV + E'. \tag{II.7.69}$$

Das Integral $\int w_0\rho' dV$ beinhaltet die Energieänderung durch die Massenänderung in den Flüssigkeitsvolumina. Da der damit verbundene Energietransport nur im Inneren der Flüssigkeit stattfindet, folgt

$$\int w_0\rho' dV = w_0 \int \rho' dV = 0, \tag{II.7.70}$$

da w_0 konstant ist und die Gesamtmenge der Flüssigkeit unverändert bleibt, d.h. $\int \rho dV = \int \rho_0 dV$. Somit ist die Gesamtenergie gegeben durch

$$E = E_0 + E'. \tag{II.7.71}$$

Da E_0 die Energie der ruhenden Flüssigkeit ist, können wir E' als Energie des Schallfeldes, d.h. als *Schallenergie*, interpretieren. Somit ist die Energiedichte des Schallfeldes durch (II.7.68) bestimmt.
Um den zugehörigen Energiestrom abzuleiten, betrachten wir ein Teilvolumen der Flüssigkeit und den mittleren Energiestrom durch seine Oberfläche. Nach (II.3.13) haben wir (bei verschwindenden äußeren Kräften)

$$\mathbf{S} = \rho\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\mathbf{v}. \tag{II.7.72}$$

Diesen Ausdruck entwickeln wir wieder bis zur 2. Ordnung:

$$\mathbf{S} \approx w_0\rho\mathbf{v} + p'\mathbf{v} =: w_0\rho\mathbf{v} + \mathbf{S}', \tag{II.7.73}$$

wobei $w = w_0 + w'$ und, für kleine Enthalpieänderungen,

$$w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_S p' = \frac{p'}{\rho} \tag{II.7.74}$$

verwendet wurde. Damit lautet die Kontinuitätsgleichung für die Energie

$$0 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S}' + \left(\frac{\partial(w_0\rho')}{\partial t} + \nabla\cdot(w_0\rho'\mathbf{v})\right). \tag{II.7.75}$$

Der letzte Term verschwindet, da w_0 konstant ist, auf Grund der Kontinuitätsgleichung für die Masse. Damit können wir

$$\mathbf{S}' = p'\mathbf{v} \tag{II.7.76}$$

als Energiestromdichte des Schallfeldes interpretieren und haben die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S}' = 0, \tag{II.7.77}$$

da die Energiedichte ε_0 der ruhenden Flüssigkeit zeitlich konstant ist.

Kapitel III

Zähe Flüssigkeiten

Bisher haben wir die Auswirkungen von Energiedissipation auf Strömungen vernachlässigt. Diese kann zwei verschiedene Ursachen haben: innere Reibung (Zähigkeit) oder Wärmeleitung. Letztere wird auch im folgenden nicht betrachtet und später noch genauer untersucht. Im folgenden werden wir uns auf den Einfluß der Zähigkeit beschränken. Sie führt zur Energiedissipation und hat damit die thermodynamische Irreversibilität der Strömung zur Folge.

III.1 Bewegungsgleichung für zähe Flüssigkeiten

Für ideale Flüssigkeiten hatten wir die Euler-Gleichung und die Kontinuitätsgleichung als grundlegende Beziehungen erkannt. Erstere wird im folgenden zu modifizieren sein um die Auswirkungen der Zähigkeit zu berücksichtigen. Die Kontinuitätsgleichung (I.3.6) spiegelt dagegen die Massenerhaltung wider und bleibt somit auch für zähe Flüssigkeiten unverändert gültig.
Die Euler-Gleichung muß aber um zusätzliche Glieder erweitert werden, da die mechanische Bewegung eines Flüssigkeitselementes neben den bei idealen Flüssigkeiten auftretenden Kräften auch von Reibungskräften beeinflußt wird.
Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Euler-Gleichung in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_j) = -\frac{\partial \Pi_{jk}}{\partial x_k} \tag{III.1.1}$$

(siehe Gleichung (II.3.20)), wobei wir im folgenden erst einmal annehmen, daß keine zusätzliche äußere Kraft wirkt ($\mathbf{f} = 0$). Der Tensor der Impulsstromdichte

$$\Pi_{jk} = p\delta_{jk} + \rho\, v_j v_k \tag{III.1.2}$$

charakterisiert nur den Impulsstrom für rein reversible Impulsübertragungen auf Grund der mechanischen Fortbewegung der Flüssigkeitselemente und der wirkenden Druckkräfte.
Die Zähigkeit oder innere Reibung bewirkt einen zusätzlichen Impulsübertrag, der irreversibel ist. Dieser Übertrag wirkt von einem Ort größerer zu einem Ort kleinerer Geschwindigkeit. Dies erfassen wir durch einen Zusatzterm σ'_{jk} zum Impulsstrom, so daß

$$\Pi_{jk} = -\sigma_{jk} + \rho\, v_j v_k \tag{III.1.3}$$

mit dem *Spannungstensor*

$$\sigma_{jk} = -p\delta_{jk} + \sigma'_{jk}. \tag{III.1.4}$$

Dabei heißt σ'_{jk} als *zäher Spannungstensor* oder *Reibungstensor*. σ_{jk} ist der Teil des Impulsstromes, der nicht mit dem unmittelbaren Transport des Impulses gemeinsam mit der Masse der bewegten Flüssigkeit zusammenhängt. Man beachte, daß evtl. die Definition des Druckes modifiziert werden muß, wenn σ'_{jk} einen nichtverschwindenden Diagonalanteil σ'_{jj} besitzt.
Wir wollen nun die allgemeine Gestalt von σ'_{jk} bestimmen, falls wir es mit einer isotropen Flüssigkeit zu tun haben, in der keine Raumrichtung ausgezeichnet ist. Hierzu macht man sich zunächst klar, daß sich die Zähigkeit nur dann bemerkbar macht, wenn sich verschiedene Flüssigkeitselemente relativ zueinander bewegen, also z.B. an der Grenzfläche zwischen schnelleren und langsameren Schichten. Somit sollte der Reibungstensor nur von der räumlichen Änderung $\frac{\partial v_j}{\partial x_k}$ abhängen. Sind die auftretenden Geschwindigkeitsgradienten nicht zu groß, so erwartet man ferner, daß σ'_{jk} nur von den ersten Ableitungen der Geschwindigkeiten abhängt und in diesen linear ist. Konstante Terme treten auch nicht auf, da $\sigma'_{jk} = 0$ sein sollte, falls $\mathbf{v} = 0$ ist. Weiterhin sollte der Reibungstensor verschwinden, falls die Flüssigkeit als Ganzes eine gleichförmige Rotation ausführt. In diesem Fall ist das Geschwindigkeitsfeld durch

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \tag{III.1.5}$$

gegeben. Für ein solches Feld verschwinden die symmetrischen Ableitungen

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = 0. \tag{III.1.6}$$

Somit erwarten wir, daß σ'_{jk} nur von diesen symmetrischen Kombinationen abhängt. Der allgemeinste Tensor 2. Stufe, der alle obigen Bedingungen erfüllt, hat die Gestalt

$$\sigma'_{jk} = \eta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{jk} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \tag{III.1.7}$$

Man beachte, daß wir wieder die Summationskonvention benutzen, d.h. über die Variable l ist zu summieren und somit $\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \operatorname{div} \mathbf{v}$. Die Koeffizienten η, ζ heißen auch *Zähigkeitskoeffizienten*[1]. Sie sind unabhängig von $\mathbf{v}$, können aber Funktionen von Druck und Temperatur sein. Da wir eine isotrope Flüssigkeit betrachten wollen, sind die freien Parameter skalare Größen. Wir werden später noch sehen, daß $\eta, \zeta \geq 0$ sein müssen. Die Aufteilung in (III.1.7) wurde so vorgenommen, daß die Spur des Anteils in der Klammer verschwindet.
Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_j v_k) &= v_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) \right) + \rho \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \\ &= \rho \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right), \end{aligned} \tag{III.1.8}$$

wobei der erste Term auf Grund der Kontinuitätsgleichung verschwindet, lautet die *Verallgemeinerte Euler-Gleichung für zähe Flüssigkeiten*

[1] ζ bezeichnet man auch als *zweite Zähigkeit*.

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial v_j}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right\} \qquad \text{(III.1.9)}}$$

Man beachte, daß die Zähigkeitskoeffizienten von Druck und Temperatur abhängen und somit u.U. auch räumlich variieren können.

III.2 Navier-Stokes-Gleichung

Oftmals können die Zähigkeitskoeffizienten als konstant angesehen werden. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma'_{jk}}{\partial x_k} &= \eta\left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k^2}+\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j\partial x_k}-\frac{2}{3}\frac{\partial^2 v_l}{\partial x_j\partial x_l}\right)+\zeta\frac{\partial^2 v_l}{\partial x_j\partial x_l}\\ &= \eta\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k^2}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial v_l}{\partial x_l},\end{aligned} \qquad \text{(III.2.1)}$$

wobei über den Index k zu summieren ist, und (III.1.9) vereinfacht sich zu

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right)=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}). \qquad \text{(III.2.2)}}$$

Diese verallgemeinerte Euler-Gleichung für zähe Flüssigkeiten heißt auch *Navier-Stokes-Gleichung*. Für den Fall konservativer äußerer Kräfte mit einem Potential u ist der Druck p durch $p+u$ zu ersetzen.
Speziell für inkompressible Flüssigkeiten ist $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$ und somit erhält man die *Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten*

$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}. \qquad \text{(III.2.3)}}$$

Der Spannungstensor hat in diesem Fall die Form

$$\sigma_{jk}=-p\delta_{jk}+\eta\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right). \qquad \text{(III.2.4)}$$

Inkompressible Flüssigkeiten werden daher durch nur einen Zähigkeitskoeffizienten charakterisiert. Allgemein bezeichnet man η auch als *Koeffizient der Scherungsviskosität* [2] und ζ als *Koeffizient der Volumenviskosität bzw. Kompressionsviskosität*. Im inkompressiblen Fall wird das Verhalten durch die sog. *kinematische Zähigkeit* $\nu := \frac{\eta}{\rho}$ alleine bestimmt. Im Gegensatz dazu bezeichnet man η auch als *dynamische Zähigkeit Viskosität*. Die folgende Tabelle enthält einige Zahlenbeispiele für die Zähigkeitskoeffizienten:

[2] Deshalb ist η der Koeffizient des spurfreien Anteils des Spannungstensors.

	η [kg/m·s]	ν [10^{-5} m^2/s]
Wasser	0.0010	0.10
Luft	$1.8{\cdot}10^{-5}$	1.5
Alkohol	0.0018	0.22
Glyzerin	0.85	68
Quecksilber	0.00156	0.012

Wie im Fall der Euler-Gleichung können wir den Druck aus der Navier-Stokes-Gleichung (III.2.3) eliminieren. Hierzu verwenden wir wieder die Identität $\Delta\mathbf{v} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})$ und erhalten zunächst

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\frac{v^2}{2} - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}), \tag{III.2.5}$$

woraus nach Bildung der Rotation folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) - \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) = -\nu\,\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})). \tag{III.2.6}$$

Diese Gleichung enthält nur noch das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$. Ist es bekannt, so kann man den zugehörigen Druck bestimmen. Dazu bildet man die Divergenz der Navier-Stokes-Gleichung (III.2.3) und erhalten so eine Poisson-Gleichung

$$\Delta p = -\rho\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \tag{III.2.7}$$

für den Druck p.
Die Strömung einer zähen Flüssigkeit ist also durch die Navier-Stokes-Gleichung und die Kontinuitätsgleichung bestimmt. Zusätzlich müssen noch Randbedingungen angegeben werden. Diese wollen wir jetzt genauer untersuchen.

III.2.1 Randbedingungen

(i) Feste Oberflächen

Zwischen einer festen Oberfläche und den Molekülen der zähen Flüssigkeit wirken molekulare Anziehungskräfte. Unmittelbar an der Wand wird die Flüssigkeit daher festgehalten, sie bleibt praktisch ‘kleben’. Die zugehörige Randbedingung ist

$$\mathbf{v}|_{\mathrm{Wand}} = 0. \tag{III.2.8}$$

Man beachte, daß wir im Falle idealer Flüssigkeiten bei der Euler-Gleichung nur $v_n = 0$ gefordert hatten, d.h. das Verschwinden der Normalkomponente des Geschwindigkeitsfeldes unmittelbar an der Wand. Da die Euler-Gleichung nur von 1. Ordnung ist, kann man nicht zusätzlich auch das Verschwinden der tangentialen Komponente $\mathbf{v}_t = 0$ fordern.

Für den Fall einer bewegten Oberfläche müssen an der Wand die Geschwindigkeiten von Oberfläche und Flüssigkeit übereinstimmen.
Wir wollen noch für spätere Anwendungen die Kraft bestimmen, die die Flüssigkeit auf die Oberfläche ausübt. Die Kraft auf ein Oberflächenelement $d\mathbf{F}$ ist gerade gleich dem Impulsstrom $\Pi_{jk} dF_k = (\rho v_j v_k - \sigma_{jk}) dF_k$ durch $d\mathbf{F}$. Ist $\mathbf{n}$ der Einheitsvektor bzgl. der äußeren Normale der Flüssigkeit (also der inneren Normale der Oberfläche), so ist $d\mathbf{F} = \mathbf{n} dF$. Mit $\mathbf{v} = 0$ ergibt sich dann für die Kraft pro Flächeneinheit

$$P_j = -\sigma_{jk} n_k = p n_j - \sigma'_{jk} n_k. \qquad \text{(III.2.9)}$$

Der erste Term stammt von den Druckkräften, der zweite beschreibt die durch die Zähigkeit ausgeübte Reibungskraft.

(ii) Grenzflächen von nichtmischbaren Flüssigkeiten

An der Grenzfläche zweier nichtmischbarer Flüssigkeiten oder eines Flüssigkeit und eines Gases sind die Geschwindigkeiten der beiden Fluide gleich. Die Kräfte, mit der sie aufeinander wirken, sind betraglich gleich und entgegengesetzt:

$$n_k^{(1)} \sigma_{jk}^{(1)} + n_k^{(2)} \sigma_{jk}^{(2)} = 0 \qquad \text{(III.2.10)}$$

bzw. mit $\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)} =: \mathbf{n}$ und unter Beachtung der Symmetrie des Tensors σ_{jk},

$$n_j \sigma_{jk}^{(1)} = n_j \sigma_{jk}^{(2)}. \qquad \text{(III.2.11)}$$

(iii) Freie Oberflächen

An freien Oberflächen muß der durchtretende Impulsstrom verschwinden:

$$\sigma_{jk} n_k = \sigma'_{jk} n_k - p n_j = 0. \qquad \text{(III.2.12)}$$

III.3 Rohrströmungen

Im folgenden wollen wir verschiedene stationäre Strömungstypen einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit genauer untersuchen. Dabei gehen wir von einer *laminaren Strömung* aus. Diese wird auch als *Schichtströmung* bezeichnet, da sich die Flüssigkeit so bewegt, als ob Schichten verschiedener Geschwindigkeiten aneinander vorbei gleiten. Dies ist z.B. für turbulente Strömungen nicht mehr erfüllt.

III.3.1 Strömung zwischen zwei Platten

Bewegte Platten

Zunächst betrachten wir die Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten. Die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{u}$ der beiden Platten sei konstant, ihr Abstand h (Abb. III.3.1). Die

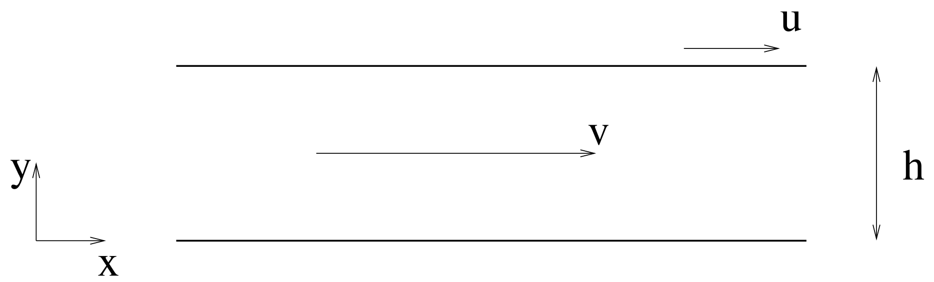

Abbildung III.3.1: Zwei parallele Platten, die sich mit der Relativgeschwindigkeit **u** zueinander bewegen.

stationäre Navier-Stokes-Gleichung lautet dann

$$\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v}. \tag{III.3.1}$$

Auf Grund der Symmetrien des Problems erwarten wir, daß das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ in x-Richtung zeigt und nur von der y-Koordinate abhängt, also $\mathbf{v} = v(y)\mathbf{e}_x$. Ebenso wird der Druck nur von y abhängen, $p = p(y)$.
Die Kontinuitätsgleichung reduziert sich für inkompressible Flüssigkeiten zu div $\mathbf{v} = 0$. Da $\mathbf{v}$ in x-Richtung zeigt, vereinfacht sich dies zu

$$0 = \text{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \tag{III.3.2}$$

womit die die Kontinuitätsgleichung wegen $\mathbf{v} = \mathbf{v}(y)$ identisch erfüllt ist.
Auch die Navier-Stokes-Gleichung vereinfacht sich in ähnlicher Weise. Wegen $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \left(v\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{v} = 0$ folgt zunächst

$$0 = -\frac{dp}{dy}\mathbf{e}_y + \eta\Delta v\;\mathbf{e}_x \tag{III.3.3}$$

und somit schließlich

$$\frac{dp}{dy} = 0, \qquad \frac{d^2v}{dy^2} = 0. \tag{III.3.4}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind offensichtlich $p = const.$ und $v = ay + b$. Mit den Randbedingungen $v(y = 0) = 0$ und $v(y = h) = u$ können wir die Konstanten bestimmen und finden die lineare Geschwindigkeitsverteilung

$$v(y) = \frac{y}{h}u. \tag{III.3.5}$$

Die mittlere Geschwindigkeit der Strömung ist

$$\bar{v} = \frac{1}{h}\int_0^h v dy = \frac{u}{2}. \tag{III.3.6}$$

Der Reibungstensor hat die Form

$$\sigma'_{jk} = \eta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) = \eta \frac{dv}{dy} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{III.3.7}$$

Die Normalkomponente P_n der auf die Ebene wirkenden Kraft (bzw. der Druck) ist

$$P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_y = -\sigma_{yk} n_k = p, \tag{III.3.8}$$

also gerade der Druck der Flüssigkeit. Die tangentiale Reibungskraft P_t in der Ebene $y = 0$ ergibt sich mit $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$ zu

$$P_t = \sigma_{xy} = \eta \frac{dv}{dy} = \frac{\eta u}{h}. \tag{III.3.9}$$

Unbewegte Platten mit Druckgradient

Als Nächstes betrachten wir eine ähnliche Situation, bei der allerdings beide Platten ruhen. Damit ein Flüssigkeitsstrom existiert, nehmen wir die Existenz eines Druckunterschiedes zwischen den Enden der Platten an.
In diesem Falle folgt aus den Symmetrien, daß $\mathbf{v} = v(y)\mathbf{e}_x$ und $p = p(x, y)$ ist. Die Navier-Stokes-Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{III.3.10}$$

Damit ist der Druck unabhängig von y und somit konstant über die Dicke der der Flüssigkeitsschicht zwischen den Ebenen. Es verbleibt die Gleichung

$$\frac{d^2 v}{dy^2}(y) = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx}(x). \tag{III.3.11}$$

Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen. Somit folgt

$$\frac{dp}{dx} = const., \tag{III.3.12}$$

d.h. der Druck ist eine lineare Funktion von x. Außerdem ist

$$v = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y^2 + ay + b. \tag{III.3.13}$$

Die Randbedingungen $v(y = 0) = v(y = h) = 0$ erlauben die Bestimmung der Konstanten:

$$v = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y(y - h). \tag{III.3.14}$$

Quer zur Bewegungsrichtung findet man also eine parabolische Abhängigkeit der Geschwindigkeit, die in der Mitte $y = \frac{h}{2}$ maximal ist. Die mittlere Geschwindigkeit ist

$$\bar{v} = -\frac{h^2}{12\eta}\frac{dp}{dx}. \tag{III.3.15}$$

Für die Reibungskraft ergibt sich

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}, \tag{III.3.16}$$

unabhängig von η.

III.3.2 Strömung durch ein Rohr

Wir betrachten nun stationäre Strömungen durch ein Rohr. Der Rohrquerschnitt sei zunächst beliebig, aber fest. Die x-Richtung wählen wir parallel zur Rohrachse. Die Länge des Rohres sei l.
Auf Grund der Symmetrien ist $\mathbf{v} = v(y,z)\mathbf{e}_x$. Aus den y- und z-Komponenten der Navier-Stokes-Gleichung folgern wir

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{III.3.17}$$

Somit ist der Druck über den Querschnitt konstant, d.h. $p = p(x)$.
Die x-Komponente der Navier-Stokes-Gleichung lautet

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp(x)}{dx}. \tag{III.3.18}$$

Hierbei handelt es sich wieder um eine Gleichung mit getrennten Variablen. Für den Druck folgt

$$\frac{dp}{dx} = const = \frac{\Delta p}{l}, \tag{III.3.19}$$

wobei Δp die Druckdifferenz zwischen den Enden des Rohres ist. Die Geschwindigkeitsverteilung wird durch die zweidimensionale Poisson-Gleichung $\Delta v = const.$ mit der Randbedingung $v = 0$ am Rande des Rohrquerschnitts bestimmt.
Im folgenden betrachten wir nun ein Rohr mit einem kreisförmigen Querschnitt. In Zylinderkoordinaten ist dann $v = v(r)$ und

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}. \tag{III.3.20}$$

Durch Integration erhalten wir das Geschwindigkeitsfeld

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + a\ln r + b. \tag{III.3.21}$$

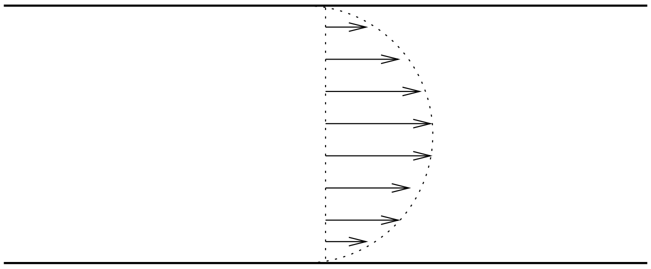

Abbildung III.3.2: Geschwindigkeitsprofil einer stationären Strömung durch ein zylindrisches Rohr.

Da die Geschwindigkeit überall endlich sein muß, ist $a = 0$. Am Rand ist $v(r = R) = 0$ und somit erhalten wir das parabolische Geschwindigkeitsprofil (siehe Abb. III.3.2)

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right). \tag{III.3.22}$$

Die *Stromstärke* Q (oder auch *Durchfluß*) ist die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch den Querschnitt fließt. Im vorliegenden Fall gilt

$$Q = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} = 2\pi \int_0^R Rv dr \tag{III.3.23}$$

oder explizit

$$\boxed{Q = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4. \qquad \text{(III.3.24)}}$$

Dies ist das *Hagen-Poiseuille'sche Gesetz*. Den Massendurchfluß $\tilde{Q}$ erhält man (für inkompressible Flüssigkeiten) durch $\tilde{Q} = \rho Q$. Für ihn gilt ebenfalls das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz mit der Ersetzung[3] $\eta \to \nu$.

Das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz bricht zusammen, wenn die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ einen kritischen Wert v_c überschreitet, bei dem ein Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung stattfindet. Statt paralleler Stromlinien sind diese dann auf Grund von Verwirbelungen i.a. verschlungen.

Für diesen Übergang gibt es ein einfaches Kriterium, das auf der sog. *Reynolds-Zahl*[4]

$$Re := \frac{\rho v l}{\eta} = \frac{vl}{\nu} \tag{III.3.25}$$

basiert. Das *Reynolds'sche Turbulenzkriterium* besagt dann, daß eine Strömung turbulent wird, falls

$$Re > Re_c, \tag{III.3.26}$$

wobei die kritische Reynolds-Zahl Re_c von der Geometrie abhängt. Für eine Kreisröhre ist z.B. $Re_c \approx 1160$.

[3] Deshalb muß man in der Literatur immer aufpassen, ob das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz auf das Volumen oder die Masse bezogen wird!

[4] Diese werden wir später in Abschnitt III.4 noch genauer diskutieren.

III.3.3 Strömung zwischen rotierenden Zylindern

Als nächstes Beispiel betrachten wir die Strömung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit zwischen zwei rotierenden Zylindern. Der innere Zylinder habe den Radius R_1 und rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1, der äußere Zylinder vom Radius R_2 rotiert mit ω_2.
Auf Grund der Symmetrien erwarten wir, daß in Zylinderkoordinaten gilt:

$$v_z = v_r = 0, \qquad v_\varphi = v(r), \qquad p = p(r). \tag{III.3.27}$$

Hiermit ist die Kontinuitätsgleichung div $\mathbf{v} = 0$ wieder identisch erfüllt.
Im folgenden werden wir die Terme, die in der Navier-Stokes-Gleichung auftreten, separat mit Hilfe bekannter Identitäten der Vektoranalysis untersuchen. Zunächst sei an die schon mehrfach benutzte Identität $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \mathbf{v}\times \text{rot }\mathbf{v}$ erinnert. Außerdem gilt $\Delta\mathbf{v} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}) = -\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})$, wobei wir die Kontinuitätsgleichung $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ ausgenutzt haben. In Zylinderkoordinaten gilt für Funktionen, die nur von der radialen Koordinate abhängen

$$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr}\mathbf{e}_z, \qquad \frac{1}{2}\nabla v^2 = v\frac{dv}{dr}\mathbf{e}_r \tag{III.3.28}$$

und deshalb

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}) = -\left(\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2}\right)\mathbf{e}_\varphi, \qquad \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = \left(v\frac{dv}{dr} + \frac{v^2}{r}\right)\mathbf{e}_r. \tag{III.3.29}$$

Damit ergibt sich für den Konvektionsterm

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_r \tag{III.3.30}$$

und den Laplace-Anteil

$$\Delta\mathbf{v} = \left(\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2}\right)\mathbf{e}_\varphi. \tag{III.3.31}$$

Die Navier-Stokes-Gleichung lautet also für das vorliegende Problem

$$-\rho\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_r = -\frac{dp}{dr}\mathbf{e}_r + \eta\left(\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2}\right)\mathbf{e}_\varphi \tag{III.3.32}$$

bzw.

$$\frac{dp}{dr} = \rho\frac{v^2}{r}, \qquad \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0. \tag{III.3.33}$$

Die zweite Gleichung hat Lösungen der Form $v(r) = r^n$. Einsetzen ergibt $n = \pm 1$, d.h.

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r}. \tag{III.3.34}$$

An den Zylinderwänden bewegt sich die Flüssigkeit genauso schnell wie der Zylinder. Die entsprechenden Randbedingungen $v(R_j) = \omega R_j$ erlauben die Festlegung der Konstanten:

$$A = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \qquad B = \frac{(\omega_1 - \omega_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{III.3.35}$$

Hier können wir einige Spezialfälle diskutieren. Rotieren die Zylinder mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\omega := \omega_1 = \omega_2$, so ist $A = \omega$ und $B = 0$. Dann ist $v = \omega r$, d.h. die Flüssigkeit rotiert starr mit den Zylindern. Das gleiche Verhalten beobachtet man für eine Flüssigkeit in einem Zylinder, d.h. für $R_1 = 0$ und $\omega := \omega_2$. Für eine unbegrenzte Flüssigkeit ohne äußere Umrandung ($R_2 \to \infty$) ergibt sich $A = 0$ und $B = \omega_1 R_1^2$. Dann ist das Geschwindigkeitsfeld durch $v = \frac{\omega_1 R_1^2}{r}$ gegeben.
Als nächstes bestimmen wir aus der ersten Gleichung in (III.3.33) die Druckverteilung:

$$p = \rho \left(\frac{A^2}{2} \left(r^2 - R_1^2 \right) + AB \ln \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 - \frac{B^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right) + p_1, \tag{III.3.36}$$

wobei p_1 den Druck am inneren Zylinder bezeichnet.
Die tangentiale Komponente der Reibungskraft (pro Fläche) ist durch

$$\sigma'_{r\varphi}\big|_{r=R_1} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)\bigg|_{r=R_1} = -2\eta \frac{(\omega_1 - \omega_2) R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{III.3.37}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß die Komponente des Zähigkeitstensors in Zylinderkoordinaten allgemein durch[5]

$$\sigma'_{r\varphi} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \tag{III.3.38}$$

gegeben ist.
Das Drehmoment, daß durch die Reibung auf den inneren Zylinder ausgeübt wird, ist durch die tangentiale Komponente der Kraft bestimmt:

$$M_1 = \left(\sigma'_{r\varphi}\big|_{r=R_1} \right) R_1 \cdot 2\pi R_1 = -\frac{4\eta(\omega_1 - \omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{III.3.39}$$

Der erste Faktor ist dabei das Drehmoment pro Längeneinheit, der zweite der Umfang des Zylinders. Das Drehmoment M_2 auf den äußeren Zylinder ist durch $M_2 = -M_1$ gegeben.

Zum Abschluß wollen wir noch einige allgemeine Bemerkungen zu den betrachteten Beispielen machen. Bei allen exakten Lösungen in diesem Abschnitt verschwindet die Nichtlinearität $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, so daß wir letztlich immer nur ein lineares Problem lösen mußten. Die erhaltenen stationären Geschwindigkeitsverteilungen erfüllen auch die Bewegungsgleichung für *ideale* inkompressible Flüssigkeiten, also die Euler-Gleichung, denn die Lösungen für $\mathbf{v}$ enthalten die Zähigkeit η gar nicht. Diese tritt bei den untersuchten Problemen nur beim Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und dem Druckgradienten auf. Das zeigt, daß bei Strömungen von zähen Flüssigkeiten die Existenz eines Druckgradienten wesentlich ist. Eine ideale Flüssigkeit kann auch ohne Druckgradienten durch ein Rohr strömen.

[5] Eine Zusammenstellung der relevanten Ausdrücke in verschiedenen Koordinatensystemen findet man in dem Buch von Landau und Lifshitz [1].

III.4 Das Ähnlichkeitsgesetz

Im folgenden wollen wir mit Hilfe von Dimensionsbetrachtungen das Verhalten von Flüssigkeiten charakterisieren. Dazu betrachten wir eine stationäre Strömung einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit.
Etwas konkreter betrachten wir die Strömung um einen festen Körper, wobei die (asymptotische) Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ der Flüssigkeit konstant sein soll. Alternativ können wir wieder in ein Bezugssystem wechseln, in dem die Flüssigkeit asymptotisch ruht und der Körper sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ bewegt. Wir wollen nun untersuchen, von welchen Parametern bzw. Parameterkombinationen die Lösung der Navier-Stokes-Gleichung abhängen wird. Als Parameter der Flüssigkeit tritt in der Navier-Stokes-Gleichung (neben der Dichte) nur die kinematische Zähigkeit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ auf. Zu bestimmen sind die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ und der Druck p bzw. $\frac{p}{\rho}$. Die Strömung hängt über die Randbedingungen von Gestalt und Abmessungen des bewegten Körpers und dessen Geschwindigkeit ab. Ist die Gestalt[6] vorgegeben, so sind die Abmessungen durch Angabe einer beliebigen Länge l eindeutig bestimmt. Somit ist jeder Strömungstyp durch die drei Parameter ν, u und l bestimmt. Deren Dimensionen sind $[\nu]$ =m²/s, $[u]$ =m/s und $[l]$ =m. Somit gibt es genau eine dimensionslose Kombination dieser drei Parameter, nämlich die *Reynolds-Zahl*

$$\boxed{Re = \frac{ul}{\nu} = \frac{\rho u l}{\eta} \qquad \text{(III.4.1)}}$$

Dies können wir auch etwas formaler durch den Übergang zu dimensionslosen Größen

$$\mathbf{r}' := \frac{\mathbf{r}}{l}, \quad \mathbf{v}' := \frac{\mathbf{v}'}{u}, \quad t' := \frac{u}{l}t, \quad \nabla' := l\nabla, \quad p' := \frac{p}{u^2\rho}. \tag{III.4.2}$$

in der Navier-Stokes-Gleichung begründen. In diesen dimensionslosen Variablen geht sie nämlich über in

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla')\mathbf{v}' = -\nabla' p' + \frac{1}{Re}\Delta' \mathbf{v}' \qquad \text{(III.4.3)}}$$

Offensichtlich ist für ideale Flüssigkeiten $Re = \infty$. Da für zähe Flüssigkeiten die Reynolds-Zahl die einzige dimensionslose Parameterkombination ist, muß jeder andere dimensionslose Parameter eine Funktion von Re sein. Also folgt z.B.

$$\frac{\mathbf{v}}{u} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, Re\right). \tag{III.4.4}$$

Dies bedeutet, daß für zwei Strömungen gleichen Typs (z.B. von Flüssigkeiten verschiedener Zähigkeiten um Kugeln mit unterschiedlichen Radien) die dimensionslosen Geschwindigkeiten $\frac{\mathbf{v}}{u}$ dieselben Funktionen des Verhältnisses $\frac{\mathbf{r}}{l}$ sind, wenn nur ihre Reynolds-Zahlen identisch sind. Allgemein spricht man von *ähnlichen Strömungen*, wenn sie durch einfache Maßstabsänderungen für die Koordinaten und Geschwindigkeiten ineinander übergehen. Damit kann man nun das *Ähnlichkeitsgesetz* (O. Reynolds, 1883) folgendermaßen formulieren:

[6] Zwei Körper haben die gleiche Gestalt, wenn sie geometrisch ähnlich sind, z.B. zwei Ellipsen mit dem gleichen Verhältnis der Halbachsen.

$$\boxed{\text{Strömungen gleichen Typs mit der gleichen Reynolds-Zahl sind ähnlich!} \qquad \text{(III.4.5)}}$$

Das Ähnlichkeitsgesetz ist die Grundlage vieler Windkanaluntersuchungen mit verkleinerten Modellen. Die erzielten Ergebnissen lassen sich sofort übertragen, wenn die Reynolds-Zahl durch Variation von u oder η geeignet eingestellt wird. Aber z.B. bei Flugzeugen dürfen die Modelle nicht zu klein werden, denn die notwendigen Strömungsgeschwindigkeiten werden dann größer als die Schallgeschwindigkeit.
Analoge Überlegungen kann man für die Druckverteilung anstellen, für die z.B. gilt[7]

$$\frac{p}{\rho u^2} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, Re\right). \qquad \text{(III.4.6)}$$

All Größen, die die Strömung charakterisieren, aber keine Funktion der Koordinaten mehr sind, hängen nur von der Reynolds-Zahl ab. Z.B. gilt für die Widerstandskraft F auf den Körper

$$F = \rho u^2 l^2 f(Re). \qquad \text{(III.4.7)}$$

Dies schreibt man oft auch in der Form

$$F = c_w \frac{\rho}{2} u^2 A, \qquad \text{(III.4.8)}$$

wobei A die Fläche senkrecht zu μ ist. Der sog. *Widerstandsbeiwert* c_w hängt dabei nur von der Reynolds-Zahl ab: $c_w = g(Re)$.
Bei Problemen, in in denen die Schwerkraft eine Rolle spielt, haben wir es mit vier relevanten Parametern ν, u, l und g zu tun. Neben der Reynolds-Zahl existiert ein weiterer dimensionsloser Parameter, die sog. *Froude-Zahl*

$$\boxed{Fr = \frac{u^2}{lg}. \qquad \text{(III.4.9)}}$$

Strömungen sind dann ähnlich, wenn ihre Reynolds- und Froude-Zahlen übereinstimmen.
Bei nichtstationären Strömungen existiert neben den drei Parametern ν, u, l noch eine charakteristische Zeit τ, die die zeitlichen Änderungen beschreibt. Dies kann z.B. die Schwingungsdauer eines eingetauchten Körpers sein. In diesem Fall definiert man die *Strouhal-Zahl*

$$\boxed{St = \frac{u\tau}{l} \qquad \text{(III.4.10)}}$$

und zwei Strömungen sind ähnlich, wenn ihre Reynolds- und Strouhal-Zahlen gleich sind. Dabei ist allerdings zu beachten, daß z.B. für den Fall, daß die Schwingungen in der Flüssigkeit selbst entstehen (und nicht durch eine externe Kraft) die Strouhal-Zahl selbst eine Funktion der Reynolds-Zahl wird, d.h. $St = f(Re)$.

[7] Die Funktion f wird sich natürlich i.a. von der in (III.4.4) unterscheiden!

III.5 Strömungen mit kleinen Reynolds-Zahlen

Im folgenden wollen wir Strömungen genauer untersuchen, die durch kleine Reynolds-Zahlen charakterisiert sind. Aus der dimensionslosen Form (III.4.3) der Navier-Stokes-Gleichung ersieht man, daß in diesem Fall der Term $\Delta'\mathbf{v}'$ dominiert. Wenn wir den Term ∇p behalten, weil Druckgradienten u.U. notwendig sind, um die Strömung aufrecht zu erhalten, erhalten wir für kleine Reynolds-Zahlen im stationären Fall die lineare Bewegungsgleichung

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \text{grad}\, p = 0, \tag{III.5.1}$$

die zusammen mit der Kontinuitätsgleichung div $\mathbf{v} = 0$ das Strömungsverhalten bestimmt. Eine nützliche Konsequenz, die wir später noch benutzen werden, ist

$$\Delta(\text{rot}\,\mathbf{v}) = 0, \tag{III.5.2}$$

was durch Bildung der Rotation der linearen Bewegungsgleichung folgt.

III.5.1 Geradlinig gleichförmige Bewegung einer Kugel: Die Stokes'sches Formel

Als Anwendung betrachten wir die geradlinig gleichförmige Bewegung einer Kugel. Das Problem ist äquivalent zur Umströmung einer festen Kugel mit vorgegebener Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{u}$ im Unendlichen. Man beachte, daß strenggenommen nur das Problem der ruhenden Kugel stationär ist, für die bewegte Kugel ändert sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeit auch zeitlich.
Zunächst einmal gilt div $(\mathbf{v} - \mathbf{u}) =$ div $\mathbf{v} = 0$. Daher können wir ein Vektorpotential $\mathbf{A}$ mit

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \text{rot}\,\mathbf{A} \tag{III.5.3}$$

einführen, wobei die Randbedingung rot $\mathbf{A} \to 0$ im Unendlichen zu erfüllen ist. Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in das Zentrum der Kugel und machen den Ansatz

$$\mathbf{A} = f'(r)\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{u}, \tag{III.5.4}$$

wobei f' die Ableitung einer geeignet zu bestimmenden Funktion f bezeichnet. Motiviert wird dieser Ansatz von der Tatsache, daß die zugrundeliegenden Gleichungen linear in $\mathbf{u}$ sind und wir dies deshalb auch für das Vektorpotential erwarten. Die Richtung von $\mathbf{u}$ ist die einzige ausgezeichnete Richtung des Problems. $\mathbf{A}$ muß ein axialer Vektor sein, damit rot $\mathbf{A}$ polar ist, wie die Geschwindigkeit.
Da $f'(r)\hat{\mathbf{r}} =$ grad $f(r)$ haben wir

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \text{rot}\,\left(\nabla f \times \mathbf{u}\right) = \mathbf{u} + \text{rot}\,\left(\text{rot}\,(f\mathbf{u})\right), \tag{III.5.5}$$

wobei im letzten Schritt die Konstanz von $\mathbf{u}$ ausgenutzt wurde, weshalb rot $(f\mathbf{u}) = \nabla f \times \mathbf{u}$ ist. Bilden wir die Rotation der Gleichung, so folgt

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = \text{rot}\,(\text{rot}\,(\text{rot}\,(f\mathbf{u}))) = (\text{grad div} - \Delta)\text{rot}\,(f\mathbf{u}) = -\Delta(\text{rot}\,(f\mathbf{u})) = -\Delta(\nabla f \times \mathbf{u}). \tag{III.5.6}$$

Auf Grund der früher schon abgeleiteten Beziehung (III.5.2) gilt

$$0 = \Delta(\Delta(\text{rot}\,\mathbf{v})) = -\Delta^2(\nabla f \times \mathbf{u}), \tag{III.5.7}$$

wobei im zweiten Schritt (III.5.6) benutzt wurde. Da $\mathbf{u}$ konstant ist, haben wir schließlich

$$\Delta^2(\text{grad}\, f) = 0 \tag{III.5.8}$$

oder

$$\Delta^2 f = const. \tag{III.5.9}$$

Die Konstante muß aber verschwinden, wenn $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ und alle seine Ableitungen im Unendlichen verschwinden. In Kugelkoordinaten gilt daher

$$0 = \Delta^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d(\Delta f)}{dr}\right) \tag{III.5.10}$$

und somit

$$\Delta f = \frac{2a}{r} + c, \tag{III.5.11}$$

wobei wieder mit dem gleichen Argument wie oben $c = 0$ sein muß. Deshalb erhalten wir schließlich explizit für die gesuchte Funktion

$$f(r) = ar + \frac{b}{r}. \tag{III.5.12}$$

Hierbei haben wir eine mögliche additive Konstante weggelassen, da $\mathbf{v}$ durch die Ableitung $f'(r)$ bestimmt ist.
Aus (III.5.5) erhalten wir dann explizit

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a\frac{\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}}{r} + b\frac{3(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{u}}{r^3}. \tag{III.5.13}$$

Die Randbedingung $\mathbf{v} = 0$ für $r = R$ liefert die Beziehung

$$\mathbf{u}\left(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3}\right) + \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{r}})\left(-\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3}\right) = 0. \tag{III.5.14}$$

Da die Richtung von $\hat{\mathbf{r}}$ beliebig sein kann, müssen beide Ausdrücke in den Klammern separat verschwinden. Dies liefert $a = \frac{3R}{4}$ und $b = \frac{R^3}{4}$ und somit

$$f = \frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4r} \tag{III.5.15}$$

und

$$\mathbf{v} = -\frac{3R}{4}\frac{\hat{\mathbf{r}} + (\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}}{r} - \frac{R^3}{4}\frac{\mathbf{u} - 3(\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}}{r^3} + \mathbf{u}. \tag{III.5.16}$$

Wir können die Komponenten der Geschwindigkeit auch in Kugelkoordinaten angeben:

$$v_r = u\cos\vartheta\left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right], \qquad v_\vartheta = -u\sin\vartheta\left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right]. \tag{III.5.17}$$

Den Druck bestimmen wir aus (III.5.1) mit Hilfe von (III.5.5):

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\, p &= \eta\Delta\mathbf{v} = \eta\Delta\mathrm{rot\ rot}\,(f\mathbf{u}) \\ &= \mathrm{grad}\,\left(\eta\Delta\mathrm{div}\,(f\mathbf{u})\right) \\ &= \mathrm{grad}\,\left(\eta\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\,(\Delta f)\right). \end{aligned} \tag{III.5.18}$$

Dabei haben wir, neben diversen Identitäten der Vektoranalysis, auch $\Delta^2 f = 0$ ausgenutzt. Durch Integration folgt nun mit (III.5.15)

$$p = \eta\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\,(\Delta f) + p_0 = p_0 - \frac{3\eta}{2}\frac{\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}R. \tag{III.5.19}$$

Es ist klar, daß die Widerstandskraft $\mathbf{F}$ auf die bewegte Kugel parallel zu $\mathbf{u}$ ist. Ihren Betrag bestimmen wir aus dem Druck $P_j = -\sigma_{jk}n_k$, indem wir die Kraftkomponenten senkrecht und parallel zur Oberfläche ausrechnen und auf die Richtung von $\mathbf{u}$ projizieren. Dies ergibt zunächst

$$F = \oint(-p\cos\vartheta + \sigma'_{rr}\cos\vartheta - \sigma'_{r\vartheta}\sin\vartheta)df. \tag{III.5.20}$$

Es ist klar, daß sich die Beiträge des Druckes kompensieren. Die anderen Beiträge können wir explizit unter Verwendung von (siehe auch [1])

$$\sigma'_{rr} = 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 0, \qquad \sigma'_{r\vartheta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r}\right)\bigg|_{r=R} = -\frac{3\eta}{2R}u\sin\vartheta \tag{III.5.21}$$

bestimmen, wobei wir (III.5.17) benutzt haben. Insgesamt ergibt sich dann zunächst $F = \frac{3\eta u}{2R}\oint df$ und schließlich

$$\boxed{F = 6\pi R\eta u. \qquad \text{(III.5.22)}}$$

Dies ist die *Stokes'sche Formel für den Strömungswiderstand*. Das $F \propto u, R$ ist aus Dimensionsgründen klar, da die Dichte nicht in der genäherten Bewegungsgleichung auftaucht. Deshalb erwartet man $F = F(\eta, u, R) \propto \eta uR$.
Hätten wir die Koeffizienten a, b in (III.5.13) nicht explizit angegeben, so hätten wir $F = 8\pi a\eta u$ für den Strömungswiderstand erhalten. Für beliebig geformte Körper ist aber die Kraft i.a. nicht mehr parallel zur Richtung von $\mathbf{u}$. Dann gilt

$$F_j = \eta a_{jk}u_k \tag{III.5.23}$$

mit einem symmetrischen Tensor a_{jk}.

Ohne explizite Rechnung wollen wir noch das Ergebnis für den Strömungswiderstand einer runden Scheibe vom Radius R angeben. Steht sie senkrecht zu $\mathbf{u}$, so ist

$$F_\perp = 16\pi R\eta u, \tag{III.5.24}$$

in der Ebene der Strömung gilt dagegen

$$F_{||} = \frac{32}{3}\pi R\eta u. \tag{III.5.25}$$

Offensichtlich ist $F_\perp > F_{||}$ und beide Kräfte sind größer als die, die auf eine Kugel von gleichem Radius wirken.

III.5.2 Verbesserung der Stokes'schen Formel

Die oben abgeleitet Lösung ist für größere Entfernungen nicht mehr anwendbar, selbst im Grenzfall kleiner Reynolds-Zahlen $Re \ll 1$. Dies sieht man folgendermaßen ein. Aus Gleichung (III.5.13) ersieht man, daß $\mathbf{v} \approx \mathbf{u}$ und $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ von der Ordnung $\frac{u^2R}{r^2}$ ist, da die Ableitung von $\mathbf{v}$ von der Größenordnung $\frac{uR}{r^2}$ ist. Damit sind dann aber $\eta\Delta\mathbf{v}$ und ∇p von der Ordnung $\frac{\eta Ru}{\rho r^3}$ (siehe (III.5.19)). Setzt man diese Abschätzungen in die Navier-Stokes-Gleichung ein, so sieht man, daß die im vorigen Abschnitt vernachlässigten Terme nur weggelassen werden dürfen, wenn

$$\frac{\eta Ru}{\rho r^3} \gg \frac{u^2R}{r^2} \tag{III.5.26}$$

ist, d.h. für Abstände

$$r \ll \frac{\nu}{u}. \tag{III.5.27}$$

Für größere Abstände sind die gemachten Näherungen generell unzulässig und die berechnete Geschwindigkeitsverteilung (III.5.13) falsch. Daher ist es notwendig, für große Abstände Korrekturen zu berücksichtigen. Eine naheliegende Korrektur beruht auf der Näherung $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \approx (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ und liefert die approximative Gleichung

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}. \tag{III.5.28}$$

Aufbauend auf dieser genaueren Gleichung können wir durch analoge Betrachtungen wie im vorigen Abschnitt eine verbesserte Stokes'sche Formel ableiten. Wir verzichten hier auf die Details und geben nur das Endergebnis für den Strömungswiderstand der Kugel an:

$$F = 6\pi\eta uR\left(1 + \frac{3Ru}{8\nu}\right). \tag{III.5.29}$$

Der letzte Term ist die erste Korrektur in der Reynolds-Zahl $Re = \frac{uR}{\nu}$. Da er proportional zum Radius R ist, funktioniert die Stokes'sche Formel (III.5.22) für kleine Radien besser.

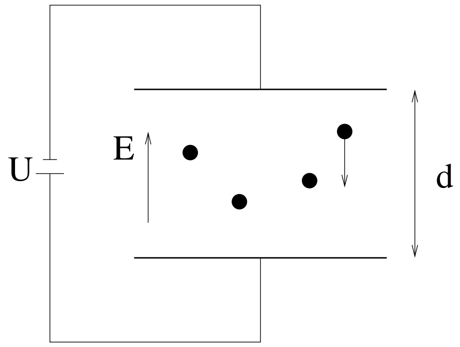

Abbildung III.5.1: Schematische Darstellung des Millikan-Versuchs.

Bei der Berechnung weiterer Korrekturen stößt man auf ein methodisches Problem. Eine systematische Verbesserung, z.B. durch eine Störungstheorie, ist schwierig (siehe Abschnitt 20 in [1]). Tatsächlich ist die nächste Korrektur von der Form

$$F = 6\pi\eta uR\left(1 + \frac{3}{8}Re - \frac{9}{4}(Re)^2 \ln\frac{1}{Re}\right). \qquad \text{(III.5.30)}$$

Es treten also logarithmische Korrekturen auf, d.h. die Kraft kann nicht durch eine Potenzreihenentwicklung dargestellt werden

III.5.3 Anwendungen der Stokes'schen Formel

Im folgenden wollen wir zwei wichtige Anwendungen der Stokes'schen Formel vorstellen.

Millikan-Versuch

Der Millikan-Versuch ist sicher aus der Anfängervorlesung bekannt. Fein zerstäubtes Öl wird in einen Kondensator gebracht (siehe Fig. III.5.1). Um nachzuweisen, daß die Öltröpfchen eine Ladung tragen, die ein Vielfaches der Elementarladung ist, beachtet man ihre Bewegung mit und ohne angelegte Spannung.
Ohne elektrische Feld erfährt ein Tropfen vom Radius R die Auftriebskraft $\frac{4\pi}{3}R^3(\rho - \rho_0)g$, wobei ρ die Dichte des Öls und ρ_0 die der Luft ist. Fallen die Tropfen mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0, so wirkt außerdem ein Strömungswiderstand, der durch die Stokes'sche Formel (III.5.22) gegeben ist. Daher gilt

$$\frac{4\pi}{3}R^3(\rho - \rho_0)g = 6\pi R\eta v_0. \qquad \text{(III.5.31)}$$

Wirkt zusätzlich ein elektrisches Feld E, so hat man

$$\frac{4\pi}{3}R^3(\rho - \rho_0)g = 6\pi R\eta v_1 + qE, \qquad \text{(III.5.32)}$$

wobei q die Ladung des Tropfens ist und v_1 wieder die konstante Fallgeschwindigkeit.

Der Radius R der Tropfen ist schwer meßbar, kann aber aus den beiden Gleichungen eliminiert werden. Man erhält dann für die Ladung

$$q = \frac{9\sqrt{2}\pi\sqrt{v_0}(v_0 - v_1)\eta^{3/2}}{E\sqrt{g(\rho - \rho_0)}}. \tag{III.5.33}$$

Experimentell stellt sich dann heraus, daß $q = ne$ immer ein ganzzahliges Vielfaches n der Elementarladung e ist.

Blutsenkung

Eine weitere wichtige Anwendung aus der Medizin betrifft die sog. *Blutsenkung*. Die Blutzellen, also die festen Bestandteile des Blutes, sind im Blutplasma supsendiert (aufgeschwemmt) und werden durch die Blutzirkulation in der Schwebe gehalten. In einem Reagenzglas beobachtet man (wenn das Blut ungerinnbar gemacht wurde) aber eine Sedimentation, bei der sich die festen von den flüssigen Blutbestandteilen trennen. Wichtig ist nun, daß bei vielen krankhaften Veränderungen diese Sedimentation schneller abläuft, da die Agglomeration der roten Blutkörperchen (Erythrozyten) durch gewisse Proteine beschleunigt wird.
Als *Blutsenkung* bezeichnet man die Messung der Blutkörperchenskenkungsgeschwindigkeit. Dabei wird einfach die Höhe des Überstandes (d.h. des klaren Serums über dem Sediment) als Funktion der Zeit gemessen. Insbesondere bei allen entzündlichen Prozesse, aber auch Krebserkrankungen u.ä. beobachtet man eine deutliche Beschleunigung der Blutsenkung. Die Normalwerte für einen gesunden Mann betragen in der ersten Stunde $3 - 8$ mm, in der zweiten Stunde $5 - 18$ mm. Für Frauen sind es aber $6 - 11$ mm in der ersten und $6 - 20$ mm in der zweiten Stunde.
Erythrozyten sind scheibchenförmige Zellen mit einem Durchmesser von etwa 7.5 μm$= 7.5 \cdot 10^{-6}$ m und einer Dicke von etwa 1.5 μm. Um die Stokes'sche Formel anwenden zu können, approximieren wir sie durch Kugel gleichen Volumens. Diese haben dann einen Radius von $R \approx 2.75$ μm. Die Fallgeschwindigkeit u bei der Blutsenkung ergibt sich dann aus

$$\frac{4\pi}{3}R^3(\rho_{\text{Ery}} - \rho_{\text{Plasma}})g = 6\pi R\eta u. \tag{III.5.34}$$

Mit den typischen Dichten $\rho_{\text{Ery}} \approx 1.17\ g/cm$ der Erythrozyten und $\rho_{\text{Plasma}} \approx 1.10\ g/cm$ des Plasmas und $\eta_{\text{Plasma}} \approx 1.73\ Ns/m^2$ erhält man dann aus

$$u = \frac{2}{9}gR^2\frac{\rho_{\text{Ery}} - \rho_{\text{Plasma}}}{\eta} \tag{III.5.35}$$

eine typische Geschwindigkeit $u \approx 2.4\ mm/h$, was größenordnungsmäßig mit den gemessenen Werten übereinstimmt.

III.6 Energiedissipation in einer inkompressiblen Flüssigkeit

Die Zähigkeit der Flüssigkeit führt zu einer Energiedissipation, bei der Wärme entsteht. Im folgenden wollen wir diese Dissipation quantitativ für den Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit betrachten.

Die gesamte kinetische Energie ist dann durch

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV \tag{III.6.1}$$

gegeben. Wir wollen nun ihre zeitliche Änderung bestimmen. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) &= \rho v_j \frac{\partial v_j}{\partial t} = \rho v_j \left(-v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma'_{jk}}{\partial x_k}\right) \\
&= -\rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\nabla p + v_j \frac{\partial \sigma'_{jk}}{\partial x_k} \\
&= -\rho \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + \operatorname{div}(\mathbf{v}\cdot\sigma') - \sigma'_{jk}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \\
&= \operatorname{div}\left(\rho \mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - \mathbf{v}\cdot\sigma'\right) - \sigma'_{jk}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}.
\end{aligned} \tag{III.6.2}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt der ersten Zeile die Navier-Stokes-Gleichung benutzt. $\mathbf{v}\cdot\sigma'$ ist der Vektor mit den Komponenten $v_j\sigma'_{jk}$. Im letzten Schritt schließlich haben wir von der Inkompressibilitätsbedingung $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ Gebrauch gemacht. Die Größe $\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - \mathbf{v}\cdot\sigma'$ ist die Energiestromdichte, wobei der erste Term den Energiestrom durch die Verschiebung der Masse der Flüssigkeit widerspiegelt (und den es daher auch bei einer idealen Flüssigkeit gibt), während $\mathbf{v}\cdot\sigma'$ als der Energiestrom durch die innere Reibung zu interpretieren ist. Die Zähigkeit bewirkt einen Impulsstrom σ'_{jk}, der immer mit einem Energietransport verknüpft ist.
Für die zeitliche Änderung der kinetischen Energie folgt nun

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\rho v^2}{2} dV &= -\oint \left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - \mathbf{v}\cdot\sigma'\right]\cdot d\mathbf{F} - \int \sigma'_{jk}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} dV \\
&\overset{V\to\infty}{\longrightarrow} -\int \sigma'_{jk}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} dV,
\end{aligned} \tag{III.6.3}$$

da o.B.d.A. $\mathbf{v} \to 0$ im Unendlichen, was durch geeignete Wahl des Koordinatensystems immer erreicht werden kann. In endlichen Volumina verschwindet das Oberflächenintegral wegen der Randbedingung $\mathbf{v} = 0$ an den Wänden. Somit haben wir also wegen der Symmetrie des Tensors σ'_{jk}

$$\begin{aligned}
\dot{E}_k &= -\int \sigma'_{jk}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} dV = -\frac{1}{2}\int \sigma'_{jk}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) dV \\
&= -\frac{\eta}{2}\int \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)^2 dV.
\end{aligned} \tag{III.6.4}$$

Da offensichtlich die Zähigkeit zu einer Abnahme der mechanischen Energie führt, ist $\dot{E}_k \leq 0$. Daher können wir schließen, daß $\eta \geq 0$ sein muß.

III.7 Solitäre Wellen und Solitonen

Die Bewegungsgleichungen (Euler, Navier-Stokes) für ideale und zähe Flüssigkeiten sind auf Grund des Terms $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ nichtlinear. Daher erwarten wir, daß auch die Ausbreitung von Wellen durch nichtlineare Gleichungen beschrieben wird. Bisher haben wir aber i.a. nur Phänomene untersucht, die durch linearisierte Gleichungen beschrieben werden können. Die nichtlinearen Terme spielten z.B. wegen der Symmetrien oder der Wahl der Parameter keine Rolle. Im folgenden wollen wir uns daher die Effekte der Nichtlinearität genauer ansehen. Für Wellen bedeutet dies, daß kein (lineares) Superpositionsprinzip mehr gelten wird. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird in der Regel auch von der Amplitude abhängen. Dies führt zu interessanten neuen Phänomenen.

III.7.1 Korteweg-de Vries-Gleichung

Als konkretes Beispiel wollen wir, auch aus historischen Gründen, die Ausbreitung langer Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten geringer Tiefe analysieren. Die Situation ist sehr ähnlich zu der in Kap. II.7.3 betrachteten, wobei wir allerdings nun die Nichtlinearität nicht vernachlässigen wollen.

Zur Vereinfachung nehmen wir weiter an, daß wir es mit einer idealen Flüssigkeit zu tun haben, die inkompressibel ist und durch eine Potentialströmung beschrieben wird. Als Bewegungsgleichung haben wir daher die Euler-Gleichung, mit den Bedingungen div $\mathbf{v} = 0$ und $\mathbf{v} = \nabla\phi$ (und somit $\Delta\phi = 0$) zu lösen. Explizit lautet die Euler-Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -g\hat{e}_z - \nabla\frac{p}{\rho}, \tag{III.7.1}$$

was wir in einfacher Weise in die Form

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \tag{III.7.2}$$

bringen können. Hieraus folgt, daß der Ausdruck in der Klammer nur eine Funktion der Zeit sein kann:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \chi(t). \tag{III.7.3}$$

Wir nehmen nun an, daß die Wellenausbreitung in x-Richtung erfolgt und keine Abhängigkeit von der y-Koordinate besteht. Die Oberfläche der Flüssigkeit wir dann durch die Gleichung $z = \zeta(x,t)$ beschrieben. Bei langen Wellen ändern sich die Feldgrößen nur langsam mit x, insbesondere ist

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right| \ll 1. \tag{III.7.4}$$

Die Gleichung (III.7.3) gilt insbesondere direkt an der Oberfläche

$$\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial t} + \frac{{v^{(0)}}^2}{2} + g\zeta(x,t) + \frac{p^{(0)}}{\rho} = \chi(t), \tag{III.7.5}$$

wobei der Index 0 darauf hinweisen soll, daß der Wert der entsprechenden Größe an der Oberfläche gemeint ist, also z.B. $\phi^{(0)} = \phi(\zeta(x,t),t)$.
Für den Druck an der Oberfläche gilt nun[8] in dem hier betrachteten Grenzfall langer Wellen

$$p^{(0)} = p_a - \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \tag{III.7.6}$$

p_a ist der Atmosphärendruck, α die *Oberflächenspannung* und $\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ die Krümmung der Oberfläche. Somit folgt

$$\frac{p_a}{\rho} = \chi(t) - \phi_t^{(0)} - \frac{{v^{(0)}}^2}{2} - g\zeta + \frac{\alpha}{\rho}\zeta_{xx} = const., \tag{III.7.7}$$

wobei wir im folgenden partielle Ableitungen immer durch einen Index kennzeichnen, d.h. $\phi_t^{(0)} = \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial t}$, $\zeta_{xx} = \frac{\partial \zeta}{\partial x^2}$ etc.
Wir haben nun noch die Randbedingungen zu berücksichtigen. Da sich die Flüssigkeit nicht vom Boden ablöst, ist $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z\big|_{z=0} = \phi_z\big|_{z=0} =$. An der Oberfläche ist die Vertikalgeschwindigkeit $v^{(z)} = \phi_z$ durch die Fortbewegung der Welle gegeben:

$$\phi_z^{(0)} = \zeta_t + \phi_x^{(0)}\zeta_x. \tag{III.7.8}$$

Um die unbekannte Funktion $\chi(t)$ zu eliminieren, differenzieren wir Gleichung (III.7.7) nach x:

$$0 = \left(\phi_t^{(0)}\right)_x + \frac{1}{2}\left({v^{(0)}}^2\right)_x + g\zeta_x - \frac{\alpha}{\rho}\zeta_{xxx}. \tag{III.7.9}$$

Da wir angenommen haben, daß die Flüssigkeit eine geringe Tiefe besitzt, erscheint eine Potenzreihenentwicklung

$$\phi(x,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n F(x,t) \tag{III.7.10}$$

zweckmäßig. Da ϕ der Laplace-Gleichung genügt, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta\phi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n (F_n)_{xx}(x,t) + n(n-1)z^{n-2}F_n(x,t)\right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(n(n-1)F_n(x,t) + (F_{(n-2)})_{xx}(x,t)\right) z^{n-2}. \end{aligned} \tag{III.7.11}$$

Aus der Randbedingung ergibt sich

$$0 = \phi_z|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} nF_n(x,t)z^{n-1}\Big|_{z=0} = F_1(x,t). \tag{III.7.12}$$

[8] Dies beweisen wir u.U. in einem späteren Kapitel. Man hat zu berücksichtigen, daß sich an Oberflächen die van-der-Waals-Kräfte nicht kompensieren können.

Somit erhalten wir die Rekursionsgleichungen

$$F_{2n}(x,t) = (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\frac{\partial^{2n} F_0(x,t)}{\partial x^{2n}}, \qquad F_{2n+1}(x,t) = 0. \tag{III.7.13}$$

Das Potential hat daher eine Entwicklung der Form

$$\phi(x,z,t) = F_0(x,t) - \frac{z^2}{2} F_{0xx} + \frac{z^4}{24} F_{0xxxx} - \cdots \tag{III.7.14}$$

Unter der Annahme, daß man bei F_0 die Reihenfolge der partiellen Ableitungen nach t und x vertauschen kann, hat man außerdem:

$$\begin{aligned}\left(\phi_t^{(0)}\right)_x &= \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial^{2n} F_{0t}}{\partial x^{2n}} \\ &= \zeta_x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\zeta^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{\partial^{2n} F_{0t}}{\partial x^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial^{2n+1} F_{0t}}{\partial x^{2n+1}} \end{aligned} \tag{III.7.15}$$

und

$$\phi_x^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial^{2n+1} F_0}{\partial x^{2n+1}} \tag{III.7.16}$$

sowie

$$\phi_z^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\zeta^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{\partial^{2n} F_0}{\partial x^{2n}}. \tag{III.7.17}$$

Setzt man dies in die Randbedingungen und Gleichung (III.7.9) ein, so erhält man Gleichungssystem für F_0 und ζ. Dieses System ist aber kompliziert und i.a. nicht explizit lösbar. Da wir aber lange Wellen bei geringer Tiefe betrachten wollen, ist eine näherungsweise Lösung durch sukzessive Approximation möglich. In niedrigster Ordnung setzen wir an

$$\zeta = Z + \xi, \qquad (F_0)_x = V + \varphi \tag{III.7.18}$$

mit (noch zu bestimmenden) Konstanten Z und V, die mit der mittleren Höhe bzw. Geschwindigkeit der Oberflächenwellen zusammenhängen. Der Korrekturen sollen klein sein, d.h. $|\xi| \ll Z$ und $|\varphi| \ll V$.
Setzt man nun diesen Ansatz in die Randbedingungen und Gleichung (III.7.9) ein, so folgt in führender Ordnung

$$0 = \xi_t + V\xi_x + Z\varphi_x, \tag{III.7.19}$$
$$0 = \varphi_t + V\varphi_x + g\xi_x. \tag{III.7.20}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems machen wir den Ansatz $\xi = G(\varphi)$, d.h. ξ ist nur eine Funktion G von φ. Dies liefert dann

$$0 = G'\varphi_t + (VG' + Z)\varphi_x, \tag{III.7.21}$$
$$0 = \varphi_t + (V + gG')\varphi_x. \tag{III.7.22}$$

wobei G' die Ableitung der Funktion G bezeichnet. Dieses Gleichungssystem hat nichttriviale Lösungen nur dann, falls $gG'^2 = Z$ bzw.

$$G' = -\sqrt{\frac{Z}{g}} =: -G_0, \tag{III.7.23}$$

wobei wir das Vorzeichen schon geeignet gewählt haben. Die Ableitung der Funktion G ist also in dieser Ordnung konstant und somit

$$\xi = G(\varphi) = -G_0\varphi. \tag{III.7.24}$$

In der nächsten Approximationsstufe nehmen wir an, daß

$$\xi = -G_0(\varphi + \psi) \qquad \text{mit} \quad |\psi| \ll |\varphi|. \tag{III.7.25}$$

Hiermit ergibt sich aus (III.7.19) und (III.7.20)

$$0 = G_0\varphi_t + VG_0(\varphi_x + \psi_x) - Z\varphi_x + 2G_0\varphi\varphi_x + \frac{Z^3}{6}\varphi_{xxx}, \tag{III.7.26}$$

$$0 = \varphi_t - gG_0(\varphi_x + \psi_x) + V\varphi_x + \varphi\varphi_x + \left(\frac{\alpha}{\rho}G_0 - \frac{Z^2}{2}V\right)\varphi_{xxx}, \tag{III.7.27}$$

wobei wir ψ_t gegenüber φ_t und $\varphi_x\varphi_{xx}$, φ_x^3 gegenüber $\varphi\varphi_x$ vernachlässigt haben. Eliminiert man aus den obigen Gleichungen ψ_x, so erhält man

$$0 = (V+gG_0)\varphi_t+(V^2-gZ)\varphi_x+(2gG_0+V)\varphi\varphi_x+\left(g\frac{Z^3}{6} - \frac{Z^2}{2}V^2 + \frac{\alpha}{\rho}G_0V\right)\varphi_{xxx}. \tag{III.7.28}$$

Wir wählen nun die bisher unbestimmten Konstante V geeignet[9]. Vor dem Hintergrund unserer Ergebnisse für lange Schwerewellen, z.B. Gleichung(II.7.44) für deren Ausbreitungsgeschwindigkeit, ist es nicht unvernünftig, einen Zusammenhang

$$V = \sqrt{gZ} \tag{III.7.29}$$

zu postulieren. Damit erhalten wir schließlich folgende partielle Differentialgleichung für die 'Korrekturfunktion' φ:

$$\boxed{\varphi_t + \frac{3}{2}\varphi\varphi_x - \frac{V}{2}\left(\frac{Z^2}{3} - \frac{\alpha}{\rho g}\right)\varphi_{xxx} = 0. \qquad \text{(III.7.30)}}$$

Dies ist die *Korteweg-de Vries-Gleichung* für lange Wellen in Flüssigkeiten geringer Tiefe (seichtem Wasser).
Man beachte, daß durch die Wahl (III.7.29) in erster Ordnung unserer Näherung $\varphi_t = \xi_t = 0$ gilt, d.h. die Welle ist in dieser Ordnung stationär und die Zeitabhängigkeit tritt erst durch Betrachtung der zweiten Ordnung zu Tage.

[9]Im Prinzip müßte man später zeigen, daß die getroffene Wahl konsistent ist.

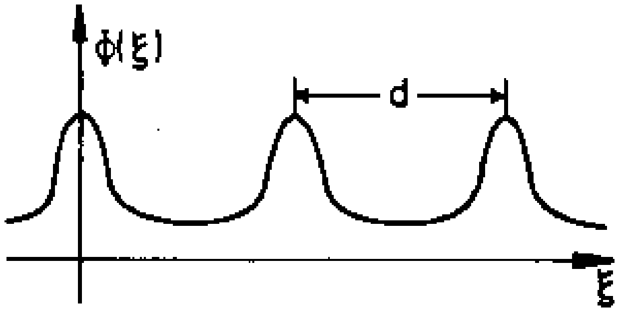

Abbildung III.7.1: Qualitatitive Form der Lösungen der KdV-Gleichung vom Typ einer fortschreitenden Welle.

III.7.2 Solitonen

Durch Reskalierung von t und x können wir die Korteweg-de Vries-Gleichung in die Form

$$\boxed{\varphi_t + \alpha\varphi\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0 \qquad \text{(III.7.31)}}$$

bringen[10]. Sie hat Lösungen in der Form von fortschreitenden Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit u ausbreiten. Allgemein bezeichnet man als *fortschreitende Wellen* Lösungen von Wellengleichungen, die von x und t nur in der Kombination $\xi = x - ut$ abhängen (mit fester Geschwindigkeit u). Hierzu transformieren wir auf ein Koordinatensystem, in dem eine solche Welle stationär erscheint, d.h. $\varphi(x,t) = \varphi(\xi)$. Dann gilt $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}$ und $\frac{\partial}{\partial t} = -u\frac{d}{d\xi}$, so daß (III.7.31) in

$$\varphi'(\alpha\varphi - u) + \varphi''' = 0 \qquad \text{(III.7.32)}$$

übergeht. Die qualitative Form der Lösungen dieser Gleichung ist in Abb. III.7.1 gezeigt. Man kann sie als eine unbeschränkte, periodische Ansammlung von Wellenbergen charakterisieren. Andere Lösungen haben aber nicht die Form einer fortschreitenden Welle. Hier variieren dann die Geschwindigkeit u und der Abstand d der Wellenberge kontinuierlich.
Der Grenzfall einer fortschreitenden Wellen mit $d \to \infty$ wird als *solitäre Welle* bezeichnet, da sie nur aus einem Wellenberg besteht. Allgemeiner sind solche solitären Wellen durch einen scharfen Übergang (in einem kleinen Bereich) zwischen dem asymptotischen Werten für $\xi \to -\infty$ und $\xi \to \infty$ charakterisiert. Im Falle der KdV-Gleichungen sind die beiden Asymptotiken identisch, es ist aber vorstellbar, daß sie unterschiedliche Werte haben (siehe Abb. III.7.2). In diesem Fall hat die Welle eher die Form einer scharfen Kante oder einer wandernden Stufe und wird i.a. als *Kink* bezeichnet.
Eine typische Eigenschaft von solitären Wellen, die sie von den bisher bekannten (linearen) Wellen unterscheidet, ist die Tatsache, daß sie nicht zerfließen. Dies ist in Abb. III.7.3 schematisch dargestellt. Historisch sind solitäre Wellen zuerst 1834 von dem Ingenieur John Scott Russell beschrieben worden. Er hat sie in einem Kanal beobachtet, in dem sie durch einen von Pferden geschleppten Kahn erzeugt wurden. Die solitäre Wellen bewegte sich mit einer Geschwindigkeit von fast 10 Meilen pro Stunde über eine große Distanz von mehreren Meilen nahezu unverändert fort.

[10] In der Mathematik ist die Wahl $\alpha = \frac{1}{6}$ üblich.

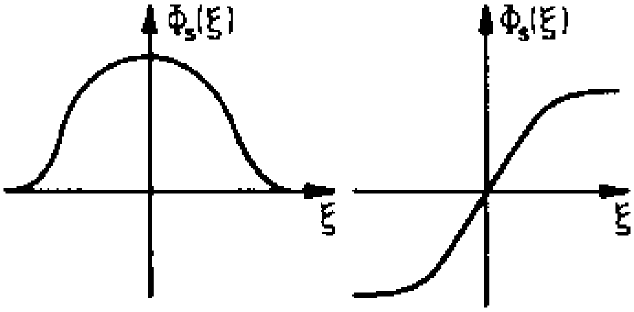

Abbildung III.7.2: Typische Formen einer solitären Welle, die durch einen scharfen Übergang zwischen den asymptotischen Werten charakterisiert ist. Das Beispiel im linken Bild entspricht dem Grenzfall $d \to \infty$ aus Abb. III.7.1. Bei dem im rechten Bild gezeigten Beispiel spricht man auch von einer 'Stufe' oder einem 'Kink'.

Im folgenden wollen wir die sog. *Ein-Soliton-Lösung* der Korteweg-de Vries-Gleichung ableiten. Wir suchen Lösungen von (III.7.31), die für $x \to \pm\infty$ verschwinden. Ebenso sollen ihre Ableitungen asymptotisch verschwinden. Nach der Transformation $\xi = x - ut$ erhalten wir die Gleichung (III.7.32), die wir sofort integrieren können:

$$\varphi_{\xi\xi} = u\varphi - \frac{\alpha}{2}\varphi^2 + K_1 \tag{III.7.33}$$

mit einer Konstanten K_1. Diese muß aber wegen der Randbedingungen verschwinden. Nach Multiplikation mit φ_ξ können wir ein weiteres Mal integrieren und erhalten

$$\frac{1}{2}\varphi_\xi^2 = \frac{u}{2}\varphi^2 - \frac{\alpha}{6}\varphi^3, \tag{III.7.34}$$

wobei die eigentlich auftretende Integrationskonstante wieder verschwinden muß. Nun nehmen wir die Substitution $\varphi(\xi) = \frac{1}{\psi^2(\xi)}$ vor. Nach Multiplikation mit ψ^6 erhalten wir die Gleichung

$$\frac{4}{u}\psi_\xi^2 = \psi^2 - \frac{\alpha}{3u}. \tag{III.7.35}$$

Hier können wir nun die Variablen separieren:

$$\frac{\sqrt{u}}{2}\xi = \int \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^2 - \frac{\alpha}{3u}}} = \operatorname{arcosh}\left(\sqrt{\frac{3u}{\alpha}}\psi\right), \tag{III.7.36}$$

und somit $\psi(\xi) = \sqrt{\frac{\alpha}{3u}}\cosh\left(\frac{\sqrt{u}}{2}\xi\right)$. Die Rücktransformation auf die ursprünglichen Variablen liefert dann die explizite Form der Ein-Soliton-Lösung:

$$\varphi_1(x,t) = \frac{3u/\alpha}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{u}}{2}(x-ut)\right)}. \tag{III.7.37}$$

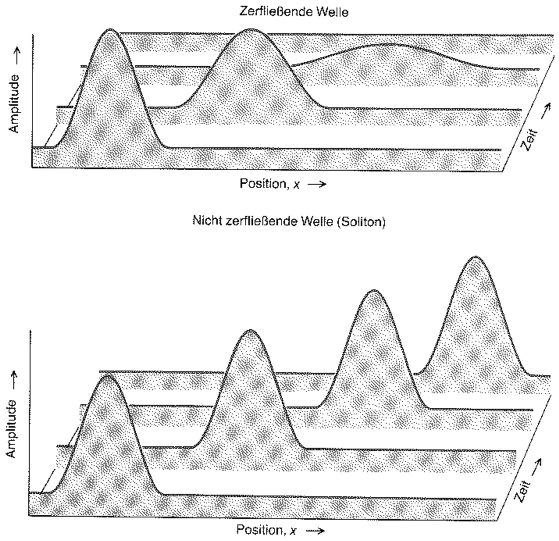

Abbildung III.7.3: Solitäre Wellen (unten) zerfließen im Gegensatz zu 'normalen' Wellen (oben) nicht.

Hier sieht man explizit, daß die Amplitude von der Geschwindigkeit u abhängt: Große solitäre Wellen sind schneller als flache!
Man kann auch *Zwei-Solitonen-Lösungen* konstruieren. Eine spezielle solche Lösung ist

$$\varphi_2(x,t) = \frac{72}{\alpha} \frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{\left(3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)\right)^2}. \tag{III.7.38}$$

Man kann explizit nachrechen, daß dies eine Lösung der KdV-Gleichung mit der Eigenschaft $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi_2(x,t) = 0$ ist. Der Name kommt daher, daß im Grenzfall $t \to \pm\infty$ die Lösung in zwei Ein-Soliton-Lösungen zerfällt:

$$\varphi_2(x,t) = \varphi_1^{(1)}(x,t) + \varphi_1^{(2)}(x,t), \tag{III.7.39}$$

wobei

$$\varphi_1^{(j)}(x,t) = \frac{3u_j/\alpha}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{u_j}}{2}(x - u_j t) + \delta_j\right)} \tag{III.7.40}$$

mit den Geschwindigkeiten $u_1 = 4$ und $u_2 = 16$ der Solitonen und den Phasenverschiebungen $\delta_{1/2} = \pm\,\mathrm{artanh}(1/2)$. Es handelt sich also um die Überlagerung zweier Ein-Soliton-Lösungen (siehe Abb. III.7.4), die man auch als eine Streuung zweier einzelner Solitonen interpretatieren kann. Zu ganz frühen Zeiten $t \to -\infty$ können die Beiträge sauber getrennt werden. Auf Grund der unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten überlagern sich die Lösungen und sind erst für $t \to \infty$ wieder trennbar Das Besondere hierbei ist nun, daß die Anteile für $x \to +\infty$ genauso aussehen wie die ursprünglichen ($t \to -\infty$) (siehe Abb. III.7.4). Das bedeutet, daß die beiden solitären Wellen nach der Kollision die gleiche Gestalt und Geschwindigkeit wie vorher haben. Solitäre Wellen mit dieser Eigenschaft bezeichnet man auch als Solitonen.

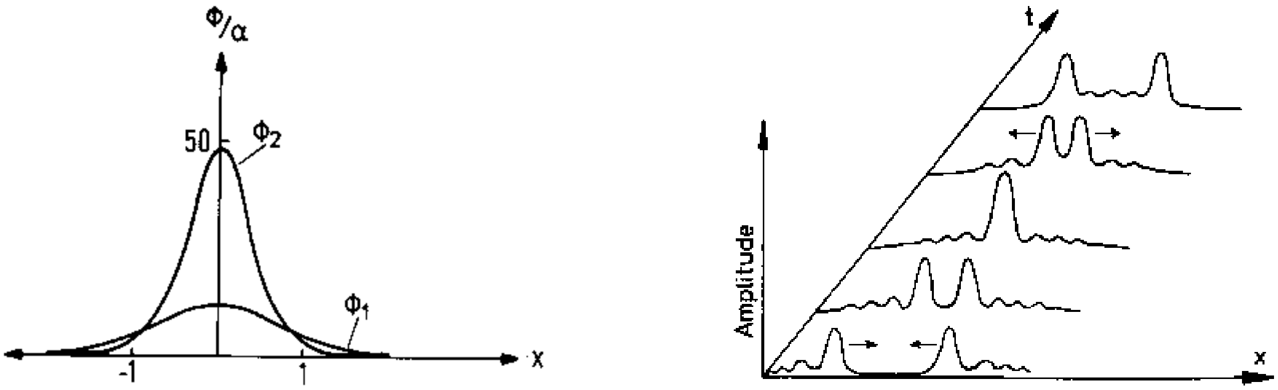

Abbildung III.7.4: Die Zwei-Solitonen-Lösung kann als Überlagerung zweier Ein-Solitonen-Lösungen interpretiert werden (links). Die rechte Abbildung zeigt schematisch die Kollision zweier Solitonen, die dabei ihre ursprüngliche Gestalt behalten.

Allgemein versteht man unter einem *Soliton* eine Lösung $\varphi_S(x-ut)$ einer (nichtlinearen) Wellengleichung in der Form einer solitären Welle, die asymptotisch Form und Geschwindigkeit beibält, wenn es mit einem anderen Soliton kollidiert. Formal ausgedrückt heißt das: Ist für $t \to -\infty$

$$\varphi(x,t) \sim \sum_{j=1}^{N} \varphi_s(\xi_j) \tag{III.7.41}$$

mit $\xi_j = x - u_j t$ und (konstanten) Geschwindigkeiten u_j, so ist nach der Wechselwirkung (also für $t \to \infty$)

$$\varphi(x,t) \sim \sum_{j=1}^{N} \varphi_s(\xi_j + \delta_j), \tag{III.7.42}$$

d.h. es tritt höchstens eine konstante Phasenverschiebung der einzelnen Anteile gegeneinander auf.
Die sog. *gepulsten Lösungen* gewisser linearer Wellengleichungen sind in diesem Sinne auch als Solitonen zu betrachten. Solitonen entstehen daher entweder bei linearen Wellengleichungen und Dispersionsfreiheit oder aber in nichtlinearen Wellengleichungen mit Dispersion. Letzeres ist bei den Flachwasserwellen der Fall, die ja auf die KdV-Gleichung führen. Hier sieht man, daß eine schwache Nichtlinearität einen Beitrag proportional zu k^3 zur Frequenz ω liefert.

III.7.3 Sine-Gordon-Gleichung

In diesem Abschnitt wollen wir eine weitere nichtlineare Gleichung und ihre Solitonen-Lösungen diskutieren. Die Sine-Gordon-Gleichung ist zwar nicht unmittelbar durch ein hydrodynamisches Problem motiviert, spielt aber in vielen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle. Wir diskutieren diese Gleichung auch deshalb, da kein allgemeines Kriterium für das Auftreten von Solitonenlösungen bekannt ist, so daß man auf die Untersuchung konkreter Beispiele angewiesen ist.

Aus der Quantenmechanik ist die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$\Delta\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = m^2\psi \tag{III.7.43}$$

für ein relativistisches Spin-0-Teilchen bekannt[11]. Durch eine kleine Abänderung wird hieraus die nichtlineare Gleichung

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin\varphi, \tag{III.7.44}$$

die aus naheliegenden Gründen als *Sine-Gordon-Gleichung* oder auch *Sinus-Gordon-Gleichung* bezeichnet wird. Sie tritt in vielen Anwendungen in der Feldtheorie, Elementarteilchen- und Festkörperphysik auf. Auch der Kontinuumslimes eines Systems harmonisch gekoppelter Pendel führt auf diese Gleichung.

Zunächst wollen wir eine Ein-Solitonen-Lösung konstruieren, die für $x \to -\infty$ verschwindet. Wir führen wieder die Variable $\xi = x - ut$ ein, womit die Sine-Gordon-Gleichung die Form

$$(1-u^2)\varphi_{\xi\xi} = \sin\varphi \tag{III.7.45}$$

annimmt. Nach Multiplikation mit φ_ξ kann man integrieren und erhält

$$\frac{1}{2}(1-u^2)\varphi_\xi^2 = K - \cos\varphi. \tag{III.7.46}$$

Da $\varphi_\xi \to 0$ für $x \to -\infty$, ist $K = 1$ und die rechte Seite läßt sich mit einer bekannten trigonometrischen Identität als $2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ schreiben. Dies liefert dann

$$\varphi_\xi = \frac{2}{\sqrt{1-u^2}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \tag{III.7.47}$$

was wir durch Trennung der Variablen integrieren können:

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\int d\xi = \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4}} = \int\frac{d\tilde{\varphi}}{\tilde{\varphi}}, \tag{III.7.48}$$

wobei wir wieder eine Halbwinkelformel ausgenutzt haben. Im letzten Schritt wurde mit $\tilde{\varphi} = \tan\left(\frac{\varphi}{4}\right)$ substituiert. Damit ergibt sich zunächst $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\xi = \ln\left(\tan\frac{\varphi}{4}\right)$ und hieraus durch Rücktransformation

$$\varphi_\pm(x,t) = 4\arctan\left(\pm\exp\left(\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right). \tag{III.7.49}$$

Dies sind die Ein-Soliton-Lösungen der Sine-Gordon-Gleichung (siehe Abb. III.7.5.

Durchläuft x die reelle Achse von $-\infty$ nach $+\infty$, so rotiert φ um 2π. Für die Lösung φ_+ verläuft die Rotation um $+2\pi$, für φ_- um -2π. Man bezeichnet daher φ_+ als *Soliton* und φ_- als *Antisoliton*. Man kann zeigen, daß die Gesamtrotation bei Stößen erhalten bleibt. Auf Grund dieser topologischen Zwangsbedingung können Solitonen nur paarweise erzeugt oder vernichtet werden. Da die Sine-Gordon-Gleichung auch invariant unter Lorentz-Transformationen ist, eignet sie sich deshalb als einfaches Modell zur Beschreibung von Elementarteilchen.

[11] Wir haben hier $\hbar = c = 1$ gesetzt.

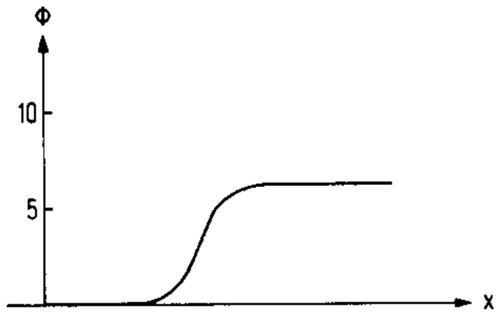

Abbildung III.7.5: Die Form der Ein-Soliton-Lösung des Sine-Gordon-Modells.

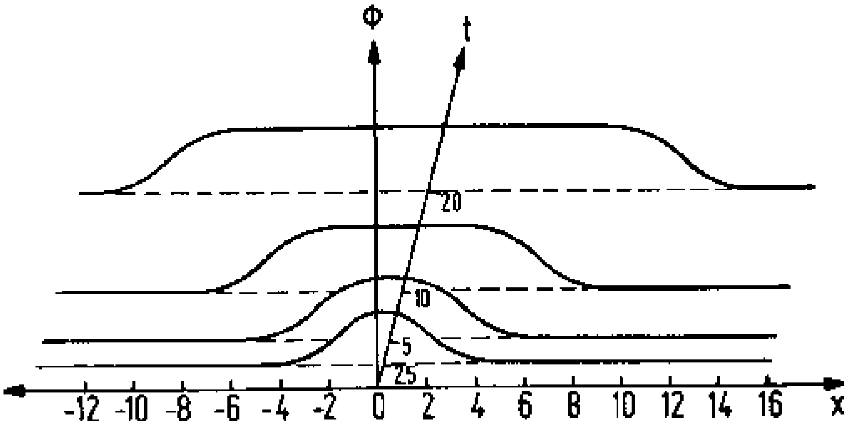

Abbildung III.7.6: Soliton-Antisoliton-Streuung im Sine-Gordon-Modell. Zur Zeit $= 0$ sind das Soliton und das Antisoliton, die sich mit der gleichen Geschwindigkeit bewegen, vollständig überlagert.

Wir geben noch die analytischen Ausdrücke für Zwei-Solitonen-Lösungen an. Für die *Soliton-Soliton-Streuung* ist

$$\varphi_{SS} = 4\arctan\left(\frac{u\sinh\frac{x}{\sqrt{1-u^2}}}{\cosh\frac{ut}{\sqrt{1-u^2}}}\right) \tag{III.7.50}$$

und für die *Soliton-Antisoliton-Streuung*

$$\varphi_{S\bar{S}} = 4\arctan\left(\frac{u\sinh\frac{ut}{\sqrt{1-u^2}}}{u\cosh\frac{x}{\sqrt{1-u^2}}}\right). \tag{III.7.51}$$

Aus $\varphi_{S\bar{S}}$ sieht man, daß Solitonen und Antisolitonen durcheinander hindurch laufen können, ohne sich gegenseitig auszulöschen, obwohl dies der Erhaltung der totalen Rotation nicht widersprechen würde. Das Verhalten bei der Soliton-Antisoliton-Streuung ist in Abb. III.7.6 schematisch dargestellt.

III.8 Anwendungen: Verkehrsmodellierung

Da wir umgangssprachlich davon sprechen, daß Verkehr *fließt*, ist es nicht überraschend, daß die ältesten Theorien zur Beschreibung von Straßenverkehr tatsächlich Varianten von hydrodynamischen Theorien sind. Bevor wir diese genauer vorstellen, wollen wir uns mit den Grundlagen und wesentlichen Phänomenen im Straßenverkehr, die von einer guten Theorie beschrieben und erklärt werden sollen, beschäftigen.

III.8.1 Empirische Grundlagen

Meßgrößen

Die meisten Verkehrsdaten werden zur Zeit mit Hilfe von Induktionsschleifen gewonnen. Bewegte Fahrzeuge, die den Detektoren überfahren, induzieren einen Strom. Der Zeitpunkt des Signals wird dann aufgezeichnet. Ein Problem stellt allerdings die Tatsache dar, daß prinzipiell nur bewegte Fahrzeuge detektiert werden. Dies erschwert die Interpretation der Daten, da z.B. Staus praktisch keine Signale liefern.

Die wichtigste Meßgröße ist der Fluß oder Strom J. Er ist definiert als die Zahl der Fahrzeuge, die pro Zeiteinheit den Detektor passieren.

Da die Detektoren aus zwei Schleifen in kurzem Abstand bestehen, läßt sich die Geschwindigkeit v_n des n-ten Fahrzeugs relativ leicht bestimmen. Ist t_{D_1} bzw. t_{D_2} die Zeit, zu der das betrachtete Fahrzeug den Detektor D1 bzw. D2 passiert und d_D der Abstand der Detektoren, so erhält man die Geschwindigkeit über $v_n = \frac{d_D}{t_{D_2} - t_{D_1}}$. Hierbei wurde implizit angenommen, daß sich die Geschwindigkeit im Intervall $[t_{D_1}, t_{D_2}]$ nicht ändert. Dies ist auf Grund des geringen Abstandes der Schleifen i.a. gut erfüllt. Eine Ausnahme bilden allerdings Fahrzeuge, die in einem Stau stehen und z.B. nach einer kurzen Fahrstrecke zwischen den Schleifen stehen bleiben. Wir werden auf dieses Problem bei der Dichtebestimmung zurück kommen.

Schließlich spielt natürlich die *Dichte* ρ eine wesentliche Rolle. Bei deren Bestimmung aus Messungen an Induktionsschleifen gibt allerdings prinzipielle Probleme. Per Definition ist die Dichte eine räumliche Größe, während die Detektoren nur zeitliche Messungen durchführen können. Zusätzlich treten systematische Fehler auf, da nur bewegte Fahrzeuge detektiert werden. Im allgemeinen wird die Dichte daher indirekt bestimmt, z.B. mit Hilfe der sog. *hydrodynamische Relation*

$$J = \rho v \qquad \text{mit} \qquad v = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v_n. \tag{III.8.1}$$

aus der Durchschnittsgeschwindigkeit und dem Strom.

Abschließend sei noch angemerkt, daß die Detektoren häufig nicht die *Einzelfahrzeugdaten* abspeichern, sondern zur Datenreduktion eine automatische Mittelung durchführen. Je nach Länge des Mittelungsintervalls unterscheidet man *1-Minuten- und 5-Minuten-Daten*.

Beobachtungen

Zwei wichtige empirische Resultate sollten von jedem vernünftigen Verkehrsmodell reproduziert werden, zum einen die spontane Staubildung und zum anderen die Form des sog. Fundamentaldiagramms.
Die *spontane Staubildung*, auch bekannt als *Stau aus dem Nichts*, ist ein aus dem Alltag wohlbekanntes Phänomen. Hierbei handelt es sich um Staus, die ohne offensichtlichen äußeren Anlaß entstehen. Zu den offensichtlichen Anläßen gehören z.B. Unfälle, Bauarbeiten oder jede Art von Fahrbahnverengung. Bei dem Stau aus dem Nichts handelt es dagegen um ein *kollektives Phänomen* und gibt dem Physiker wichtige Hinweise, die bei der Modellierung zu berücksichtigen sind.

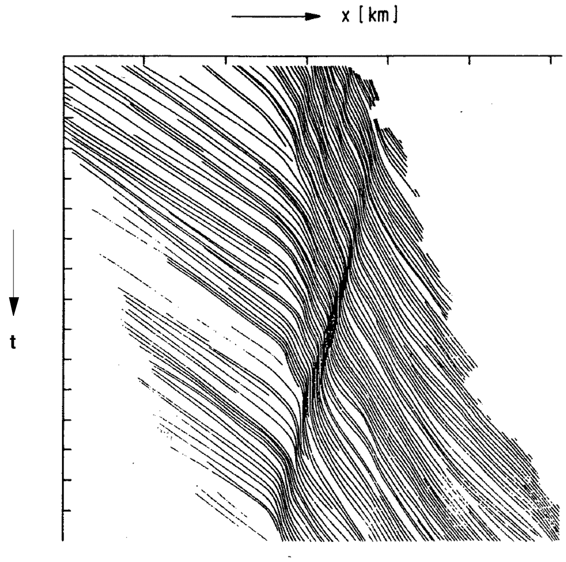

Abbildung III.8.1: Die Trajektorien zeigen die Bewegung einzelner Fahrzeuge auf einer Spur einer mehrspurigen Straße. Die spontane Staubildung ist deutlich zu erkennen, ebenso die Bewegung des Stau gegen die Fahrtrichtung.

Abb. III.8.1 zeigt ein berühmtes empirisches Beispiel für die Existenz der spontanen Staubildung. Jeder Linie entspricht der Trajektorie eines Fahrzeugs[12]. Diese Trajektorien wurden aus einer Serie von Luftaufnahmen abgeleitet. Man erkennt deutlich, daß sich die Fahrzeuge links mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Dann werden sie gezwungen abzubremsen, stehen für einige Zeit, und fahren dann wieder mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Im Bereich des Staus sind die Trajektorien deutlich dichter und fast senkrecht. Bei den Beobachtungen wurde kein äußerer Anlaß für den Stau festgestellt. Eine weiteres Charakteristikum ist die Rückwärtsbewegung des Staus, d.h. die Staufront bewegt sich entgegengesetzt[13] zur Fahrtrichtung der Autos. Die Geschwindigkeit v_{stau} dieser Bewegung ist eine wichtige Konstante in der Verkehrsforschung. Sie

[12]Linie, die abrupt enden bzw. beginnen, gehören zu Fahrzeugen, die die Spur wechseln.

[13]In der Verkehrsforschung bezeichnet man dies häufig als *stromaufwärts* (*upstream*).

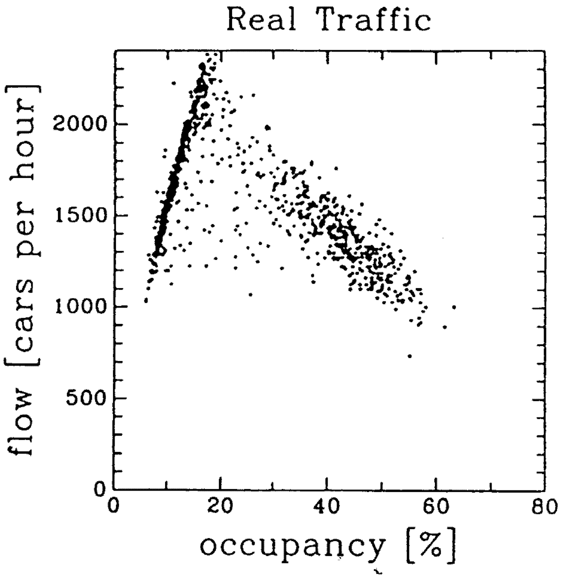

Abbildung III.8.2: Empirisches Fundamentaldiagramm. Jeder Punkt entspricht einer Mittelung über 5 Minuten.

ist weitgehend unabhängig von vielen Details (Land, Wetter, Straßzustand etc.) und beträgt etwa

$$v_{\text{stau}} \approx 15 \text{ km/h}. \tag{III.8.2}$$

Abschließend sie noch darauf hingewiesen, daß die Existenz der spontanen Staubildung von einigen Verkehrsforschern bezweifelt wird. Sie führen jede Art von Staubildung auf die Existenz sog. *Bottlenecks* zurück. Ein Bottleneck ist dabei eine Inhomogenität auf Grund reproduzierbarer externer Gründe. Dazu zählen neben Fahrbahnverengungen und Auf- und Abfahrten auch sonstige Ablenkung am Fahrbahnrand. Experimente legen jedoch nahe, daß Stau tatsächlich *spontan* entstehen können.
Die wichtigste Meßgröße zur Charakterisierung des Verkehrs ist das sogenannte *Fundamentaldiagramm*, wie schon aus dem Namen deutlich wird. Hierbei handelt es sich um den funktionalen Zusammenhang $J = J(\rho)$ zwischen dem Strom J und der Dichte ρ. Im folgenden wollen die schematische Struktur des Fundamentaldiagramms diskutieren. Wir orientieren uns dabei an der historischen Entwicklung, in Laufe deren immer wieder neuen Strukuren entdeckt wurden.
Abb. III.8.2 zeigt ein typisches Fundamentaldiagramm aus empirischen Messungen. Jeder Datenpunkt ist aus einer Mittelung von Dichte und Fluß über 5 Minuten hervorgegangen. Man erkennt deutlich zwei getrennte Äste: Einen *Freiflußast* mit positiver Steigung und einen *gestauten Ast* mit negativer Steigung. Im Freiflußast ist die Wechselwirkung der Fahrzeuge miteinander vernachlässigbar. Jedes Auto kann daher mit seiner Wunschgeschwindigkeit $v_{\text{max}}^{(n)}$ fahren, die i.a. mit dem herrschenden Tempolimit übereinstimmt. Die Steigung der Geraden ist daher gerade durch die Wunschgeschwindigkeit gegeben: $\frac{dJ}{d\rho}\big|_{\text{FF}} \approx v_{\text{max}} > 0$. Werden die Wechselwirkungen wichtig, so kommt es zu Abweichung von der Geraden. Ab einer bestimmten Dichte dominieren die Wechselwirkungen und der Fluß nimmt schließlich mit zunehmender Dichte wieder ab: $\frac{dJ}{d\rho}\big|_{\text{S}} < 0$. Dies passiert im gestauten Ast. Dort ist der mittlere Abstand der Fahrzeuge klein,

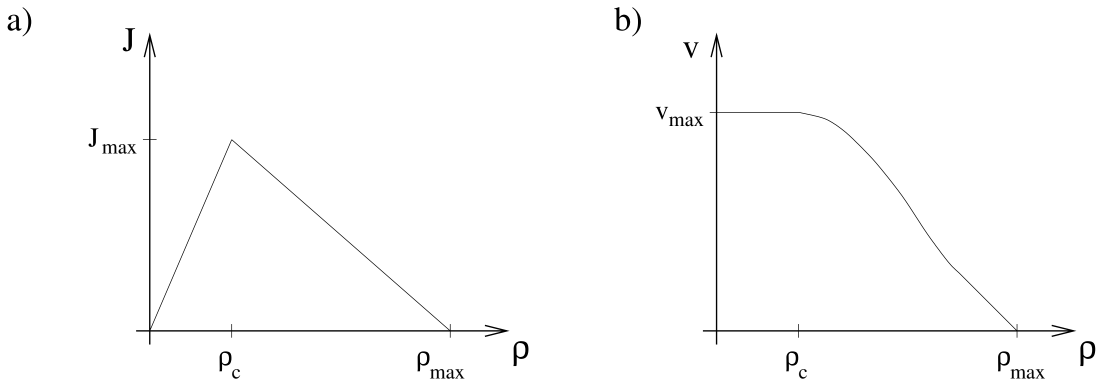

Abbildung III.8.3: Schematisches Fundamentaldiagramm a) $J = J(\rho)$ und b) $v = v(\rho)$.

so daß die Wechselwirkung dominiert. Die Geschwindigkeit v_n der Autos ist deutlich kleiner als die Wunschgeschwindigkeit $v_{\mathrm{max}}^{(n)}$ und es kommt zur Bildung von Staus. Staus werden durch sehr wenige Parameter charakterisiert, nämlich ihre Dichte ρ_{max} und den Ausfluß J_{out}. Diese sind annähernd Konstanten, die unabhängig von Wetter, Straßenzustand, etc. sind. Ein vernünftiges Verkehrsmodell sollte diese Tatsachen natürlich reproduzieren.

Im einfachsten Fall hat das Fundamentaldiagramm die in Abb. III.8.3a dargestellte schematische Form. Der Fluß verschwindet bei verschwindender Dichte und bei der maximalen Dichte ρ_{max}. Dazwischen gibt es genau ein Flußmaximum bei der Dichte ρ_c. Abb. III.8.3b zeigt eine alternative Form des Fundamentaldiagramms, die auf Grund der hydrodynamischen Relation (III.8.1) äquivalent ist. Sie zeigt das anschaulich erwartete Verhalten, daß die Geschwindigkeit monoton fallend von der Dichte abhängt, d.h. $\frac{dv}{d\rho} \leq 0$. Außerdem ist $\lim_{\rho\to 0} v(\rho) = v_{\mathrm{max}}$. Es gibt noch eine dritte äquivalente Form des Fundamentaldiagramms, nämlich $v = v(J)$. Diese wird gerne von Verkehrsingenieuren benutzt.

Die empirischen Daten in Abb. III.8.2 lassen schon erahnen, daß das Fundamentaldiagramm mehr Struktur haben kann. Insbesondere in der Nähe des Maximums ist es nicht unbedingt klar, daß Freiflußast und gestauter Ast in einem gemeinsamen Punkt enden. Tatsächlich beobachtet man häufig einen Dichtebereich $[\rho_1, \rho_2]$, in dem der Fluß keine eindeutige Funktion der Dichte mehr ist. Dieser Bereich tritt in der Nähe des Flußmaximums auf (siehe Abb. III.8.4). Man bezeichnet dies auch (aufgrund der Ähnlichkeit mit der Form des griechischen Buchstabens) als *inverse Lambda-Form*. Es zeigt sich, daß Zustände mit Flüßen $J > J(\rho_1)$ nicht stabil, sondern *metastabil* sind. Sie zerfallen bei hinreichend großen Störungen in gestaute Zustände mit entsprechend kleinerem Fluß. Die Differenz $J(\rho_2) - J(\rho_1)$ bezeichnet man auch als *capacity drop*. Später werden wir sehen, daß $J(\rho_1) = J_{\mathrm{out}}$, wobei J_{out} der Ausfluß ist einem großen Stau ist.

In engem Zusammenhang mit der Existenz von metastabilen Zuständen steht das Phänomen der Hysterese. Angenommen, man startet zu einer Zeit t_1 mit einem Fluß und einer Dichte, die einem Punkt auf dem metastabilen Hochflußast liegen. Erhöht man die Dichte weiter, so steigt zunächst der Fluß an. Irgendwann bricht er aber zusammen und man fällt auf den gestauten Ast. Erniedrigt man jetzt die Dichte wieder, so wird der Fluß wieder ansteigen. Da man sich aber auf dem gestauten Ast bewegt, wird der Ausgangsfluß nicht mehr erreicht, wenn man bei der

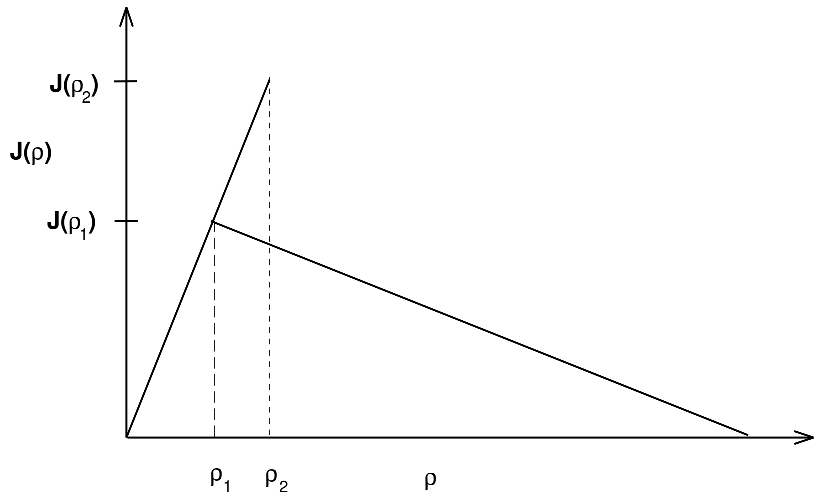

Abbildung III.8.4: Schematisches Fundamentaldiagramm bei Existenz metastabiler Hochflußzustände.

Ausgangsdichte ankommt.
In den letzten Jahren hat man durch sorgfältige Untersuchung der empirischen Daten festgestellt, daß das Fundamentaldiagramm noch komplexer ist. Tatsächlich hat es die in Abb. III.8.5 dargestellte Struktur. Statt eines wohldefierten Astes gibt es eine ganze "Blase", d.h. es gibt eigentlich keinen funktionalen Zusammenhang $J = J(\rho)$ zwischen Fluß und Dichte mehr. Für größere Dichten kann da der Fluß zu einer Dichte unendlich viele Werte annehmen, was zur Verteilung in einem zweidimensionalen Gebiet führt. Die Zustände in dieser Blase[14] bezeichnet man als *synchronisierten Verkehr*. Eine gute Näherung des zu erwartenden Verhaltens ist der wohlbekannte "zähflüssige Verkehr".

Modellierungsansätze

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die sehr unterschiedlichen Modellklassen, die bisher zur Beschreibung von Straßenverkehr eingesetzt wurden, zu charakterisieren. Die gängigsten Unterscheidung sind:

Auflösung: mikroskopisch $\longleftrightarrow$ makroskopisch
In mikroskopischen Modellen sind die einzelnen Fahrzeuge unterscheidbar, während in makroskopischen Modellen lediglich Dichten für die Zahl der Fahrzeuge, die Geschwindigkeit etc. betrachtet werden.

Variablen: diskret $\longleftrightarrow$ kontinuierlich
Raum, Zeit und Zustandsvariable können jeweils diskret oder kontinuierlich sein. Dabei sind im Prinzip alle Kombinationen möglich.

[14] Andeutungsweise erkennt man diese schon in Abb. III.8.2.

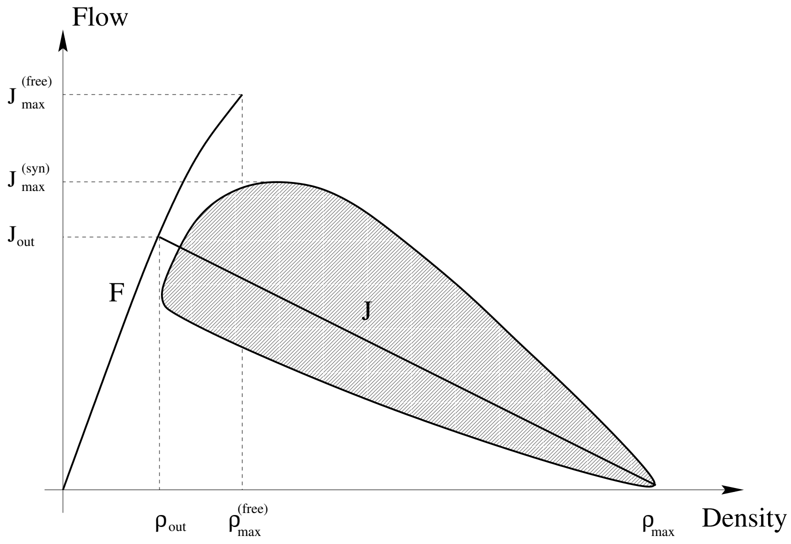

Abbildung III.8.5: Schematisches Fundamentaldiagramm mit synchronisiertem Verkehr.

Dynamik: deterministisch $\longleftrightarrow$ stochastisch
Modelle mit einer stochastischen Dynamik enthalten Zufallselemente.

Detailgrad: high fidelity $\longleftrightarrow$ low fidelity
Der Detailgrad bezieht sich auf den offensichtlichen Realismus des Modells. High fidelity Modelle versuchen z.B. das Verhalten des Fahrers möglichst realistisch nachzubilden, während low fidelity Modelle mehr darauf abzielen, gewisse Meßgrößen wie z.B. das Fundamentaldiagramm korrekt zu reproduzieren.

Bei den hydrodynamischen Modellen handelt es sich um eine makroskopische Beschreibung mit kontinuierlichen Variablen, die meist deterministisch ist. Allgemein wird versucht, die Dynamik der Fahrzeugdichte $\rho(x,t)$, der Geschwindigkeitsdichte $v(x,t)$ und der Stromdichte $J(x,t)$ durch Gleichungen ähnlich der Hydrodynamik zu beschreiben. Man kann sich diese Dichten als Ergebnis einer sog. *coarse-graining* Prozedur vorstellen, bei der man von einer mikroskopischen Beschreibung durch Mittelung über relativ kleine (Zeit-, Raum-)Intervalle zu einer Beschreibung durch Dichten übergeht.

III.8.2 Lighthill-Whitham-Theorie

Ausgangspunkt der Lighthill-Whitham-Theorie ist die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = 0, \tag{III.8.3}$$

die die Erhaltung der Zahl der Fahrzeuge widerspiegelt. Muß man zusätzlich Auf- und Abfahrten (an den Orten $x_{\text{auf}}^{(j)}$ bzw. $x_{\text{ab}}^{(j)}$) berücksichtigen, so ist (III.8.3) zu modifizieren

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = \sum_j \alpha_j(x_{\text{auf}}^{(j)},t) - \sum_j \beta_j(x_{\text{ab}}^{(j)},t), \tag{III.8.4}$$

wobei α_j bzw. β_j die Raten sind, mit denen Fahrzeuge auf die betrachtete Straße auffahren bzw. sie verlassen.

Die Gleichung (III.8.3) enthält noch zwei unbekannte Funktionen, nämlich die Dichte $\rho(x,t)$ und den Strom $J(x,t)$ (bzw. die Geschwindigkeitsdichte $v(x,t)$, die über $J(x,t) = \rho(x,t)v(x,t)$ mit dem Strom zusammenhängt). Wir benötigen daher eine weitere Beziehung, die uns einen Zusammenhang zwischen diesen Größen liefert. Lighthill und Whitham haben deshalb angenommen, daß

$$J(x,t) = J(\rho(x,t)) \tag{III.8.5}$$

ist. Anschaulich bedeutet dies, daß der Strom instantan auf Dichteänderungen reagiert. Seine Orts- und Zeitabhängigkeit kommt daher alleine durch die Orts- und Zeitabhängigkeit der Dichte zustande. Setzt man die Annahme (III.8.5) in die Kontinuitätsgleichung (III.8.3) ein, so erhält man die sog. *Lighthill-Whitham-Richards-Gleichung* (LWR-Gleichung)[15]

$$\boxed{\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + v_g(\rho)\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad \text{(III.8.6)}}$$

mit der Geschwindigkeit

$$v_g(\rho) = \frac{dJ}{d\rho} = v + \rho\frac{dv}{d\rho}. \tag{III.8.7}$$

Man beachte, daß $v_g(\rho)$ i.a. verschieden von der mittleren Geschwindigkeit $v(x,t)$ am Ort x ist.

Ein Problem der LWR-Theorie ist, daß das Fundamentaldiagramm nicht berechnet werden kann, sondern vorgegeben werden muß. Eine besonders einfache Strukur hat die sog. *Greenshields-Form*

$$J_G(\rho) = v_{\max}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right), \tag{III.8.8}$$

die für kleine Dichten ein lineares Verhalten mit der Steigung $v_{\max}$ liefert und bei der maximalen Dichte $\rho_{\max}$ verschwindet. $v_{\max}$ entspricht dabei der Freiflußgeschwindigkeit der Fahrzeuge und $\rho_{\max}$ der Dichte in einem Stau.

Man beachte, daß es sich bei der Lighthill-Whitham-Gleichung (III.8.6) um eine nichtlineare Wellengleichung handelt, denn i.a. ist v_g auch von der Dichte ρ abhängig. Wir betrachten aber zunächst den Fall, daß v_g konstant ist. Dann ist offensichtlich $\rho(x,t) = f(x - v_g t)$ mit einer beliebigen Funktion f. Die bedeutet, daß das Dichteprofil lediglich "starr" verschoben wird. Ist dagegen v_g auch dichteabängig, so wird die Gleichung nichtlinear und Formänderungen des Dichteprofils treten auf. Es stellt sich heraus, daß die allgemeine Lösung immer noch von der Form $\rho(x,t) = f(x - v_g(\rho)t)$ ist. Das Dichteprofil $\rho(x,t)$ zur Zeit t ergibt sich aus dem zur Zeit $t = 0$ durch eine *dichteabhängige* Verschiebung um $v_g(\rho)t$.

Die Lösungen der Lighthill-Whitham-Gleichung (III.8.6) entsprechen also *Dichtewellen*. Genauer spricht man hier von *kinematischen Wellen*, da sie lediglich die Folge eines Erhaltungssatzes sind. Im Gegensatz dazu sind *dynamische Wellen*, wie z.B. akustische oder elastische Wellen, Lösungen einer Bewegungsgleichung (z.B. Euler oder Navier-Stokes).

[15]Diese Gleichung wurde von Richards unabhängig von Lighthill und Whitham abgeleitet.

Im Straßenverkehr ist, wie wir schon gesehen haben, i.a. $\frac{dv}{d\rho} < 0$ und somit ist die Geschwindigkeit $v_g(\rho)$ der Dichtewelle kleiner als die lokale Geschwindigkeit v der Autos. Sie bewegt sich deshalb entgegengesetzt zur Fahrtrichtung bzw. rückwärts relativ zur Fahrbahn. Dies ist anders bei Flußströmungen, die ebenfalls von Lighthill and Whitham mit ihrer Theorie untersucht wurden. Hier ist i.a. $\frac{dv}{d\rho} > 0$ und somit $v_g(\rho) > v$.
Die Krümmung $\frac{d^2J}{d\rho^2}$ des Fundamentaldiagramms bestimmt die Geschwindigkeit, mit der sich verschiedene Dichten ausbreiten. Ist $\frac{d^2J}{d\rho^2} < 0$, so ist $\frac{dv_g}{d\rho} < 0$ und höhere Dichten bewegen sich langsamer, während es für $\frac{d^2J}{d\rho^2} > 0$ genau umgekehrt ist.
I.a. bewegen sich also Bereiche unterschiedlicher Dichte mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Holt eine Welle mit großer Geschwindigkeit eine Welle mit kleinerer Geschwindigkeit ein, so entsteht ein Dichtesprung (*Schockwelle*). Ein *Schock* ist dabei defniert als ein Objekt, das Bereiche verschiedener Dichte voneinander trennt (siehe Abb. III.8.6). Ein Schock kann sich mit

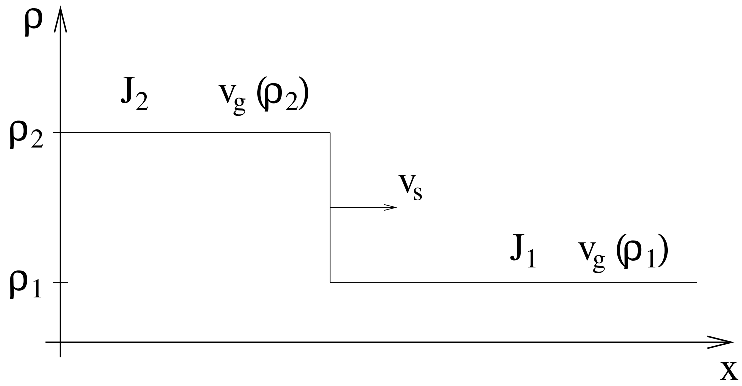

Abbildung III.8.6: Ein Schock trennt Bereiche verschiedener Dichte.

der Geschwindigkeit v_s bewegen. Man kann diese *Schockgeschwindigkeit* leicht aus der Kontinuitätsgleichung ableiten. An der Sprungstelle gilt nämlich $J_2 - J_1 = (\rho_2 - \rho_1)v_s$, woraus für die Schockgeschwindigkeit folgt

$$v_s = \frac{J_2 - J_1}{\rho_2 - \rho_1}. \tag{III.8.9}$$

Da am Schock ein Dichtesprung stattfindet ist es naheliegend, die Schockgeschwindigkeit mit der Staugeschwindigkeit zu identifizieren. Dies ist jedoch nicht unproblematisch.
Insgesamt spielen also in der LWR-Theorie drei verschiedene Geschwindigkeiten eine Rolle: Die momentane Geschwindigkeit $v(x,t)$, die Geschwindigkeit $v_g(\rho)$ einer Dichtewelle[16] und die Schockgeschwindigkeit v_s. Alle drei sind direkt aus dem Fundamentaldiagramm ablesbar, als Steigung geeigneter Geraden (siehe Abb. III.8.7).
Das LWR-Modell leidet unter zwei wesentlichen Problemen. Zum einen sind auf Grund der Beziehung $J = J(\rho)$ die Dichte und der Strom "im Gleichgewicht". Das bedeutet, daß es keine spontane Staubildung gibt, da Schocks stabile Objekte sind. Für eine spontane Staubildung müßte

[16] Diese Geschwindigkeit wird auch als *kollektive Geschwindigkeit* bezeichnet.

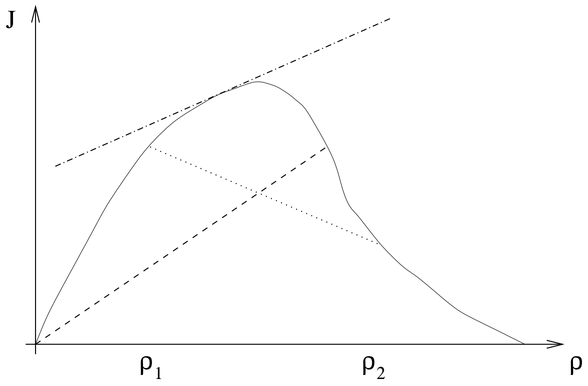

Abbildung III.8.7: Die drei zentralen Geschwindigkeiten der LWR-Theorie lassen sich als Steigungen geeigneter Geraden direkt aus dem Fundamentaldiagramm ablesen. $v(x,t)$ ist die Steigung der Sekante durch den Ursprung und den Punkt $(\rho, J(\rho))$, wobei ρ die lokale Dichte bei x ist. v_s ist die Steigung der Sekante durch $(\rho_1, J(\rho_1))$ und $(\rho_2, J(\rho_2))$, wobei ρ_j die Dichten auf beiden Seiten des Schocks bezeichnet. v_g schließlich ist die Steigung der Tangente im Punkt $(\rho, J(\rho))$.

es einen Bereich geben, in dem kleine Dichteschwankungen immer mehr anwachsen. Dies ist im LWR-Modell nicht möglich.
Zum anderen führen die Schockwellen zu numerischen Problemen (Singularitäten). Deshalb wird oft ein zusätzlicher Diffusionsterm berücksichtigt, der zu einer Glättung von Schocks führt. Statt der üblichen Beziehung $J = J(\rho)$ nimmt man nun an, daß

$$J = J_0(\rho) - D\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{III.8.10}$$

gilt. Für ein festes Dichteprofil $\rho(x,t)$, und somit festes $J_0(\rho)$, bedeutet dies, daß $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$ zu einem kleineren Fluß und $\frac{\partial \rho}{\partial x} < 0$ zu einem höheren Fluß führt. Dies läßt sich auch anschaulich motivieren. Fahrer verlangsamen (bzw. beschleunigen), wenn sie sich einem Bereich höherer (bzw. niedrigerer) Dichte nähern. Man reagiert also auch auf Dichteänderungen, nicht nur auf die Dichte selbst.
Setzt man den Ansatz (III.8.10) in die Kontinuitätsgleichung ein, so erhält man die *LWR-Gleichung mit Diffusion*

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v_g(\rho)\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \tag{III.8.11}$$

mit $v_g(\rho) = \frac{dJ_0}{d\rho}$. Für $D = 0$ reduziert sich dies auf die LWR-Gleichung (III.8.6). Für $D \neq 0$ gibt es einen zusätzlichen "Quellterm", der dissipativ ist.
Der Diffusionsterm wird gerade dann wichtig, wenn die Krümmung $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ des Dichteprofils groß ist. An einem Dichtemaximum ist die Krümmung negativ, was dann zu einer Abnahme der Dichte in der Zeit führt. Analog erhält man eine Dichtezunahme in der Nähe von Dichteminima. Dies zusammen bewirkt eine Glättung des Profils. Für $D \neq 0$ sind die Schocks daher nicht mehr "scharf", sondern erhalten eine endliche Breite.

III.8.3 Burgers-Gleichung

Für die weitere Entwicklung muß nun das Fundamentaldiagramm spezifiziert werden. Im folgenden betrachten wir die Greenshields-Form $J_G(\rho) = v_{\max}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)$ (siehe Gleichung (III.8.8)), die dem einfachsten Fundamentaldiagramm mit einem eindeutigen Maximum entspricht. J_G ist symmetrisch um die Dichte $\frac{1}{2}\rho_{\max}$, denn $J_G(\rho_{\max} - \rho) = J_G(\rho)$. Der maximale Fluß ist dabei $J_G(\frac{1}{2}\rho_{\max}) = \frac{1}{4}\rho_{\max}v_{\max} =: J_{\max}$.
Wir setzen nun die Greenshields-Beziehung in die Lighthill-Whitham-Gleichung mit Diffusion ein. Mit

$$v_g(\rho) = \frac{dJ}{d\rho} = v_{\max}\left[1 - \frac{2\rho}{\rho_{\max}}\right] \tag{III.8.12}$$

ergibt sich

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_{\max}\frac{\partial\rho}{\partial x} - +2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\,\rho\frac{\partial\rho}{\partial x} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}. \tag{III.8.13}$$

Diese Gleichung hat eine sehr ähnliche Struktur wie die *(deterministische) Burgers-Gleichung*

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \lambda\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \nu\vec{\nabla}^2\vec{v}. \tag{III.8.14}$$

Bei der Burgers-Gleichung handelt es sich um eine nichtlineare Diffisions-Gleichung, die zahlreiche Anwendungen hat, z.B. im Bereich des Oberfächenwachstums, der Turbulenz oder der Grenzflächendynamik. Der Parameter λ in (III.8.14) steuert die Stärke der Nichtlinearität und ν ist die Viskosität. Die eindimensionale Variante von (III.8.14) ist

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda v\frac{\partial v}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{III.8.15}$$

Um Gleichung (III.8.13) auf die Form (III.8.14) zu bringen, führen wir eine lineare Koordinatentransformation $x = v_{\max}t - x'$ und $t = t'$ auf die neuen Koordinaten (x', t') durch. Dann ergibt sich die *deterministische Burgers-Gleichung*

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t'} + 2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\,\rho\frac{\partial\rho}{\partial x'} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x'^2}. \qquad \text{(III.8.16)}}$$

Die Koordinatentransformation besteht aus zwei Teilen. Im ersten Schritt wird auf ein Koordinatensystem transformiert, das sich mit gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v_{\max}$ bewegt. Das bedeutet, daß in diesem System Fahrzeuge, die sich mit der Geschwindigkeit $v_{\max}$ bewegen, stillzustehen scheinen, während alle anderen Autos rückwärts fahren. In einem zweiten Schritt wird dann eine Spiegelung vorgenommen, die zu einer Umkehrung der Bewegungsrichtung führt, damit sich die Autos wieder vorwärts bewegen. Dies ändert lediglich das Vorzeichen des nichtlinearen Terms, damit die Gleichung (III.8.16) exakt die Standardform (III.8.15) der Burgers-Gleichung hat.
Die deterministische Burgers-Gleichung ist die einfachste nichtlineare Diffusionsgleichung und deshalb sehr gut untersucht. Eine offensichtliche stationäre[17] Lösung ist $\rho(x,t) = const.$. Bei

[17] d.h. $\frac{\partial\rho}{\partial t'} = 0$

einer kleiner Störung dieses Zustandes entwickelt sich eine dreieckige Struktur mit Amplitude $\propto t^{-1/2}$ und Breite $\propto t^{1/2}$, die sich dann nach rechts biegt und schließlich unstetig wird. Die Störung breitet sich dabei mit der Geschwindigkeit $2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\rho$ aus.
Für die Interpretation als Verkehrsmodell ist die Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten notwendig. Staus können sich in beide Richtungen bewegen, mit Geschwindigkeiten zwischen $-v_{\max}$ und $v_{\max}$. Die oben beschriebene Unstetigkeit entsteht dabei immer am hinteren Ende des Staus.
In Aufgabe 14 wird gezeigt, daß man die allgemeine Lösung der Burgers-Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{III.8.17}$$

ableiten kann, wobei wir die Reskalierung $2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \to 1$ gegenüber (III.8.16) vorgenommen haben. Dies gelingt mit Hilfe der *Cole-Hopf-Transformation*

$$\rho(x,t) = -\frac{2D}{\psi(x,t)} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}, \tag{III.8.18}$$

die die Burgers-Gleichung in die bekannte *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \tag{III.8.19}$$

überführt. Deren allgemeine Lösung ist wohlbekannt:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x',0) e^{-\frac{(x-x')^2}{2Dt}}. \tag{III.8.20}$$

Hieraus folgt dann mittels (III.8.18) die Lösung der Burgers-Gleichung unter der Anfangsbedingung

$$\psi(x,0) = e^{-\frac{1}{2D}\int_0^x dx' \rho(x',0)}. \tag{III.8.21}$$

Die Burgers-Gleichung löst zwar das Schockwellenproblem, kann aber die spontane Stauentstehung nicht erklären. Deshalb sind diverse Verallgemeinerungen vorgeschlagen worden, z.B die sog. *verrauschte Burgers-Gleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + 2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x'} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2} + \eta, \tag{III.8.22}$$

wobei η ein Gaußsches Rauschen ist, d.h. ein Zufallsprozeß mit

$$\langle \eta(x,t)\eta(x',t')\rangle = \eta_0 \delta(x-x')\delta(t-t'). \tag{III.8.23}$$

Diese Modifikation bewirkt, daß der homogene Zustand $\rho(x,t) = const.$ nicht mehr stationär ist.
Weiterhin hat man *verallgemeinerte Burgers-Gleichungen*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_\beta b_\beta \frac{\partial \rho^\beta}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{III.8.24}$$

mit komplizierteren Nichtlinearitäten untersucht. Offensichtlich liefert der Term mit $\beta = 2$ die zuvor betrachtete Nichtlinearität.

III.8.4 Payne-Modell und Varianten

Die bisherigen Betrachtungen zeigen, daß mit der Kontinuitätsgleichung alleine kein befriedigendes Verkehrsmodell konstruiert werden kann. Wie in der Hydrodynamik benötigt man eine dynamische Gleichung, die in diesem Zusammenhang auch als *Impulsgleichung* bezeichnet. Man orientiert sich an der Navier-Stokes-Gleichung, so daß die allgemeine Struktur von hydrodynamischen Modellen durch

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} &= D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, && \text{(III.8.25)} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} &= \nu(\rho)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} && \text{(III.8.26)} \end{aligned}}$$

gegeben ist. Die erste Gleichung ist die Kontinuitätsgleichung mit einem Diffusionsterm $D \neq 0$ zur Glättung des Dichteprofils, wobei jedoch i.a. $D = 0$ gesetzt wird. Die zweite Gleichung ist eine Navier-Stokes-Gleichung mit einer äußeren Kraft f. Diese Impulsgleichung hat eine anschauliche Bedeutung. In realem Verkehr kann man weder instant auf die Wunschgeschwindigkeit beschleunigen, noch ohne Verzögerung abbremsen. Dies impliziert eine gewisse "Trägheit" und damit die Notwendigkeit einer Impulsgleichung. In dem Modell werden Beschleunigung und Verzögerung durch den Kraftterm $\mathbf{f}$ berücksichtigt. Üblicherweise hat er zwei Bestandteile, einen Relaxationsterm und einen Wechselwirkungsterm.

Wir wollen nun das Payne-Modell ableiten und zeigen, daß es die oben angegebene Struktur hat. Wir gehen aus von der Annahme, daß eine "sichere" Geschwindigkeit $V(\rho)$ existiert, die nur von der Dichte ρ abhängt. Die Fahrer sollen ihre Geschwindigkeit so anpassen, daß die mittlere Geschwindigkeit v auf einer Zeitskala τ gegen $V(\rho)$ relaxiert:

$$v(x + v\tau, t + \tau) = V(\rho(x + \Delta x)), \tag{III.8.27}$$

wobei Δx der mittlere Fahrzeugabstand ist. Eine Taylor-Entwicklung 1. Ordnung ergibt:

$$v(x,t) + v\tau\frac{\partial v}{\partial x} + \tau\frac{\partial v}{\partial t} = V(\rho) + \frac{dV}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\Delta x + O\left((\Delta x)^2\right). \tag{III.8.28}$$

Mit $\Delta x = 1/\rho$ folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V(\rho) - v}{\tau} + \frac{1}{\rho\tau}\frac{dV}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{III.8.29}$$

Mit der Abkürzung $c_0^2 := -\frac{1}{\tau}\frac{dV}{d\rho} \geq 0$, wobei wir $\frac{dV}{d\rho} \leq 0$ ausgenutzt haben, erhalten wir dann die *Payne-Gleichung* (1971)

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V(\rho) - v}{\tau} - \frac{c_0^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}. \qquad \text{(III.8.30)}}$$

Der *Relaxationsterm* $\frac{V(\rho)-v}{\tau}$ beschreibt eine exponentielle Relaxation gegen die Wunschgeschwindigkeit $V(\rho)$. Er hat eine "rücktreibende" Wirkung, denn für $v > V(\rho)$ (bzw. $v < V(\rho)$) ist

$\frac{V(\rho)-v}{\tau} < 0$ (bzw. > 0), d.h. er führt zu einer Verringerung (bzw. Vergrößerung) der Geschwindigkeit. Man beachte, daß es einen solchen Term bei Flüssigkeiten nicht gibt. Er ist wesentlich dafür verantwortlich, daß Straßenverkehr an Engstellen langsamer fließt, während es bei Flüssigkeiten auf Grund des Bernoulli'schen Gesetzes genau andersherum ist.

Der Wechselwirkungsterm $\frac{c_0^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}$ reduziert (erhöht) die Geschwindigkeit, wenn die Dichte größer (kleiner) wird. Er hat damit eine antizipierende (vorausschauende) Wirkung. c_0 hat die Bedeutung einer Schallgeschwindigkeit, mit der sich Störungen längs des kompressiblen Fahrzeugstromes ausbreiten.

Payne konnte zeigen, daß in einem bestimmten Dichtebereich kleine Dichteschwankungen immer mehr anwachsen. Man sagt, daß Modell ist dort *instabil*. Damit lassen sich die empirisch beobachteten *stop-and-go Wellen* erklären. Allerdings können sich, wie in der Lighthill-Whitham-Theorie auch Schockwellen ausbilden. Diese sind zum einen empirisch fragwürdig und führen zum anderen zu numerischen Schwierigkeiten.

Eine Lösung des Schockwellenproblems liefert das Modell von Kühne, Kerner und Konhäuser (*K^3-Modell*), und zwar durch einen zusätzlichen *Viskositätsterm* (Kühne 1984)

$$\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{III.8.31}$$

Dieser Term bewirkt für $\nu > 0$ eine Glättung des Geschwindigkeitsprofils, ganz analog zum Diffusionsterm zur Glättung des Dichteprofils. Damit lassen sich Dichte- und Geschwindigkeitssprünge vermeiden, unter gleichzeitiger Erhaltung der Instabilität gegen Stauentstehung. Kerner und Konhäuser (1993) haben sich von der Analogie zur Navier-Stokes-Gleichung für gewöhnliche kompressible Flüssigkeiten leiten lassen und einen Viskositätskoeffizienten der Form

$$\nu(\rho) = \frac{\eta_0}{\rho} \tag{III.8.32}$$

vorgeschlagen. Außerdem benutzen sie eine Wunschgeschwindigkeit in Form einer Fermi-Dirac-Verteilung

$$V(\rho) = v_0\left[\frac{1}{1+\exp\left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}-\alpha_1\right)/\alpha_2} - \alpha_3\right] \tag{III.8.33}$$

mit den anzupassenden Parametern α_j. Die Impulsgleichung des K^3-Modells lautet daher

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{c_0^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{V(\rho)-v}{\tau(\rho)} + \frac{\eta_0}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \qquad \text{(III.8.34)}}$$

Aus numerischen Untersuchungen weiß man, daß das K^3-Modell ein echt realistisches Verhalten zeigt, z.B. die Entstehung von Dichteclustern (Staus). Diese Cluster können zu größeren verschmelzen, wenn ihre Geschwindigkeit unterschiedlich ist. Große Cluster bewegen sich dann alle mit der gleichen Geschwindigkeit. Interessant ist auch die Existenz von Bereichen *subkritischer Instabilität*. Hier zeigt sich die Instabilität nur, wenn die Störung eine gewisse Größe überschreitet. Schließlich läßt sich auch die Entstehung von Stau-Kaskaden beobachten, die man als stop-and-go Verkehr interpretieren kann.

Die allgemeinen Prinzipien der Stauentstehung in hydrodynamischen Modellen kann man mit Hilfe einer linearen Stabilitätsanalyse untersuchen. Kontinuitäts- und Impulsgleichung haben die stationäre und räumlich homogene Lösung

$$\rho(x,t) = \rho_0 \qquad \text{und} \qquad v(x,t) = V(\rho_0). \tag{III.8.35}$$

Um die die Stabilität dieser Lösung gegen eine kleine Störung $\delta\rho(x,t)$ und $\delta v(x,t)$ zu untersuchen, betrachten wir

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \delta\rho(x,t) \qquad \text{mit} \quad \delta\rho(x,t) \ll \rho_0, \tag{III.8.36}$$
$$v(x,t) = v_0 + \delta v(x,t) \qquad \text{mit} \quad \delta v(x,t) \ll v_0, \tag{III.8.37}$$

wobei die Abkürzung $v_0 := V(\rho_0)$ eingeführt wurde. Wenn wir diesen Ansatz in die Gleichungen (III.8.25) und (III.8.26) und anschließend linearisiert, erhält man Lösungen der Form $\delta\rho(x,t) = \bar{\rho}e^{ikx+(\lambda-i\omega)t}$ und $\delta v(x,t) = \bar{v}e^{ikx+(\lambda-i\omega)t}$. Je nach Vorzeichen von λ wachsen daher die Störungen an oder sterben aus. In ersterem Fall sagt man, daß die homogene Lösung instabil ist, im zweiten Fall ist sie stabil. Eine genauere Analyse zeigt die Existenz von fünf Bereichen (siehe Abb. III.8.8):

$\rho < \rho_{c_1}$: jede Störung verschwindet

$\rho_{c_1} < \rho < \rho_{c_2}$: ist die Störung groß genug, so entsteht ein *wide jam*, d.h. die kritische Amplitude ist endlich

$\rho_{c_2} < \rho < \rho_{c_3}$: es entsteht eine Abfolge von Staus (Stop-and-Go)

$\rho_{c_3} < \rho < \rho_{c_4}$: ist die Störung groß genug, so entsteht eine *Dipolschicht* (Anticluster)

$\rho_{c_4} < \rho$: jede Störung verschwindet

Dabei sind die kritischen Dichten ρ_{c_j} abhängig von der Druckfunktion P, der Relaxationszeit τ und der Wunschgeschwindigkeit $V(\rho)$.
Anschaulich funktioniert der Instabilitätsmechanismus typischerweise so: Mit wachsender Dichte sinkt die mittlere Geschwindigkeit $v \approx V(\rho_0)$. Auf Grund der Kontinuitätsgleichung kommt es dann zu einer weiteren Verdichtung, wenn der Glättungseffekt[18] der Viskosität und die Ausgleichstendenz durch den Druckzuwachs zu schwach sind.

[18] Wegdämpfen von Schwingungen kleiner Wellenlänge

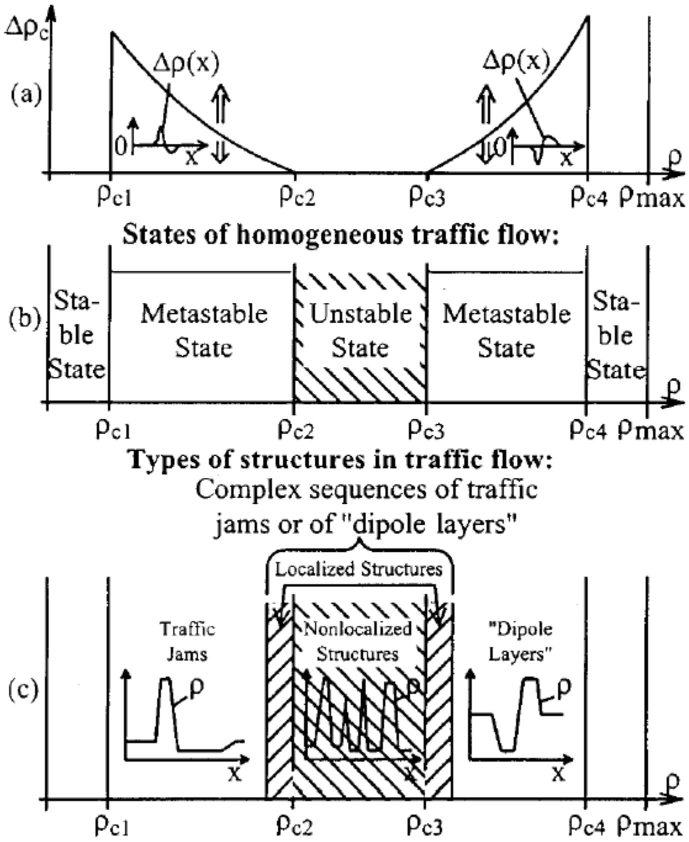

Abbildung III.8.8: Staubildung in hydrodynamischen Modellen nach Kerner, Konhäuser und Schilke (1995,1996): Gezeigt sind (a) die minimalen Amplituden für einen Zusammenbruch, (b) die Stabilität der homogenen Zustände und (c) die typische Form der sich ausbildenden Strukturen.

Kapitel IV

Hydrodynamik und Statistische Physik

Bisher haben wir Flüssigkeiten durch geeignete Felder, z.B. $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, $\rho(\mathbf{r},t)$ oder auch dem Temperaturfeld $T(\mathbf{r},t)$, beschrieben. Die Bewegungsgleichungen haben wir dann in Analogie zur Newton'schen Mechanik z.B. aus Erhaltungssätzen abgeleitet. Ein Nachteil dieser Vorgehensweise ist, daß wir Stoffgrößen wie die Viskosität η nicht berechnen konnten, sie müssen als Parameter in die Modelle gesteckt werden. Nun wissen wir aber, daß Fluide aus Molekülen bestehen, die sich (in guter Näherung) gemäß den Gesetzen der Mechanik bewegen. Sind also die Kräfte zwischen den Molekülen bekannt, so sollten die hydrodynamischen Gleichungen inklusive der Stoffgrößen mit Methoden der statistischen Physik ableitbar sein. Wir suchen also nach einer Beschreibung, die die Existenz von Molekülen berücksichtigt ohne allerdings die vollen Informationen zu berücksichtigen.

IV.1 Beschreibung im Phasenraum

Eine vollständige Beschreibung eines Fluids würde die Kenntnis aller Orte und Geschwindigkeiten beinhalten. Da wir es aber mit sehr vielen Teilchen (von der Größenordnung 10^{23}) zu tun haben, können wir nur Mittelwerte über viele Teilchen wirklich messen, z.B. die mittlere Energie oder Durchschnittsgeschwindigkeit in einem Teilvolumen. Daher ist aus praktischen Gründen im Sinne einer Reduktion der Informationsmenge sinnvoll, das Vielteilchensystem durch eine Verteilungsfunktion $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ im Phasenraum $(\mathbf{r},\mathbf{v})$ zu beschreiben. Dabei ist dann

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3r d^3v \;=\; \text{mittlere Anzahl der Teilchen im Volumen } d^3r \text{ um } \mathbf{r}\text{, deren mittlere Geschwindigkeit im Intervall } d^3v \text{ um } \mathbf{v} \text{ liegt.} \tag{IV.1.1}$$

Diese Größe kann man im Prinzip aus der vollständigen Information berechnen. Für Teilchen mit inneren Freiheitsgraden, z.B. dem Drehimpuls $\mathcal{L}$, definiert man in analoger Weise die Funktion $f(\mathbf{r},\mathbf{v},\mathcal{L},t)$.

Jeder Phasenraumpunkt $(\mathbf{r},\mathbf{v})$ charakterisiert die Bewegung eines einzelnen Teilchens vollständig, d.h. die Kenntnis der Verteilungsfunktion zu einem Zeitpunkt genügt, um den Zustand zu jedem folgenden berechnen zu können. Die Verteilungsfunktion erlaubt auch die Beschreibung von Systemen fernab vom Gleichgewicht, z.B. eines Gases, das sich in einer Ecke des Behälters

sammelt. Wir erwarten aber, daß i.a. die Stöße zwischen den Teilchen zu einem *lokalen* Gleichgewicht führen, d.h. in einem kleinen Volumenelement kann man thermodynamische Zustandsgrößen T, p etc. einführen.
Unser wesentliches Ziel wird es sein, einen Zusammenhang zwischen den makroskopischen Feldern und der (mikroskopischen) Verteilungsfunktion herzustellen. Nach der Bestimmung der Verteilungsfunktion in Abhängigkeit von T, p etc. kann man dann die hydrodynamischen Gleichungen für die zeitliche Entwicklung der Felder ableiten.
Wie schon betont, enthält die Verteilungsfunktion weniger Informationen als die vollständige Angabe der Orte und Geschwindigkeiten aller Teilchen. Z.B. enthält sie keine Informationen über Korrelationen. Wenn z.B. Teilchen aneinander gebunden sind, also sehr stark korreliert sind, dann verlaufen die Stöße zwischen den Molekülen anders. In der Beschreibung, die wir im folgenden entwickeln wollen, gilt aber z.B. für die Wahrscheinlichkeit $W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, zwei Teilchen mit den Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ am gleichen Ort zu finden, immer $W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = W(\mathbf{v}_1)W(\mathbf{v}_2)$. Das Verschwinden der Korrelationen ist eine Folge der *Boltzmann-Hypothese der vollständigen molekularen Unordnung* ("molekulares Chaos").

IV.1.1 Mittelwerte

Die makroskopischen Felder sind Funktionen des Ortes $\mathbf{r}$ und entstehen durch Mittelung von mikroskopischen Größen im Phasenraum über die Geschwindigkeiten. Direkt aus der Definition der Verteilungsfunktion folgt, daß die mittlere Zahl der Teilchen pro Volumenelement durch

$$n(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3v \tag{IV.1.2}$$

gegeben ist. Allgemein sind lokale Mittelwerte einer mikroskopischen Größe, die durch die Funktion $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ im Phasenraum beschrieben wird, dann durch

$$\bar{g}(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(\mathbf{r})} \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3v \tag{IV.1.3}$$

gegeben. Dabei bezeichnet $\bar{g}(\mathbf{r})$ den mittleren Wert von g pro Teilchen. Manchmal wir der Faktor $\frac{1}{n}$ weglassen, so daß sich der mittlere Wert pro Volumen ergibt. Besonders wichtige Funktionen sind die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(\mathbf{r})} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3v \tag{IV.1.4}$$

und die mittlere kinetische Energie

$$\overline{\epsilon_k}(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(\mathbf{r})} \int \frac{m}{2} v^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3v. \tag{IV.1.5}$$

Später werden wir häufiger die mikroskopische Größe

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}) := \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) \tag{IV.1.6}$$

benötigen. Deren Mittelwert verschwindet wegen

$$\overline{\mathbf{v}'} = \overline{\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}} = \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} = 0. \tag{IV.1.7}$$

Interessant ist ihr Zusammenhang mit der kinetischen Energie, die durch $\epsilon_k = \frac{m}{2}(\mathbf{v}' + \bar{\mathbf{v}})^2 = \frac{m}{2}(\mathbf{v}'^2 + 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^2)$ gegeben ist:

$$\overline{\epsilon_k} = \frac{m}{2}\overline{\mathbf{v}'^2} + \frac{m}{2}\overline{v^2}. \tag{IV.1.8}$$

Der erste Anteil entspricht der inneren Energie und ist mit der Temperatur T verbunden. Der zweite Anteil ist die makroskopische kinetische Energie auf Grund der Bewegung des makroskopischen Flüssigkeitselements.

Somit haben wir bereits die Verbindung zwischen der statistischen Mechanik und der Hydrodynamik hergestellt. Aus der Kenntnis der Verteilungsfunktion $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ können wir direkt die (makroskopischen) Felder bestimmen. Noch unklar hingegen ist die zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion und die daraus folgende zeitliche Änderung der Felder. Außerdem ist nicht klar, ob die Kenntnis der makroskopischen Größen ausreicht, um deren Zeitentwicklung vorherzusagen. Im Prinzip könnte es zu einem gegebenen (makroskopischen) Flüssigkeitszustand verschiedene Verteilungsfunktionen geben, die auf die gleichen Felder führen. Es stellt sich dann die Frage, ob diese unterschiedlichen Funktionen zu späteren Zeiten wirklich alle zu den selben Feldwerten führen. Diese Frage wollen wir nicht weiter betrachten. Sie ist auch nur zum Teil positiv beantwortet.

IV.1.2 Substantielle Ableitung

Wie wir schon bei der makroskopischen Beschreibung gesehen haben, ändert sich auch die Verteilungsfunktion durch zwei Vorgänge: 1) Teilchen bewegen sich von Ort zu Ort durch ihre Geschwindigkeit; 2) durch die Kräfte zwischen ihnen. Da die relevanten Kräfte i.a. kurzreichweitig sind, spricht man auch von *Stößen*.

Wir betrachten zunächst 1). Die Teilchen, die sich zur Zeit $t + dt$ im Phasenraumvolumen um $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ befanden, befanden sich zur t in $(\mathbf{r} - \mathbf{v}dt, \mathbf{v})$. Somit gilt für die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + dt)d^3r d^3v = f(\mathbf{r} - \mathbf{v}dt, \mathbf{v}, t)d^3r' d^3v'$. Auf Grund des Satzes von Liouville ändert sich das von den Teilchen eingenommene Phasenraumvolumen während der Bewegung aber nicht, d.h. $d^3r d^3v = d^3r' d^3v'$ und somit

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + dt) = f(\mathbf{r} - \mathbf{v}dt, \mathbf{v}, t). \tag{IV.1.9}$$

Wir nehmen nun an, daß dt sehr klein ist. Außerdem können wir voraussetzen, daß f als eine Verteilungsfunktion hinreichen glatt ist. Eine Taylorentwicklung liefert daher

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \tag{IV.1.10}$$

bzw.

$$\frac{Df}{Dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0. \tag{IV.1.11}$$

Dabei bezeichnen wir im folgenden die schon bekannte substantielle Ableitung mit $\frac{D}{Dt}$. Sie beschreibt die Änderung einer Größe in einem Volumenelement, wenn man sich mit dem Element mitbewegt.
Wirkt außerdem eine zusätzliche äußere Kraft $\mathbf{F}$ (z.B. die Gravitation oder ein elektrisches Feld), so stammen die Teilchen in $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + dt)$ aus $(\mathbf{r} - \mathbf{v}dt, \mathbf{v} - \frac{\mathbf{F}}{m}dt, t)$. Das Liouville'sche Theorem gilt auch bei Anwesenheit äußerer Kräfte, so daß wir

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v f = 0 \qquad \text{(IV.1.12)}}$$

finden. Dabei bezeichnet ∇_v den Gradienten bzgl. der Geschwindigkeitskomponenten. Diese Gleichung wird manchmal auch als *Liouville-Gleichung* bezeichnet. Sie ist beschreibt nur reversible Prozesse. Im folgenden werden wir immer den Fall $\mathbf{F} = 0$ verschwindender äußerer Kräfte betrachten!

IV.1.3 Stoßterm

Wir wenden uns nun den Prozessen 2) zu. Da sich die Verteilungsfunktion auch durch Stösse ändern kann, ist die gerade abgeleitete Liouville-Gleichung durch einen geeigneten Quellterm zu modifizieren. Dazu betrachten wir den Stoß von zwei Teilchen, bei dem sich ihre Geschwindigkeiten von $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ zu $(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$ ändern. Es ist naheliegend anzunehmen, daß die Zahl der 2-Teilchen-Stöße am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit t proportional zur Zahl der Teilchen mit den Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$. Bezeichnen wir den Proportionalitätsfaktor mit $w(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, so ist die durch die Stöße verursachte Änderung der Verteilungsfunktion durch

$$w(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2) d^3v_1 d^3v_2 \qquad \text{(IV.1.13)}$$

gegeben. Dabei ist $w(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$, falls $\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 \neq \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ (Impulserhaltung) oder ${\mathbf{v}'_1}^2 + {\mathbf{v}'_2}^2 \neq {\mathbf{v}_1}^2 + {\mathbf{v}_2}^2$ (Energiererhaltung) [1]. Außerdem sollte auf Grund der Zeitumkehrsymmetrie Stöße in beider Richtung mit gleicher Wahrscheinlichkeit ablaufen, d.h.

$$w(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = w(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2; \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2). \qquad \text{(IV.1.14)}$$

Wir bestimmen nun, wieviele Teilchen durch Stöße in ein bestimmtes Phasenraumvolumen um $\mathbf{v}$ gebracht werden und wieviele sich daraus entfernen. Der Zuwachs[2] entsteht durch alle Stöße aus beliebigen Anfangsgeschwindigkeiten $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$ in die Endgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ und eine beliebige andere Endgeschwindigkeit $\mathbf{v}_1$. Insgesamt hat man daher

$$\frac{dN_{\text{Gewinn}}}{dt}(\mathbf{v}) = \int w(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1; \mathbf{v}', \mathbf{v}'_1) f(\mathbf{v}') f(\mathbf{v}'_1) d^3v' d^3v'_1 d^3v_1. \qquad \text{(IV.1.15)}$$

[1] Wir nehmen im folgenden an, daß wir es nur mit einer Teilchensorte zu tun haben.

[2] Man beachte, daß wir hier die Anfangsgeschwindigkeiten durch einen Strich kennzeichnen, nicht die Endgeschwindigkeiten!

In analoger Weise macht man sich klar, daß der Verlust im Volumen um $\mathbf{v}$ durch

$$\frac{dN_{\text{Verlust}}}{dt}(\mathbf{v}) = \int w(\mathbf{v}', \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}, \mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}_1) d^3v' d^3v_1' d^3v_1. \tag{IV.1.16}$$

Die Differenz ergibt die Zahl der Teilchen, die sich pro Zeiteinheit durch Stöße in das Phasenraumvolumen um $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ hineinbewegen, also der mitbewegte oder substantielle Zuwachs.
Somit erhalten wir folgende Gleichung für die Dynamik der Verteilungsfunktion (bei Abwesenheit äußerer Kräfte):

$$\boxed{\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \int w(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1; \mathbf{v}', \mathbf{v}_1')(f' f_1' - f f_1) d^3v' d^3v_1' d^3v_1 \qquad \text{(IV.1.17)}}$$

mit den Abkürzungen

$$f := f(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \qquad f' := f(\mathbf{r}', \mathbf{v}'), \qquad f_1 := f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1) \qquad f_1' := f(\mathbf{r}_1', \mathbf{v}_1'). \tag{IV.1.18}$$

Die rechte Seite von Gleichung (IV.1.17) bezeichnet man auch als *Stoßintegral* und wird manchmal mit St f abgekürzt. Die Gleichung selbst heißt *Boltzmann-Gleichung* (oder auch *Maxwell-Boltzmann-Gleichung*). Sie beinhaltet über die Stöße auch irreversible Prozesse und bildet die Grundlage der *kinetischen Gastheorie*, d.h. der Phasenraumbeschreibung von Gasen und Flüssigkeiten.
Wir wollen uns noch die Bedeutung des Proportionalitätsfaktors w anhand einer einfachen Überlegung verdeutlichen. Dazu betrachten wir ein Volumen V mit n_1V Teilchen der Sorte 1 und n_2V Teilchen der Sorte 2. Teilchen der Sorte 1 bewegen sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_1$, die Teilchen der Sorte 2 sollen ruhen. Ein Teilchen vom Typ 1 durchläuft dann in der Zeit Δt ein Volumen $\Delta V = \sigma|\mathbf{v}_1|\Delta t$, wobei σ der Querschnitt der Teilchen sei. In diesem Volumen treffen sie im Mittel auf $n_2\Delta V$ Teilchen von Typ 2. Pro Volumen und Zeit gibt es daher $N = \frac{V\Delta t}{n}{}_1 V n_2 \sigma v_1 \Delta t = n_1 n_2 \sigma v_1$ Stöße. Wenn die Teilchen der Sorte 2 auch mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}_2$ bewegen, kann man eine analoge Überlegung in einem Bezugssystem anstellen, in dem diese Teilchen ruhen. Dann ergibt sich

$$N = n_1 n_2 \sigma |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|. \tag{IV.1.19}$$

Betrachten wir solche Prozesse im Phasenraum, so sind die Dichten n_j durch die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j)$ zu ersetzen. Zur Berücksichtigung der verschiedenen möglichen Endgeschwindigkeiten $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}_1'$ führt statt des (geometrischen) Querschnittes σ man den differentiellen Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d^3v' d^3v_1'}$ ein, der angibt, wieviele Teilchen in einen bestimmten Geschwindigkeitsbereich gestreut werden. Damit wird aus (IV.1.19) dann $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2) \frac{d\sigma}{d^3v' d^3v_1'}$. Deshalb ist

$$w = \frac{d\sigma}{d^3v' d^3v_1'} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \tag{IV.1.20}$$

und das Stoßintegral schreibt sich als

$$\text{St } f = \int \frac{d\sigma}{d^3v' d^3v_1'} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| (f' f_1' - f f_1) d^3v' d^3v_1' d^3v_1. \tag{IV.1.21}$$

Diese Ausdruck ist manchmal für praktische Berechungen zweckmässiger.
Speziell für ein System aus starren Kugeln vom Radius a kann man zeigen, daß in geeigneten Kugelkoordinaten (im Geschwindigkeitsraum) gilt

$$\frac{d\sigma}{d^3v'd^3v_1'}d^3v'd^3v_1' = \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega \qquad \text{mit} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = 4a\cos\vartheta. \tag{IV.1.22}$$

Damit wird das Stoßintegral für starre Kugeln zu

$$\mathrm{St}\ f = 2a^2 \int |\mathbf{V}\cdot\mathbf{e}|(f'f_1' - ff_1)d^3v_1 d\Omega \tag{IV.1.23}$$

mit $\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ und dem Einheitsvektor $\mathbf{e}$ in Richtung von $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$.

IV.2 Gleichgewichtsverteilung

Wir wollen nun die lokalen Gleichgewichtsverteilungen der Boltzmann-Gleichung bestimmen. Diese sind dadurch charakterisiert, daß der Stoßterm verschwindet, d.h. für alle $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$ gilt $f_1'f_2' = f_1f_2$. Man kann sich leicht davon überzeugen (unter Beachtung von Impuls- und Energieerhaltung!), daß diese Bedingungen von der *Maxwell-Verteilung*

$$f_0(\mathbf{v}) = ae^{-\gamma(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2} \tag{IV.2.1}$$

erfüllt wird. Wir wollen nun den Zusammenhang der Parameter a, γ und $\mathbf{V}$ mit makroskopischen Größen herstellen. Dazu bestimmen wir die Teilchenzahldichte

$$n = \int f_0(\mathbf{v})d^3v = a\left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{3/2}, \tag{IV.2.2}$$

die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{n}\int \mathbf{v}f_0(\mathbf{v})d^3v = \mathbf{V} \tag{IV.2.3}$$

und die mittlere kinetische Energie

$$\overline{\epsilon_k} = \frac{1}{n}\int \frac{m}{2}v^2 f_0(\mathbf{v})d^3v = \frac{m}{2}\frac{3}{2\gamma} + \frac{m}{2}\mathbf{V}^2. \tag{IV.2.4}$$

In allen Berechnungen tauchen Gauß-Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a^3} \tag{IV.2.5}$$

etc. auf. Die entsprechenden Integrale über ungerade Potenzen x^{2n+1} verschwinden.

Somit sehen wir, daß der Parameter $\mathbf{V}$ mit der makroskopischen Geschwindigkeit $\bar{\mathbf{v}}$ zu identifizieren ist. Die kinetische Energie hat zwei Bestandteile, einen thermischen und die makroskopische kinetische Energie. Nach dem Gleichverteilungssatz können wir den thermischen Anteil $\bar{\epsilon}_{\text{therm}} = \frac{m}{2}\frac{3}{2\gamma}$ mit der Temperatur T in Verbindung bringen:

$$kT = \frac{2}{3}\bar{\epsilon}_{\text{therm}} = \frac{m}{2\gamma}. \tag{IV.2.6}$$

Damit ist auch der Parameter γ über $\gamma = \frac{m}{2kT}$ durch eine makroskopische Größe bestimmt. Der Parameter a ergibt sich schließlich über den Zusammenhang mit der Teilchenzahldichte. Daher lautet die Maxwell-Verteilung

$$\boxed{f_0(n, \mathbf{V}, T; \mathbf{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2kT}(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2\right) \qquad \text{(IV.2.7)}}$$

IV.3 Transportgleichung

Die Boltzmann-Gleichung bestimmt die Zeitentwicklung der Verteilungsfunktion f. Im folgenden wollen wir hieraus die Zeitentwicklung einer makroskopischen Größe $\bar{g}(\mathbf{r})$ ableiten. Dazu multiplizieren wir die Boltzmann-Gleichung (IV.1.17) mit der entsprechenden Funktion $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ im Phasenraum und integrieren über die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v})\frac{\partial f}{\partial t} d^3v \quad &+ \quad \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \nabla f) d^3v \\ &:= \quad \int w(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1; \mathbf{v}', \mathbf{v}_1') g(\mathbf{r}, \mathbf{v})(f' f_1' - f f_1) d^3v d^3v' d^3v_1' d^3v_1 =: J(g). \end{aligned} \tag{IV.3.1}$$

Die Größe $J(g)$ wird auch als *Stoßmoment von g* bezeichnet. Durch Anwendung der Produktregel auf die Integranden können wir (IV.3.1) in eine handlichere Form bringen, die man als *Transportgleichung von Maxwell*[3] bezeichnet:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(n\bar{g}) + \nabla \cdot (n\overline{g\mathbf{v}}) - n\overline{\frac{Dg}{Dt}} = J(g). \qquad \text{(IV.3.2)}}$$

Hierbei sind die Mittelwerte durch (IV.1.3). Der Mittelwert der substantiellen Ableitung von g verschwindet für viele Größen $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, die wir im folgenden betrachten werden, da sie nur $\mathbf{v}$ abhängen, aber nicht von $\mathbf{r}$.

Gleichung (IV.3.2) gilt bei verschwindenden äußeren Kräften. Lassen wir solche Kräfte zu, so tritt auf der linken Seite von (IV.3.1) ein weiterer Term auf, der die Ableitung von f nach $\mathbf{v}$ enthält. Wendet man hier die Produktregel an, so entsteht ein Integral, das auf Grund des Gaußschen Satzes verschwindet. Das andere entstehende Integral modifiziert den Term $\overline{\frac{Dg}{Dt}}$ zu $\overline{\frac{Dg}{Dt} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_v g}$. Dieser Zusatzterm verschwindet i.a. auch nicht, wenn g nur von $\mathbf{v}$ abhängt.

[3] Manchmal auch als *Esnkog-Gleichung*

Die Transportgleichung von Maxwell hat die Form einer Transportgleichung mit Quelltermen. In integraler Form lautet sie in dem Fall, daß die substantielle Ableitung nicht beiträgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int n(\mathbf{v})\bar{g}(\mathbf{r})d^3 = \int J(g)(\mathbf{r})d^3r - \oint n\overline{g\mathbf{v}}\cdot d\mathbf{f}. \tag{IV.3.3}$$

Auf der linken Seite steht die Änderung der Größe g im Volumen V. Das zweite Integral auf der rechten Seite ist der Fluß durch die Oberfläche des Volumens. Daher müssen wir das andere Integral als die in V entstehende Menge der Größe g interpretieren. Daher ist $J(g)$ ein Quelldichte, d.h. das Stoßmoment von g beschreibt die Erzeugung/Vernichtung von g durch Stöße.
Besonders interessant sind die Größen, deren Stoßmomente für jede Verteilungsfunktion f verschwinden. Diese existieren, weil wir bestimmte Forderungen (Energie-, Impuls-, Teilchenzahlerhaltung, Zeitumkehrinvarianz, Gleichartigkeit der Teilchen) an w gestellt haben. Tatsächlich folgt aus diesen Forderungen

$$\begin{aligned} J(g) &= \int wg(\mathbf{v})(f'f_1' - ff_1)d^3vd^3v'd^3v_1'd^3v_1 \\ &= \int wg(\mathbf{v}_1)(f'f_1' - ff_1)d^3vd^3v'd^3v_1'd^3v_1 \\ &= -\int wg(\mathbf{v}')(f'f_1' - ff_1)d^3vd^3v'd^3v_1'd^3v_1 \\ &= -\int wg(\mathbf{v}_1')(f'f_1' - ff_1)d^3vd^3v'd^3v_1'd^3v_1, \end{aligned} \tag{IV.3.4}$$

wobei w immer für $w(\mathbf{v},\mathbf{v}_1;\mathbf{v}',\mathbf{v}_1')$ steht. Die erste Identität ist die Definition, die zweite folgt aus der Gleichartigkeit der Teilchen, die die Vertauschung der ersten beiden Argumente von w unter dem Integral erlaubt. Für die anderen Identitäten muß man die Zeitumkehrinvarianz (IV.1.14) ausnutzen, wobei das Vorzeichen durch den Faktor $f'f_1' - ff_1$ verursacht wird.
Bilden wir die Summe dieser vier Ausdrücke, so folgt

$$J(g) = \frac{1}{4}\int w(g + g_1 - g' - g_1')(f'f_1' - ff_1)d^3vd^3v'd^3v_1'd^3v_1, \tag{IV.3.5}$$

wobei wir für g eine ähnlich suggestive Notation wie für f verwendet haben. Aus der Gleichung lesen wir ab, daß

$$J(g) = 0 \text{ für alle } f \quad \Longleftrightarrow \quad w(g + g_1 - g' - g_1') = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{r},\mathbf{v},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}',\mathbf{v}_1'. \tag{IV.3.6}$$

Größen, die diese Bedingung erfüllen, bezeichnet man als *Stoßinvarianten*. Ausführlich lautet die rechte Seite

$$w(\mathbf{v},\mathbf{v}_1;\mathbf{v}',\mathbf{v}_1')\left(g(\mathbf{v},\mathbf{v}) + g(\mathbf{r},\mathbf{v}_1) - g(\mathbf{r},\mathbf{v}') - g(\mathbf{r},\mathbf{v}_1')\right) = 0. \tag{IV.3.7}$$

Diese Bedingung vereinfacht sich, wenn man bedenkt, daß $w(\mathbf{v},\mathbf{v}_1;\mathbf{v}',\mathbf{v}_1') = 0$ ist, wenn die Geschwindigkeiten nicht die Impulserhaltung $\mathbf{v}+\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'+\mathbf{v}_1'$ und die Energieerhaltung $\mathbf{v}^2 + {\mathbf{v}_1}^2 = \mathbf{v}'^2 + {\mathbf{v}_1'}^2$ erfüllen. Damit sieht man dann schnell ein, daß es fünf Stoßinvarianten gibt, nämlich $g = 1$ (als Folge der Teilchenzahlerhaltung), $g = \mathbf{v}$ (Impulserhaltung) und $g = v^2$ (Energieerhaltung).

IV.4 Die hydrodynamischen Grundgleichungen

Unser nächstes Ziel ist die Ableitung der hydrodynamischen Gleichungen aus der Transportgleichung. In der Hydrodynamik haben wir die Felder $n(\mathbf{r})$ der Teilchendichte, $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ der Geschwindigkeit und $T(\mathbf{r})$ der Temperatur[4] betrachtet. Diese Felder sind die örtlichen Mittelwerte der durch die Funktionen $g = 1$, $g = \mathbf{v}$ und $g = \frac{1}{3k}mv^2$ gegebenen mikroskopischen Größen. Dies sind aber gerade die Stoßinvarianten, d.h. die entsprechenden Transportgleichungen vereinfachen sich drastisch, da der Stoßterm verschwindet.

IV.4.1 Erhaltung der Teilchenzahl

Zunächst untersuchen wir, welcher makroskopischen Gleichung die Transportgleichung für $g = 1$ entspricht. Zunächst ergibt sich aus (IV.3.2)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\bar{\mathbf{v}}) = 0. \tag{IV.4.1}$$

Hieraus ergibt sich nach Multiplikation mit der Molekülmasse m und mit $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{V}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0, \tag{IV.4.2}$$

also gerade die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik. Sie gilt natürlich auch in der kinetischen Theorie exakt.

IV.4.2 Erhaltung des Impulses

Als Nächstes schauen wir uns den Fall $g = v_i$ näher an. Nun lautet die Transportgleichung (unter Beachtung der Summenkonvention)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\overline{v_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{v_i v_j}) = 0. \tag{IV.4.3}$$

Unter Ausnutzung der bereits abgeleiteten Kontinuitätsgleichung haben wir

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) = V_i\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial V_i}{\partial t} = -V_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j) + \rho\frac{\partial V_i}{\partial t} \tag{IV.4.4}$$

und damit können wir die erste Gleichung in die Form

$$\rho\frac{\partial V_i}{\partial t} + (\overline{v_i v_j} - V_i V_j)\frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho\left(-V_i\frac{\partial V_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v_i v_j}\right) = 0 \tag{IV.4.5}$$

bringen. Für den Mittelwert $\overline{v_i v_j}$ gilt wegen $\overline{v'_j} = 0$

$$\overline{v_i v_j} = \overline{(v'_i + V_i)(v'_j + V_j)} = \overline{v'_i v'_j} + V_i V_j. \tag{IV.4.6}$$

[4] Die Temperatur ergibt sich aus dem Gleichverteilungssatz aus der kinetischen Energie.

Damit folgt für die Tensordivergenz

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v_i v_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v'_i v'_j} + V_i\frac{\partial V_j}{\partial x_j} + V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \tag{IV.4.7}$$

und somit

$$-V_i\frac{\partial V_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v_i v_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v'_i v'_j} + V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}. \tag{IV.4.8}$$

Setzt man dies in (IV.4.5) ein, so folgt

$$\rho\frac{\partial V_i}{\partial t} + \overline{v'_i v'_j}\frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{v'_i v'_j} + \rho V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)V_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{v'_i v'_j}) = 0. \tag{IV.4.9}$$

Der erste Term des mittleren Ausdrucks ist die substantielle Ableitung von V, d.h. die tatsächliche Beschleunigung des Flüssigkeitselementes. Der zweite Term ist die wirkende Kraft, ausgedrückt als Tensordivergenz des Impulsstromes $\rho\overline{v'_i v'_j}$. Dieser gibt an, wieviel Impuls pro Zeiteinheit in i-Richtung durch eine Fläche senkrecht zur j-Achse fließt, d.h. welche Kraft auf diese Fläche ausgeübt wird. Damit können wir die Diagonalkomponenten mit dem Druck der Flüssigkeit in diesem Volumenelement auf die Nachbarelemente identifizieren. Wir definieren daher den *mittleren isotropen Druck* definieren durch

$$\boxed{p := \frac{\rho}{3}\sum_{j=1}^{3}\overline{v'_j v'_j} = \frac{\rho}{3}\overline{\mathbf{v}'^2}. \qquad \text{(IV.4.10)}}$$

Für ein ideales Gas sind die Diagonalelemente auf Grund der Isotropie alle gleich und die Außerdiagonalelemente verschwinden, d.h.

$$\overline{v'_i v'_j}^{\,0} = \frac{p}{\rho}\delta_{ij}. \tag{IV.4.11}$$

Die Abweichung von diesem Idealzustand mißt der *Spannungstensor*

$$\boxed{\sigma_{ij} := \rho\overline{v'_i v'_j} - p\delta_{ij}, \qquad \text{(IV.4.12)}}$$

der auch als *zweites Moment* der Geschwindigkeitsverteilung bezeichnet wird, da er ein Mittelwert über ein quadratisches Polynom ist. Man beachte, daß sich der hier eingeführte Spannungstensor durch den in Kapitel III.1 durch das Vorzeichen unterscheidet!
Damit wird aus Gleichung (IV.4.9)

$$\rho\frac{DV_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{IV.4.13}$$

bzw. (mit der Tensordivergenz Div)

$$\boxed{\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p - \operatorname{Div}\sigma. \qquad \text{(IV.4.14)}}$$

Je nach Wahl des Spannungstensors σ entspricht dies der Euler- oder Navier-Stokes-Gleichung. Wir sehen hier explizit, daß die Bewegungsgleichung aus der Impulserhaltung folgt. Somit wird klar, warum wir sie früher auch als *Impulsgleichung* bezeichnet haben.
Die Berechnung des Spannungstensors σ erfordert über die Erhaltungssätze hinaus die Kenntnis der Verteilungsfunktion (oder ihrer Momente bis zur 2. Ordnung). Diese ergeben sich nicht direkt aus den makroskopischen Feldern. Wir machen daher einen geeigneten Ansatz für die Verteilungsfunktion in Abhängigkeit von den makroskopischen Feldern:

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v}) \approx f^{(0)}(n(\mathbf{r}),\mathbf{V}(\mathbf{r}),T(\mathbf{r});\mathbf{r},\mathbf{v}) \qquad \text{(IV.4.15)}$$

und versuchen hieraus die Momente der Geschwindigkeitsverteilung zu bestimmen. Es liegt nahe, $f^{(0)}$ als Maxwell-Verteilung F_0 zu wählen. Ihre Momente lassen sich leicht berechnen, da sie auf Gauß-Integrale führen. Explizit ergibt sich

$$\overline{v_i'v_j'} = \frac{kT}{m}\delta_{ij}, \qquad \text{(IV.4.16)}$$

d.h. nur die Diagonalelemente sind von Null verschieden. Auf der anderen Seite ist nach (IV.4.10) aber auch $\overline{v_i'v_j'} = \frac{p}{\rho}\delta_{ij}$, so daß wir die Zustandsgleichung $p = nkT$ des idealen Gases erhalten. Somit ergibt sich für den Spannungstensor

$$\sigma_{ij} = 0 \qquad \text{(IV.4.17)}$$

und als Bewegungsgleichung die für den Fluß einer reibungslosen Flüssigkeit

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p. \qquad \text{(IV.4.18)}$$

Wollen wir die Effekte der Reibung berücksichtigen, so ist ein besserer Ansatz für $f^{(0)}$ nötig. Man kann z.B. die Stoßgleichung näherungsweise lösen und damit Korrekturen zur Maxwell-Verteilung bestimmen. Wir kommen später hierauf zurück.

IV.4.3 Erhaltung der Energie

Die Transportgleichung für die Energie lautet

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{2}\overline{v^2}\right)) + \nabla\left(\frac{\rho}{2}\overline{v^2\mathbf{v}}\right) = 0 \qquad \text{(IV.4.19)}$$

Wir können hier eine ähnliche Rechnung wie zuvor für den Impuls durchführen. Dabei kommen nun 3. Momente der Geschwindigkeit ins Spiel. Wir geben im folgenden nur die Endergebnisse an.
Es ist zweckmässig, einen neuen Vektor $\mathbf{Q}$, der mit der Wärmeleitung zusammenhängt. Seine Komponenten sind

$$Q_j = \frac{\rho}{2}\overline{v_j'v_k'v_k'}, \qquad \text{(IV.4.20)}$$

wobei wieder über den Index k zu summieren ist. Für diesen Vektor ergibt sich aus der Transportgleichung

$$\frac{Dq}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{Q} + q\nabla \cdot \mathbf{V} = -p\nabla \cdot \mathbf{V} - \sigma_{ij}\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \tag{IV.4.21}$$

mit der inneren Energie

$$q = \frac{\rho}{2}\left(\overline{v^2} - \overline{\mathbf{v}}^2\right) = \frac{\rho}{2}\overline{v'^2} = \frac{3}{2}p. \tag{IV.4.22}$$

Die substantielle Ableitung $\frac{Dq}{Dt}$ beinhaltet die Wärmeleitung durch Konvektion, während $\nabla \cdot \mathbf{Q}$ die lokale Änderung der inneren Energie durch Wärmeleitung beschreibt. $q\nabla \cdot \mathbf{V}$ ist die lokale Änderung der inneren Energie durch die Massenzunahme infolge von Kompression. Auf der rechten Seite stehen die Quellterme. $-p\nabla \cdot \mathbf{V}$ ist die Kompressionsarbeit und $-\sigma_{ij}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}$ entspricht der Reibungswärme. Sie ist proportional zum Geschwindigkeitsgradienten.
Für die Maxwell-Verteilung ist $\mathbf{Q} = 0$ und (IV.4.21) reduziert sich auf den Energieerhaltungssatz

$$\frac{3}{2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{5}{2}\nabla \cdot (p\mathbf{V}) = 0. \tag{IV.4.23}$$

Wir werden später sehen, daß für die Navier-Stokes-Gleichung der Ansatz $\mathbf{Q} = -\kappa\nabla T$ mit der Wärmeleitfähigkeit κ gemacht wird.

IV.5 Das Momentenverfahren

Bisher ist es uns schon gelungen, aus der Transportgleichung für die Stoßinvarianten, Gleichungen von der Form der bekannten hydrodynamischen Bewegungsgleichungen abzuleiten. Mit gewisse Annahmen für die Momente der Verteilungsfunktion würden wir z.B. den korrekten Spannungstensor erhalten. Zur Rechtfertigung dieser Annahmen wollen wir im folgenden die Stoßgleichung näherungsweise lösen.
Es ist klar, daß die Boltzmann-Gleichung nicht exakt lösbar ist, da es sich um eine nichtlineare Integro-Differentialgleichung in sieben Dimensionen handelt. Eine spezielle Lösung für ein homogenes Gas kennen wir jedoch, nämlich die Maxwell-Verteilung f_0. In 0. Ordnung, hatten wir ja bereits den Ansatz $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \approx f_0(n(\mathbf{r}), \mathbf{V}(\mathbf{r}), T(\mathbf{r}); \mathbf{v})$ ausgenutzt, um die Euler-Gleichung abzuleiten. Dies ist eine gute Näherung, wenn die Gradienten der makroskopischen Größen klein sind. In den nächsten Ordnungen wollen wir nun f um f_0 entwickeln. Dabei verwenden wir eine formale Entwicklung der Form

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left(A_0 + A_k\frac{\partial}{\partial v_k} + A_{kl}\frac{\partial^2}{\partial v_k \partial v_l} + A_{klm}\frac{\partial^3}{\partial v_k \partial v_l \partial v_m} + \cdots\right) f_0(n, \mathbf{V}, T; \mathbf{v}). \tag{IV.5.1}$$

Die Idee, die Verteilung auf diese Art durch Ableitungen der Maxwell-Verteilung darzustellen, bezeichnet man auch als *Momentenmehtode von Grad*. Die Koeffizienten sind Funktionen von $\mathbf{r}$ und t, aber nicht von $\mathbf{V}$ und können durch Berechnung der Momente bestimmt werden. Für die Teilchenzahldichte ergibt sich

$$n = \int f d^3v = A_0 \int f_0 d^3v + \int \frac{\partial}{\partial v_k}\left(A_k + A_{kl}\frac{\partial}{\partial v_l} + \cdots\right) f_0 d^3v = A_0 n_0, \tag{IV.5.2}$$

wobei das zweite Integral auf Grund des Gaußschen Satzes verschwindet, wenn man über eine weit entfernte Oberfläche integriert, da f_0 und alle seine Ableitungen im Unendlichen verschwinden.

Für das erste Moment erhält man

$$\begin{aligned} n\overline{v_i} &= A_0 \int v_i f_0 d^3v + A_k \int v_i \frac{\partial f_0}{\partial v_k} d^3v + \int v_i \frac{\partial^2}{\partial v_k \partial v_l} \left(A_{kl} + A_{klm} \frac{\partial}{\partial v_m} + \cdots \right) f_0 d^3v \\ &= A_0 \int v_i f_0 d^3v - A_i \int f_0 d^3v - \int \frac{\partial}{\partial v_l} \left(A_{il} + A_{ilm} \frac{\partial}{\partial v_m} + \cdots \right) f_0 d^3v \\ &= A_0 n_0 \overline{v_i}^0 - A_i n_0. \end{aligned} \tag{IV.5.3}$$

Hierbei haben wir zunächst partiell integriert. Das letzte Integral verschwindet wieder nach Umwandlung in ein Oberflächenintegral. Die Bezeichnung $\overline{v_i}^0$ signalisiert, daß der Mittelwert mit der Verteilung f_0 zu berechnen ist.

Durch ein analoge Rechnung findet man schließlich noch

$$n\overline{v_i v_j} = A_0 n_0 \overline{v_i v_j}^0 - A_i n_0 \overline{v_j}^0 - A_j n_0 \overline{v_i}^0 + 2 n_0 A_{ij}. \tag{IV.5.4}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Rekursion für die Entwicklungskoeffizienten, wenn die Momente gegeben sind:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{n}{n_0}, \\ A_i &= A_0 \overline{v_i}^0 - \frac{n}{n_0} \overline{v_i} = \frac{n}{n_0} \left(V_i - \overline{v_i} \right), \\ A_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n_0} \overline{v_i v_j} - A_i \overline{v_j}^0 - A_j \overline{v_i}^0 - A_0 \overline{v_i v_j}^0 \right) \\ &= \frac{n}{2n_0} \left(\overline{v_i v_j} - 2 V_i V_j + \overline{v_i} V_j + \overline{v_j} V_i - \frac{p}{\rho} \delta_{ij} \right), \end{aligned} \tag{IV.5.5}$$

d.h. der Druck geht in die 2. Momente ein.

Die bisherige Beschreibung ist allerdings nicht eindeutig. Die Verteilungsfunktion hängt sowohl von den Feldern $n(\mathbf{r})$, $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ und $T(\mathbf{r})$ als auch von den ebenfalls ortsabhängigen Entwicklungskoeffizienten A_0, A_i etc. ab. Veränderungen z.B. der Dichte können daher auch durch entsprechende Änderungen von A_0 ausgedrückt werden. Eindeutigkeit erreicht man nun durch die Forderung, daß deie Werte der Felder so mit den Momenten zusammenhängen, wie sie es für eine Gaußverteilung tun. M.a.W.: Dichte, mittlere Geschwindigkeit, isotroper Druck (bzw. Temperatur), die mit den Verteilungen f_0 und f berechnet werden, sollen gleich sein. Somit folgt $n_0 = n(f_0) \stackrel{!}{=} n(f) = n$, daß $A_0 = 1$ ist. Die Bedingung $\overline{v_i}^0 = \overline{v_i}$ führt dann auf $A_i = 0$. Schließlich folgt für die Forderung $\sum_{j=1}^3 \overline{v_j' v_j'} \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^3 \overline{v_j' v_j'}^0 = 3p$ aus (IV.5.5)unter Beachtung von (IV.4.6) und (IV.4.11):

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\overline{v_i v_j} + \overline{v_i v_j}^0 \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{v_i' v_j'} + \overline{v_i}\,\overline{v_j} - \overline{v_i' v_j'}^0 - \overline{v_i}^0 \overline{v_j}^0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\overline{v_i' v_j'} - \overline{v_i' v_j'}^0 \right) = \frac{1}{2\rho} \left(\rho \overline{v_i' v_j'} - p \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2\rho} \sigma_{ij}. \end{aligned} \tag{IV.5.6}$$

Somit ist

$$\sum_{j=1}^{3} \overline{v_j' v_j'} = \sum_{j=1}^{3} A_{jj} + 3p, \tag{IV.5.7}$$

d.h. es muß $\sum_{j=1}^{3} A_{jj} = 0$ sein. Dies ist natürlich konsistent mit der Forderung Spur $\sigma = 0$. Zusammenfassend kann man also feststellen, daß die Entwicklungskoeffizienten bei gegebenen Felder die Bedingungen

$$A_0 = 1, \qquad A_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^{3} A_{jj} = 0 \tag{IV.5.8}$$

erfüllen müssen.

IV.6 Die Momentengleichungen

Anstatt die Gradsche Entwicklung von f in die Boltzmann-Gleichung einzusetzen ist es einfacher, direkt Gleichungen für die Momente zu lösen. Sind alle Momente bekannt, so kennt man auch die Funktion f. Kennt man nur die niedrigsten Momente, so hat man immerhin eine Näherung für die Verteilungsfunktion.

Der Stoßterm in den Transportgleichungen für das 0. und 1. Moment, die ja Ausgangspunkt für die Kontinuitäts- und Impulsgleichungen waren, verschwindet wegen der Erhaltungssätze beim Stoß. Wir betrachten daher im folgenden die Transportgleichungen für die 2. und 3. Momente[5]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{v_j v_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\rho\overline{v_j v_k v_l}\right) = J_{jk} := \int w v_j v_k (f' f_1' - f f_1) d^3v_1 d^3v' d^3v_1', \tag{IV.6.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\overline{v_i v_j v_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\rho\overline{v_i v_j v_k v_l}\right) = J_{ijk} := \int w v_i v_j v_k (f' f_1' - f f_1) d^3v_1 d^3v' d^3v_1' \tag{IV.6.2}$$

Die rechten Seiten entsprechen Störungen der Gleichgewichts-(Maxwell-)Verteilung. Dort setzen wir die Entwicklung (IV.5.1) ein, wobei wir Terme bis A_{ij} berücksichtigen müssen, da 2. und 3. Momente vorkommen. Wir verzichten hier auf Details der Rechnungen, die recht langwierig sind. Zunächst werten wir die linken Seiten der Gleichungen mit $f \to f_0$ aus. Dies liefert

$$2p\epsilon_{jk} = J_{jk} \qquad \text{mit} \qquad \epsilon_{jk} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right), \tag{IV.6.3}$$

wobei ϵ_{jk} gerade dem Schubanteil des Deformationstensors verbunden ist und somit den Einfluß der Reibungskräfte widerspiegelt, und

$$\frac{kp}{m}\left(\delta_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_k} + \delta_{jk}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \delta_{ki}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = J_{ijk}. \tag{IV.6.4}$$

Hierbei haben wir den Druck zugunsten der Temperatur unter Ausnutzung der idealen Gas-Beziehung $\frac{p}{\rho} = \frac{kT}{m}$ eliminiert, die ja für die Maxwell-Verteilung gilt. Das 3. Moment ist mit der Energieerhaltung und damit der Wärmeleitung verbunden. Deshalb ist es nicht überraschend, daß der Temperaturgradient ∇T auftritt.

[5]Den Diagonalanteil der 2. Momente hatten wir früher schon mit der Wärmeleitung in Verbindung gebracht.

IV.6.1 Lösung der Momentengleichung

Bei der Berechnung von J_{ij} und J_{ijk} verwenden wir die Entwicklung

$$ff_1 \approx f_0 f_{01} + A_{ij}\left(f_0 \frac{\partial^2 f_{01}}{\partial v_{1i}\partial v_{1j}} + f_{01}\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_i \partial v_j}\right) + A_{ijk}\left(f_0 \frac{\partial^3 f_{01}}{\partial v_{1i}\partial v_{1j}\partial v_{1k}} + f_{01}\frac{\partial^3 f_0}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k}\right) \tag{IV.6.5}$$

und den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4s^2 \cos\vartheta \tag{IV.6.6}$$

für starre Kugeln vom Radius s. Dies liefert nach einer länglichen Rechnung die Entwicklungskoeffizienten. Zum einen ergibt sich

$$A_{ij} = -\frac{5}{16}\frac{\sqrt{\pi m k T}}{\pi \rho s^2}\epsilon_{ij}, \tag{IV.6.7}$$

wobei natürlich Spur $\sigma = 0$ erfüllt ist. Damit haben wir explizit

$$\sigma_{ij} = -2\eta\epsilon_{ij} \tag{IV.6.8}$$

mit der temperaturabhängigen Viskosität

$$\eta(T) = \frac{5}{16}\frac{\sqrt{\pi m k T}}{\pi s^2}. \tag{IV.6.9}$$

Die Viskosität wächst also mit der Wurzel aus der Temperatur an.
Aus der Gleichung für die 3. Momente folgt[6]

$$A_{ijj} = \frac{25}{64}\frac{k\sqrt{\pi m k T}}{\pi s^2 n m}\frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{IV.6.10}$$

und somit wegen $A_{ijk} = \frac{1}{6}\overline{v'_i v'_j v'_k}$

$$Q_i = -\frac{15}{4}\frac{k}{m}\eta\frac{\partial T}{\partial x_i}. \tag{IV.6.11}$$

Die Größe

$$\kappa := \frac{15}{4}\frac{k}{m}\eta \tag{IV.6.12}$$

ist also der Koeffizient der Wärmeleitung. Interessanterweise hängt das Verhältnis $\frac{\kappa}{\eta}$ nur von der Molekülmasse ab. Genauer ist

$$\frac{4m\kappa}{15k\eta} = 1. \tag{IV.6.13}$$

Diese Beziehung kann man experimentell gut überprüfen. Es stellt sich heraus, daß sie für einatomige Edelgase sehr gut erfüllt ist.

---

[6] wobei über den Index j summiert wird

Anhang A

Grundlagen der Funktionentheorie

A.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Im Prinzip können wir die Ebene der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ durch

$$ \tag{A.1.1} $$

identifizieren. Erstere hat aber mehr Struktur, da wir z.B. durch reelle Zahlen dividieren können, aber nicht durch Vektoren.
Wir betrachten eine komplexwertige Funktion $f(z)$ der komplexen Variablen z. Diese lßt sich in Real- und Imaginärteil aufspalten:

$$f(z) = \phi(z) + i\psi(z), \tag{A.1.2}$$

mit reellwertigen Funktionen ϕ und ψ. Diese könnten wir als Funktionen über dem $\mathbb{R}^2$ ansehen und die damit Analysis des reellen Räume auf $\mathbb{C}$ übertragen. Stattdessen definiert man die *komplexe Ableitung* von $f(z)$ an einer Stelle z_0 durch

$$f'(z_0) := \frac{df}{dz}(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{A.1.3}$$

in vollständiger Analogie zur Ableitung von Funktionen über $\mathbb{R}$. Ist $f(z)$ in einem Gebiet komplex-differenzierbar, so sagt man auch, daß $f(z)$ dort *holomorph* oder *analytisch* ist.
Diese Definition hat weitreichende Konsequenzen, die man erkennt, wenn man f doch als Funktion über $\mathbb{R}^2$ ansieht. Dann gilt nämlich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} = f'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{A.1.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{df}{dz} = if'(z) = i\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{A.1.5}$$

wobei $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = i$ verwendet wurde. Damit $f'(z)$ eindeutig ist, muß offenbar gelten

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{A.1.6}$$

Dies sind die *Cauchy-Riemann'schen Diffferentialgleichungen.* Weitere Konsequenzen sind

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0, \tag{A.1.7}$$

d.h. Real- und Imaginärteil genügen der Laplace-Gleichung. Weiterhin gilt

$$(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0, \tag{A.1.8}$$

d.h. die Linien $\phi(x,y)=const.$ und $\psi(x,y)=const.$ sind orthogonal zueinander.
Als ein Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(z)=z^2=x^2-y^2+2ixy, \tag{A.1.9}$$

d.h.

$$\phi(x,y)=x^2-y^2, \qquad \psi(x,y)=2xy. \tag{A.1.10}$$

Somit gilt

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}=-2y \tag{A.1.11}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=2y, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=2x, \tag{A.1.12}$$

womit offensichtlich die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt sind. Die komplexe Ableitung kann man dann durch Übertragung der bekannten Regeln für reellwertige Funktionen bestimmen, d.h.

$$\frac{df}{dz}=2z=\frac{\partial\phi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{A.1.13}$$

Eine alternative Formulierung der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen ist

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0, \tag{A.1.14}$$

d.h. eine komplex-differenzierbare Funktion darf nur von z, nicht von der komplex-konjugierten Variablen $\bar{z}=x-iy$ abhängen! Ein weitere Formulierung ist schließlich

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\phi+i\psi)=0. \tag{A.1.15}$$

Man kann zeigen, daß eine Funktion $f(z)$, die in einem Gebiet holomorph ist, dort sogar beliebig oft komplex-differenzierbar ist. Dies gilt im Reellen natürlich nicht, wo die Ableitung nicht einmal stetig sein muß!

A.2 Cauchy'scher Integralsatz

Besonders schlagkräftig ist die komplexe Integralrechnung. Wir betrachten einen geschlossenen Weg c. Die Funktion $f(z)$ sei holomorph auf dem Weg und in seinem Inneren. Dann gilt der *Cauchy'sche Integralsatz*:

$$\oint_c f(z)dz = 0. \tag{A.2.1}$$

Der Beweis basiert auf den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen und dem Satz von Stokes. Zunächst spalten wir das Wegintegral in Real- und Imaginärteil auf:

$$\begin{aligned} \oint_c f(z)dz &= \oint_c (\phi + i\psi)(dx + idy) = \oint_c (\phi dx - \psi dy) + i \oint_c (\phi dy + \psi dx) \\ &=: \oint_c \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r} + i \oint_c \mathbf{I} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \tag{A.2.2}$$

mit den reellen Vektorfeldern

$$\mathbf{R} = (\phi, -\psi, 0), \qquad \mathbf{I} = (\psi, \phi, 0). \tag{A.2.3}$$

Der reellen Wegintegrale werten wir mit Hilfe des Satzes von Stokes aus:

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{F(c)} \operatorname{rot} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{F} = \int \left((0, 0, \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} \right) \cdot d\mathbf{F} \\ &= -\int \left(0, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \cdot d\mathbf{F} = \int (0,0,0) \cdot d\mathbf{F} = 0, \end{aligned} \tag{A.2.4}$$

wobei wir die Cauchy-Riemann-Gleichungen berücksichtigt haben. Eine analoge Rechnung liefert

$$\oint_c \mathbf{I} \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{A.2.5}$$

Der Cauchy'sche Integralsatz ist von entscheidender Bedeutung in der komplexen Integralrechnung. Im folgenden wollen wir zwei Verallgemeinerungen ableiten.

A.3 Cauchy'sche Integralformel

Im Cauchy'schen Integralsatz mußte der Integrand holomorph sein. Dies verallgemeinern wir nun, indem wir Integranden mit einem einfachen Pol betrachten. Speziell wollen wir die *Cauchy'sche Integralformel*

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \tag{A.3.1}$$

ableiten, wobei $f(z)$ auf c und in seinem Inneren analytisch ist. Zum Beweis entwickeln wir $f(z)$ um die Polstelle z_0:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2} f''(z_0) + \cdots \tag{A.3.2}$$

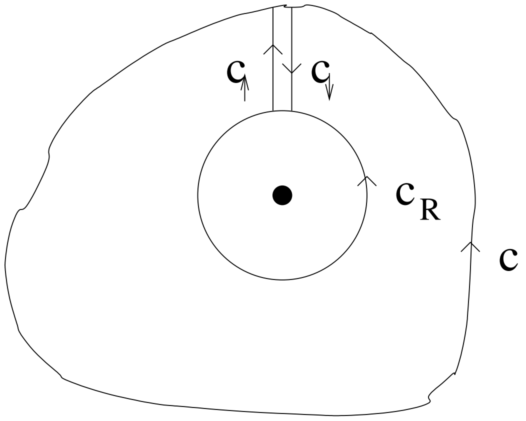

Abbildung A.3.1: Zum Beweis der Cauchy'schen Integralformel wird der geschlossene Weg aus den vier Teilen c, $c_\uparrow$, c_R und $c_\uparrow$ betrachtet. Dieser Weg umschließt die Polstelle bei z_0 nicht mehr.

Dann folgt

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \oint_c \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz + \oint_c f'(z_0) dz + \frac{1}{2} \oint_c f''(z_0)(z-z_0) dz + \cdots \\ &= f(z_0) \oint_c \frac{1}{z-z_0} dz. \end{aligned} \tag{A.3.3}$$

Mit Ausnahme des ersten Integrals verschwinden alle Integrale auf Grund des Cauchy'schen Integralsatzes, da die Integranden Polynome sind. Wir müssen daher nur noch ein spezielles Wegintegral berechnen. Dies tun wir zunächst für einen Kreisweg $c_R(z) = z_0 + Re^{i\varphi}$. Dann ist $dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$ und somit

$$\oint_c \frac{1}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi} d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \tag{A.3.4}$$

Um zu zeigen, daß das Integral längs c den gleichen Wert hat, betrachten wir den in Fig. A.3.1 skizzierten Weg $c + c_\uparrow - c_R + c_\uparrow$. Der Pol bei z_0 liegt nicht im Inneren dieses Weges, weshalb wir den Cauchy'schen Integralsatz anwenden können:

$$\oint_{c+c_\uparrow - c_R + c_\uparrow} \frac{1}{z-z_0} dz = 0. \tag{A.3.5}$$

Die Wege $c_\uparrow$ und $c_\uparrow$ sind nur infinitesimal voneinander entfernt und deshalb heben sich ihre Beiträge weg. Es bleibt daher

$$\oint_c \frac{1}{z-z_0} dz = \oint_{c_R} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i. \tag{A.3.6}$$

A.4 Residuensatz

Ein Verallgemeinerung der Cauchy'schen Integralformel für beliebige Singularitäten (Pole m-ter Ordnung) ist der sog. *Residuensatz*:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz = \sum_\nu \mathrm{res}(f(z), z = z_\nu). \tag{A.4.1}$$

Hierbei sind die z_ν die singulären Stellen im Inneren von c. $\mathrm{res}(f(z), z = z_\nu)$ ist das sog. *Residuum* von $f(z)$ in z_ν, das folgendermaßen definiert ist:

$$\mathrm{res}(f(z), z = z_\nu) := \frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz. \tag{A.4.2}$$

Aus dem Cauchy'schen Integralsatz folgt, daß das Residuum in allen Punkten, die keine Pole sind, verschwindet.
Liegt in z_ν ein Pol m-ter Ordnung vor, so kann man $f(z)$ als *Laurent-Reihe* darstellen:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2}f''(z_0) + \cdots \tag{A.4.3}$$

Dann ist

$$\mathrm{res}(f(z), z = z_\nu) = a_{-1}. \tag{A.4.4}$$

Allgemein gilt: Hat $f(z)$ in z_0 einen Pol n-ter Ordnung, d.h. ist $a_{-m} = 0$ für $m > n$, so ist

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right). \tag{A.4.5}$$

Dies erlaubt die Berechnung des Residuums ohne explizite Bestimmung der Laurent-Entwicklung.

Anhang B

Übungen

Priv.-Doz. Dr. A. Schadschneider

1. Übung zur Vorlesung
Einführung in die Hydrodynamik

im Wintersemester 2003/04

1. Substantielle Ableitung

Berechne die substantielle Ableitung des zeitunabhängigen Vektorfeldes $\vec{A}(x, y, z) = x\vec{a}$ mit konstantem Vektor $\vec{a}$ für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{f(t)}{r}\hat{r}$, wobei $\hat{r}$ der radiale Einheitsvektor in Zylinderkoordinaten ist. Was fällt auf?

2. Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten eine Flüssigkeit, deren Dichte räumlich stets konstant ist. Das Geschwindigkeitsfeld sei sphärisch symmetrisch und ändere sich harmonisch in der Zeit. Bestimme die Dichte und das Geschwindigkeitsfeld!

3. Flüssigkeit im Schwerefeld

Löse die statische Euler-Gleichung für eine Flüssigkeit im Schwerefeld der Erde. Betrachte dabei die Fälle
a) $\rho = const$: inkompressible Flüssigkeit
b) $\rho = Ap$ ($A = const.$): ideales Gas
und diskutiere die Ergebnisse.

Besprechung der Aufgaben: 28. Oktober 2003, 13^{45} Uhr

Hinweis: Die Vorlesung muß am 27.10.03 leider ausfallen!

Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter `www.thp.uni-koeln.de/~as`

B.1 Lösungen zu Übung 1

Aufgabe 1

Offensichtlich gilt

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \tag{B.1.1}$$

und in Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{f(t)}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \tag{B.1.2}$$

Daher ist

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{f(t)}{r} \mathbf{A}. \tag{B.1.3}$$

Dies zeigt, daß die substantielle Zeitableitung eines zeitunabhängigen Feldes selbst zeitabhängig sein kann. Der Grund hierfür ist das zeitlich veränderliche Geschwindigkeitsfeld.

Aufgabe 2

Das Geschwindigkeitsfeld kann offensichtlich in der Form

$$\mathbf{v} = v(r) \cos \omega t \hat{\mathbf{r}} \tag{B.1.4}$$

dargestellt werden. Damit ist dann

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v(r)) \cos \omega t. \tag{B.1.5}$$

Die räumliche Konstanz der Dichte impliziert $\nabla \rho = 0$ und somit ist die Dichte eine reine Zeitfunktion, die in der Form $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 f(t)$ mit einer Konstanten ρ_0 dargestellt werden kann. Die Kontinuitätsgleichung liefert nun

$$0 = \rho_0 f'(t) + \rho_0 f(t) \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho_0 f'(t) + \rho_0 f(t) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v(r)) \cos \omega t, \tag{B.1.6}$$

was auch in der Form

$$\frac{f'(t)}{f(t) \cos \omega t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v(r)) \tag{B.1.7}$$

geschrieben werden kann. Da die linke Seite nur von der Zeit und die rechte Seite nur vom Ort abhängt, müssen beide konstant sein. Nennen wir diese Konstante $-\mu$, so folgt

$$f'(t) = -\mu f(t) \cos \omega t, \qquad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v(r)) = \mu r^2. \tag{B.1.8}$$

Beide Gleichungen können einfach integriert werden und wir erhalten als Lösung

$$f(t) = A \exp \left(-\frac{\mu}{\omega} \sin \omega t \right) \tag{B.1.9}$$

und

$$v(r) = \frac{\mu}{3} r. \tag{B.1.10}$$

Hieraus folgt, daß die Separationskonstante μ als ein Maß für die Geschwindigkeit betrachtet werden kann. Außerdem erkennt man, daß das Verhalten bereits vollständig durch die Kontinuitätsgleichgung bestimmt ist.

Aufgabe 3

Die äußere Kraft ist $\mathbf{f} = \mathbf{g}$. Wir wählen unser Koordinatensystem so, daß $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ in Richtung der negativen z-Achse zeigt. Aus der statischen Euler-Gleichung $\nabla p = \rho \mathbf{f}$ folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{B.1.11}$$

Die ersten Gleichungen implizieren, daß der Druck unabhängig von den x- und y-Koordinaten ist. Zur weiteren Betrachtung benötigen wir nun eine Zustandsgleichung, die z.B. den Zusammenhang zwischen Druck, Dichte und Temperatur angibt.
Für eine inkompressible Flüssigkeit ist $\rho = const$. Somit können wir die z-Abhängigkeit des Druckes durch eine einfache Integration bestimmen:

$$p(z) = p_0 - \rho g z. \tag{B.1.12}$$

Üblicherweise ist man am Druck in einer Tiefe h interessiert, wobei man den Druck p_A an der Oberfläche $z = z_A$ der Flüssigkeit als bekannt voraussetzt. Offensichtlich ist $p_A = p_0 - \rho g z_A$ und daher

$$p(h) = p_A + \rho g h \tag{B.1.13}$$

mit $h = z_A - z$.
Ein interessanter Aspekt dieses Ergebnisses ist das sog. *hydrostatische Paradoxon*. Für die Druckkraft in einer Tiefe h spielt offensichtlich die Form des Gefäßes keine Rolle. Sie hängt also nicht vom gesamten Gewicht der darüber befindlichen Flüssigkeitsmenge ab, sondern nur vom Gewicht einer Flüssigkeitssäule der Höhe h.
Als zweiten Fall betrachten wir $\rho = Ap$ mit einer Konstanten A. Dies ist z.B. in einem idealen Gas bei konstanter Temperatur (mit $A = RT$ realisiert. Sind p_0 und ρ_0 Druck und Temperatur bei $z = z_0$, so ist $A = \frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0}{p_0}$. Die statische Euler-Gleichung nimmt die Form

$$\frac{dp}{dz} = -Agp \tag{B.1.14}$$

an, mit der Lösung

$$p = p_0 \exp\left(-Ag(z - z_0)\right) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0}(z - z_0)\right). \tag{B.1.15}$$

Dies ist die *barometrische Höhenformel*, die wir hier auf rein hydrostatischem Wege abgeleitet haben.
Die betrachteten Fälle zeigen deutlich, wie wichtig die Form der Zustandsgleichung für das Verhalten der Flüssigkeiten ist!

Priv.-Doz. Dr. A. Schadschneider

2. Übung zur Vorlesung
Einführung in die Hydrodynamik

im Wintersemester 2003/04

4. Hydrodynamisches Modell des Universums

Wir wollen zwei Grenzfälle des in der Vorlesung vorgestellten hydrodynamischen Modells für den Kosmos analysieren.

a) Bestimme die Expansionsgesetze für die drei Fälle $k < 0$, $k = 0$ und $k > 0$ explizit durch Integration der Bewegungsgleichung. Zeige, daß in allen drei Fällen für kleine Zeiten (frühes Universum) gilt:

$$r(t) \propto t^{2/3}.$$

Warum hängt das Ergebnis nicht von der Raumkrümmung k ab?

b) Der “Rand” des Universums ist durch die Bedingung charakterisiert, daß dort die Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, d.h. $v = c$. Schätze mit dem in der Vorlesung angegebenen Wert für das Weltalter T den Wert der Dichte ab, bei der $k = 0$ ist. Diskutiere qualitativ die Größe des *sichtbaren* Universums.

Besprechung der Aufgaben: 4. November 2003, 13^{45} Uhr

Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter `www.thp.uni-koeln.de/~as`.

B.2 Lösungen zu Übung 2

Aufgabe 4

a) In der Vorlesung (Kap. II.4.1) haben wir schon gezeigt, daß aus der Friedmann-Gleichung durch Separation der Variablen folgt:

$$t = \int dt = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{2\left(\frac{GM}{r} - k\right)}}. \tag{B.2.1}$$

Im Vergleich zu (II.4.20) haben wir uns hier auf das Vorzeichen '$+$' beschränkt, das hier einer vorwärts gerichteten Zeitachse entspricht. Die in der Vorlesung angegebenen Resultate erhält man dann, indem man geeignete Substitutionen durchführt.
In allen drei Fällen substituiert man zunächst $\tilde{r} = \frac{r'}{2GM}$. Hieraus folgt:

$$t = \int dt = 2GM \int_0^{r/2GM} \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{\frac{1}{\tilde{r}} - 2k}}. \tag{B.2.2}$$

Für $k = 0$ ist das Integral elementar zu berechnen und man erhält (II.4.22).
Für $k > 0$ substituieren wir mit $r'' = 2k\tilde{r}$:

$$\begin{aligned} \frac{t}{2GM} &= \int_0^{r/2GM} \frac{\sqrt{\tilde{r}}d\tilde{r}}{\sqrt{1 - 2k\tilde{r}}} = \frac{1}{(2k)^{3/2}} \int_0^{kr/GM} \frac{\sqrt{r''}dr''}{\sqrt{1 - r''}} \\ &= \frac{1}{(2k)^{3/2}} \left[\frac{1}{2}\arccos(1 - 2r'') - \sqrt{r'' - r''^2}\right]_0^{kr/GM}. \end{aligned} \tag{B.2.3}$$

Dies liefert dann (II.4.21).
Für $k < 0$ gehen wir ähnlich vor, allerdings wird jetzt mit mit $r'' = 2|k|\tilde{r}$ substituiert:

$$\begin{aligned} \frac{t}{2GM} &= \int_0^{r/2GM} \frac{\sqrt{\tilde{r}}d\tilde{r}}{\sqrt{1 + 2|k|\tilde{r}}} = \frac{1}{(2k)^{3/2}} \int_0^{kr/GM} \frac{\sqrt{r''}dr''}{\sqrt{1 + r''}} \\ &= \frac{1}{(2|k|)^{3/2}} \left[\sqrt{r'' + r''^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}(1 + 2r'')\right]_0^{|k|r/GM}. \end{aligned} \tag{B.2.4}$$

Dies ergibt (II.4.23).
Für kleine Zeiten ist $r(t)$ klein. Es gibt daher eine Anfangszeitspanne, zu der $\frac{GM}{r(t)} \ll k$ erfüllt ist. Anschaulich bedeutet dies, daß die potentielle Energie über die Raumkrümmung dominiert. Dies entspricht also im wesentlichen dem Fall $k = 0$. Erst zu späteren Zeiten wird die Raumkrümmung wichtig und für den Fall $k \neq 0$ machen sich dann Abweichungen vom $t^{2/3}$-Gesetz bemerkbar.

b) Am "Rand" des Universums ist per definition $\dot{r} = c$. Somit können wir den Radius mit $R = cT$ abschätzen, wobei T das "Alter" der Welt ist. Aus der Friedmann-Gleichung folgt dann:

$$\frac{c^2}{2} = \frac{\frac{4\pi}{3}GR^3\rho}{R} - k = \frac{4\pi}{3}GR^2\rho - k = \frac{4\pi}{3}Gc^2T^2\rho - k. \tag{B.2.5}$$

Setzen wir $k = 0$, um eine Abschätzung für die kritische Dichte zu erhalten, so folgt:

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G^2 T^2}. \tag{B.2.6}$$

In der Praxis hat man natürlich die Rotverschiebung der Strahlung von weit entfernten Galaxien zu berücksichtigen. Diese wird am Rand sehr groß, so daß die Energie unter die Empfindlichkeitsgrenze der Detektoren fällt. Somit könnten wir auch von einem unendlichen Universum nur einen endlichen Ausschnitt beobachten.

3. Übung zur Vorlesung
Einführung in die Hydrodynamik

im Wintersemester 2003/04

5. Hydrodynamik und Funktionentheorie

In der Vorlesung wurde zur Beschreibung ebener Potentialströmungen das komplexe Potential $w(z) = \phi(z) + i\psi(z)$ eingeführt.

a) Diskutiere die Bedeutung der Größe $\tilde{f}(z) := \psi(z) + i\phi(z)$.

b) Zeige, dass für die komplexe Geschwindigkeit $w'(z) = \frac{dw}{dz}$ gilt:

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = ve^{-i\theta},$$

wobei v der Betrag der Geschwindigkeit und θ der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der x-Achse ist!

c) Diskutiere die Strömungen (Strom- und Äquipotentiallinien etc.), die zu den Potentialen $w(z) = a \ln z$ und $w(z) = -ib \ln z$ (mit reellen Konstanten a, b) gehören!

d) Bestimme das komplexe Potential und die komplexe Geschwindigkeit für eine Strömung um einen Kreiszylinder für den Fall $\mathbf{v}_\infty = (v_\infty \cos\theta, v_\infty \sin\theta)$, d.h. eine Strömung, die nicht parallel zur x-Achse fließt.

6. Aerodynamik

Diskutiere mit Hilfe der Ergebnisse aus der Vorlesung die Frage, warum ein Flugzeug fliegt. Wie sieht qualitativ das Stromlinienbild aus? Untersuche das Profil, das sich aus einem Kreiszylinder mit Hilfe der konformen Abbildung $\zeta(z) = z + \frac{c^2}{z}$ ergibt. Warum kann das einfache Argument auf der Basis der Bernoulli-Gleichung, das man oft in der Literatur findet, nicht richtig sein?

Tip: Betrachte z.B. den Kreiszylinder vom Radius $R = 2$ um $z_0 = -1 + i$ und $c = 4 - 2\sqrt{3}$.

Besprechung der Aufgaben: 25. November 2003, 13^{45} Uhr

Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter `www.thp.uni-koeln.de/~as`.

B.3 Lösungen zu Übung 3

Aufgabe 5

a) Die Gleichungen, durch die ϕ und ψ bestimmt sind, sind symmetrisch bzgl. deren Vertauschung. Daher beschreibt $\tilde{f}$ auch eine physikalisch realisierbare Potentialströmung. Allerdings ist $\mathbf{v} = -\nabla\psi$.
Das komplexe Potential $\hat{f}(z) = -\psi(z) + i\phi(z)$ entsteht durch eine Drehung um 90 Grad, d.h. eine konforme Transformation aus $f(z)$ und beschreibt daher ebenfalls eine Potentialströmung.

b) Diese Identität folgt direkt aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen. Man kann sie auch "zu Fuß" nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dz} &= \frac{d\phi + id\psi}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx + i\left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dy}{dz} \\
&= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{dx + idy}{dz} = v_x - iv_y && \text{(B.3.1)} \\
&= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}e^{-i\theta}. && \text{(B.3.2)}
\end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir die Cauchy-Riemann-Gleichungen (A.1.6) benutzt und danach die Definition des Potentials ϕ. In letzten Schritt schließlich wurde die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen ausgenutzt.

c) Für $w_a(z) = a\ln z$ haben wir in Polarkoordinaten

$$w_a(z) = a\ln r + ia\varphi. \tag{B.3.3}$$

Die Äquipotentiallinien $\mathrm{Re}\,w = const.$ sind daher konzentrische Kreise $r = const.$ um den Ursprung. Die Stromlinien $\mathrm{Im}\,w = const.$ verlaufen radial ($\varphi = const$). Das komplexe Potential beschreibt daher die Quellströmung von einer Liniequelle bei $x = y = 0$.
Für $w_b(z) = -ib\ln z$ haben wir

$$w_b(z) = b\varphi - ib\ln r. \tag{B.3.4}$$

Hier sind die Rollen von Äquipotential- und Stromlinien gegenüber w_a gerade vertauscht. Das Potential w_b beschreibt eine ebene Zirkulationsströmung bzw. das Strömungsfeld einer in der z-Achse befindlichen isolierten Wirbellinie.

d) Das komplexe Potential erhält man in diesem Fall aus dem in der Vorlesung angegebenen (siehe Gl. (II.6.43) durch eine Drehung um den Winkel θ. Diese konforme Transformation führt zu den Ersetzungen

$$z \to ze^{-i\theta}, \qquad \varphi \to \varphi - \theta \tag{B.3.5}$$

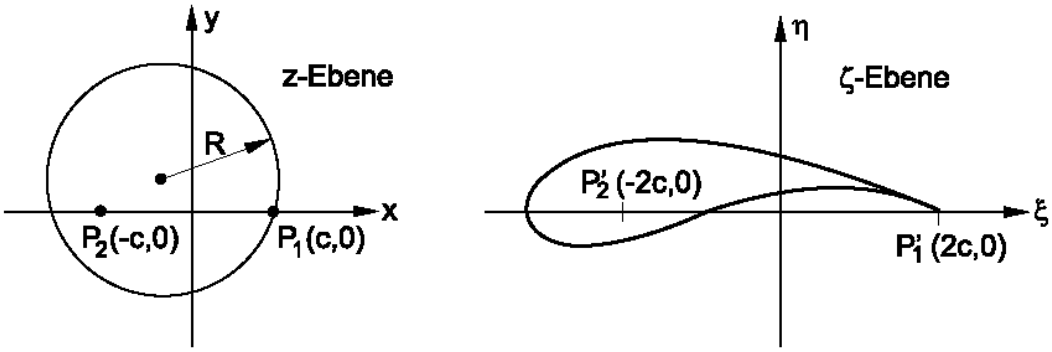

Abbildung B.3.1: Das Joukowski'sche Tragflügelprofil entsteht durch Anwendung der konformen Abbildung $\zeta(z) = z + \frac{c^2}{z}$ auf einen Kreis. Der Punkt P_1 definiert den Parameter c und wird unter der konformen Abbildung auf P_1' abgebildet. P_2' ist das Bild von P_2.

in den Ausdrücken für das Potential, Stromlinien etc., die wir in Abschnitt II.6.3 abgeleitet hatten. Explizit haben wir

$$w_\theta(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + v_\infty \cos\theta \left(z + \frac{R^2}{z}\right) - i v_\infty \sin\theta \left(z - \frac{R^2}{z}\right) \tag{B.3.6}$$

und für die komplexe Geschwindigkeit

$$w_\theta'(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i z} + v_\infty \cos\theta \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - i v_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right). \tag{B.3.7}$$

Aufgabe 6

Damit die angegebene konforme Abbildung etwas liefert, was einem Tragflügel ähnelt, muß die Position des Kreises und der Parameter c geeignet gewählt werden. Wir betrachten daher einen Kreis vom Radius R, der nicht um den Ursprung verläuft, sondern dessen Zentrum bei $z_0 \neq 0$ liegt (siehe Abb. B.3.1). Der Parameter c ist dann als die Koordinate des Schnittpunktes mit der (positiven) x-Achse zu wählen.
Betrachten wir zunächst den Fall $z_0 = 0$ eines Kreises um den Ursprung. Dann ist $c = R$ und mit $z = Re^{i\varphi}$ folgt

$$\zeta(z) = Re^{i\varphi} + \frac{c^2}{Re^{i\varphi}} = 2R\cos\varphi. \tag{B.3.8}$$

Das Bild des Kreises unter der konformen Abbildung ζ ist daher eine Gerade zwischen $-R$ und R.
Liegt der Mittelpunkt auf der Imaginärachse, d.h. $z_0 = iy_0$, so wird der Kreis auf einen Kreisbogen abgebildet. Dies ähnelt schon eher einer Tragfläche. Der allgemeine Fall ist schließlich in Abb. B.3.1. Er liefert eine sehr gute Näherung an einen echten Flügel. Die resultierende Kurve wird auch als *Joukowski'sche Tragflügelprofil* bezeichnet.
Wir können jetzt die Ergebnisse aus dem Abschnitt II.6.3 direkt auf das Joukowski'sche Profil übertragen. Damit ist klar, daß Auftrieb entsteht, wenn die Zirkulation um den Tragflügel nicht

verschwindet. Dann entsteht auch ein Druckunterschied zwischen Ober- und Unterseite mit einer resultierenden Kraft (siehe Abb. B.3.2).

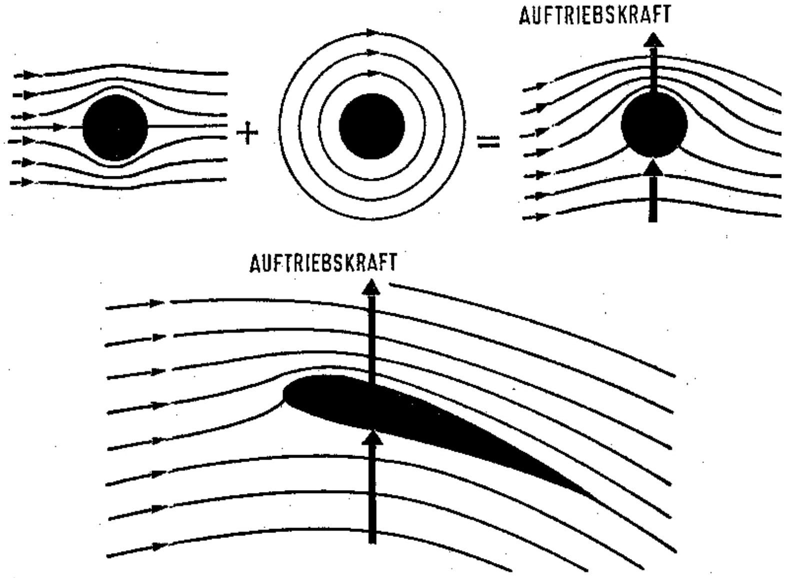

Abbildung B.3.2: Die Strömung um einen Tragflügel ähnelt sehr der Strömung um einen Zylinder. Sie besteht aus der Überlagerung eines Translations- und eines Zirkulationsanteils.

Es stellt sich die Frage, wie eine Zirkulation überhaupt entstehen kann und warum eine Auftriebskraft und keine Abtriebskraft erzeugt wird. Hier spielt tatsächlich die Form des Flügels eine wichtige Rolle (im Gegensatz zur bisherigen Argumentation). Tatsächlich ensteht die Zirkulation beim Start. Zunächst wird die Luft direkt auf dem Flügel auf Grund der Reibung mitbewegt. Bei genügend großer Geschwindigkeit kann sie aber dem Flügel nicht mehr folgen. Die Luft löst sich dann an der Hinterkante ab und bildet den sog. *Anfahrtswirbel* (siehe Abb. B.3.3). Auf Grund

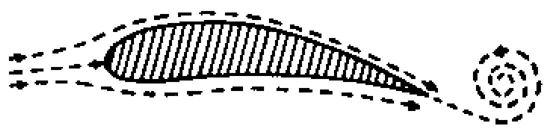

Abbildung B.3.3: Bei einem startenden Flugzeug entsteht ein Anfahrtswirbel.

des Satzes von Thomson (II.5.15) muß dann aber ein Gegenwirbel entstehen, der dann für die nichtverschwindende Zirkulation um den Tragflügel und damit den Auftrieb verantwortlich ist. Dazu betrachtet man einen geschlossenen Weg, der groß genug ist, so daß er den Tragflügel und den Anfahrtswirbel umschließt.
Bei einer oft zitierten Erklärung des Auftrieb werden zwei Moleküle betrachtet, die gleichzeitig an der Flügelvorderkante ankommen. Eines bewegt sich dann oberhalb des Flügels weiter, das andere unten herum. Dann wird angenommen, daß beide Moleküle gleichzeitig die Hinterkante

erreichen und das deshalb das Teilchen, das oben herum geflogen ist, schneller sein muß da dort auf Grund der Krümmung des Flügelprofils der Weg länger ist. Es ist aber überhaupt nicht klar, warum beide Teilchen auch gleichzeitig hinten ankommen sollten. In der Tat kann man im Rahmen dieses Argumentes überhaupt nicht verstehen, warum ein Flugzeug auf dem Rücken fliegen kann.
In der Tat hat es im Laufe der Zeit viele unterschiedliche Theorien zum Auftrieb gegeben. Populär war z.B. die Newtonsche Erklärung, die den Auftrieb mit Hilfe des Impulsübertrages der reflektierten Luftmoleküle auf den Flügel zu erklären versuchte. Wie in Abb. B.3.2 dargestellt, reicht der dabei erzeugte Auftrieb aber nicht, um zu erklären, warum ein Flugzeug fliegt. Eine

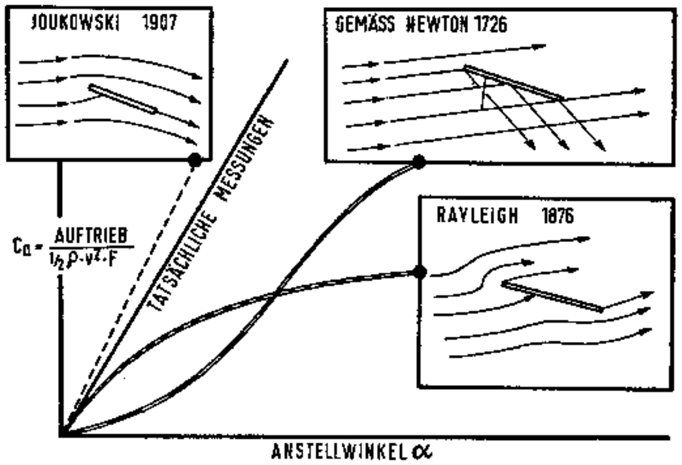

Abbildung B.3.4: Vergleich von verschiedenen historischen Auftriebstheorien mit tatsächlichen Messungen.

bessere Näherung ist die Theorie von Rayleigh, bei der ein Strömungsbild ähnlich dem einer auf einer Flüssigkeitsoberfläche gleitenden Platte angenommen wird.

Priv.-Doz. Dr. A. Schadschneider

4. Übung zur Vorlesung
Einführung in die Hydrodynamik

im Wintersemester 2003/04

7. Strömung um schwingende Hindernisse

Bestimme die Bewegungsgleichung für eine Kugel, die in einer idealen Flüssigkeit Schwingungen ausführt.

Bem.: Für eine Kugel ist $\mathbf{A} = \frac{1}{2}R^3\mathbf{u}$.

8. Schwerewellen bei endlicher Tiefe

Bestimme die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schwerewellen auf einer unbegrenzten Oberfläche einer Flüssigkeit der Tiefe h. Betrachte die Grenzfälle $kh \ll 1$ und $kh \gg 1$.

Tip: $v_z(z = -h) = 0$

Besprechung der Aufgaben: 2. Dezember 2003, 13^{45} Uhr

Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter `www.thp.uni-koeln.de/~as`.

B.4 Lösungen zu Übung 4

Aufgabe 7

Der Gesamtimpuls der von der Kugel in Bewegung gesetzten Flüssigkeit ist nach (II.6.64) durch

$$\mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0\mathbf{u} = 2\pi R^3\rho\mathbf{u} - \frac{4\pi}{3}\rho R^3\mathbf{u} = \frac{2\pi}{3}\rho R^3\mathbf{u} \tag{B.4.1}$$

gegeben. Der Tensor der zusätzlichen Masse, der nach (II.6.63) durch $P_j = m_{jk}u_k$ definiert ist, ist daher

$$m_{jk} = \frac{2\pi}{3}\rho R^3\delta_{jk}. \tag{B.4.2}$$

Somit ergibt sich für die Widerstandskraft auf die Kugel

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{2\pi}{3}\rho R^3\frac{d\mathbf{u}}{dt}. \tag{B.4.3}$$

Die Bewegungsgleichung $M\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F} + \mathbf{f}$ der Kugel lautet daher

$$\frac{4\pi R^3}{3}\left(\rho_0 + \frac{\rho}{2}\right)\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}, \tag{B.4.4}$$

wobei ρ_0 die Dichte der Kugel bezeichnet. In die Bewegungsgleichung geht also eine effektive Masse der Kugel ein, die aus der Kugelmasse und der halben Masse der verdrängten Flüssigkeitsmenge besteht.

Aufgabe 8

Am Boden verschwindet die Normalkomponente der Geschwindigkeit, d.h. $v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$ für $z = -h$. Berücksichtigt man dies in der allgemeinen Lösung $\phi(\mathbf{r},t) = \left(Ae^{kz} + Be^{-kz}\right)\cos(kx - \omega t)$ (vgl. (II.7.10), (II.7.12)), so folgt

$$\phi(\mathbf{r},t) = A\cosh(k(z+h))\cos(kx - \omega t). \tag{B.4.5}$$

Aus Gleichung (II.7.9) mit $\zeta = 0$ erhalten wir dann die Dispersionsbeziehung

$$\omega^2 = gk\tanh kh \tag{B.4.6}$$

und für die Ausbreitungsgeschwindigkeit $U = \frac{\partial\omega}{\partial k}$

$$U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k\tanh kh}}\left[\tanh kh + \frac{kh}{\cosh^2 kh}\right]. \tag{B.4.7}$$

Für $kh \gg 1$ vereinfacht sich dies zu $U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$, während sich für $kh \ll 1$ der von den Schwerewellen bekannte Zusammenhang $U = \sqrt{gh}$ ergibt.

5. Übung zur Vorlesung
Einführung in die Hydrodynamik

im Wintersemester 2003/04

9. Rohrströmung

Bestimme das Geschwindigkeitsprofil und den Durchfluß für die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit durch ein Rohr mit ringförmigem Querschnitt (Radien $R_1 < R_2$). Diskutiere den Grenzfall $R_1 \to 0$.

10. Strömung auf einer schiefen Ebene

Wir betrachten eine inkompressible Flüssigkeitsschicht der Dicke h, die unter dem Einfluß der Schwerkraft eine schiefe Ebene (Winkel α) hinunterströmt.

a) Zeige, dass die Bewegungsgleichungen durch geeignete Wahl des Koordinatensystems durch

$$\frac{dp}{dz} + \rho g \cos\alpha = 0, \qquad \eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \rho g \sin\alpha = 0$$

gegeben sind.
Bem.: Die Navier-Stokes-Gleichung bei Anwesenheit einer konservativen Kraft $\mathbf{f} = -\nabla u$ erhält man durch die Ersetzung $p \to p + u$.

b) Zeige, dass die Randbedingungen durch

$$v(0) = 0, \qquad p(h) = p_0, \qquad \eta \frac{dv}{dz}\bigg|_{z=h} = 0$$

gegeben sind.

c) Bestimme das Geschwindigkeits- und Druckprofil , sowie den Flüssigkeitsstrom Q.

Besprechung der Aufgaben: 15. Dezember 2003, 14^{15} Uhr in der Bibliothek der Kernphysik.

Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter `www.thp.uni-koeln.de/~as`.

B.5 Lösungen zu Übung 5

Aufgabe 9

Als allgemeine Lösung für die Strömung in einem Rohr hatten wir in der Vorlesung (siehe (III.3.21)) für das Geschwindigkeitsfeld

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + a \ln r + b \tag{B.5.1}$$

abgeleitet. An den Zylinderwänden gilt nun $v(R_j) = 0$ $(j = 1, 2)$. Somit folgt für das Geschwindigkeitsfeld

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)\right]. \tag{B.5.2}$$

Der Durchfluß ergibt sich dann zu

$$Q = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} vr\,dr = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l}\left[R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)\right]. \tag{B.5.3}$$

Bei festem Außenradius R_2 divergiert $\ln(R_2/R_1)$ im Grenzfall $R_1 \to 0$. Wir erhalten dann das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz zurück.

Aufgabe 10

a) Die stationäre Navier-Stokes-Gleichung lautet in unserem Fall

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} \tag{B.5.4}$$

mit der äußeren Kraft $\mathbf{f} = \mathbf{g}$. Aus der Symmetrie des Problems folgt, daß $p = p(z)$ und $\mathbf{v} = v(z)\mathbf{e}_x$ ist. Mit der in Abb. B.5.1 dargestellten Wahl des Koordinatensystems ergibt sich die Kraftzerlegung $\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_x = g \sin\alpha$ und $\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_z = -g\cos\alpha$.

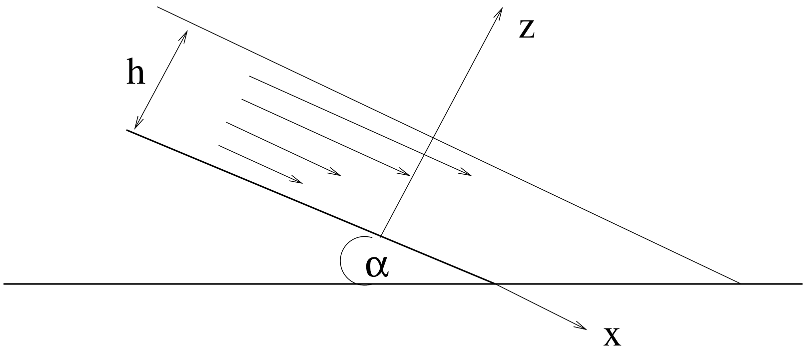

Abbildung B.5.1: Zur Wahl des Koordinatensystems bei dem Fluß auf einer schiefen Ebene.

Der Konvektionsterm vereinfacht sich zu

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = v\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{e}_x = 0, \tag{B.5.5}$$

da v nur eine Funktion von z ist. Somit verbleibt von der Navier-Stokes-Gleichung

$$0 = \rho \mathbf{g} - \mathbf{e}_z \frac{dp}{dz} + \mathbf{e}_x \eta \frac{d^2 v}{dz^2} = \mathbf{e}_x \left(\rho g \sin\alpha + \eta \frac{d^2 v}{dz^2} \right) - \mathbf{e}_z \left(\rho g \cos\alpha + \frac{dp}{dz} \right). \tag{B.5.6}$$

Die beiden Komponenten entsprechen dann den in der Aufgabenstellung angegebenen Bewegungsgleichungen.

b) An der festen Wand bei $z = 0$ ist $\mathbf{v}|_{\text{Wand}} = 0$, also in unserem Fall $v(0) = 0$. Durch die freie Oberfläche bei $z = h$ ist kein Impulsstrom möglich, außer durch den externen Druck. In unserem Fall bedeutet dies

$$\Pi_{jz} = 0 \quad (j \neq z), \qquad \Pi_{zz} = p_0. \tag{B.5.7}$$

Der Impulsstrom hängt über $\Pi_{jk} = p\delta_{jk} - \sigma'_{jk} + \rho v_j v_k$ mit dem Reibungstensor zusammen. Auf Grund der Inkompressibilität gilt wegen $\mathbf{v} = v(z)\mathbf{e}_x$

$$\sigma'_{jk} = \eta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) = \eta \left(\delta_{jk}\delta_{kz} + \delta_{jz}\delta_{kx} \right) \frac{dv}{dz}. \tag{B.5.8}$$

Daher folgt

$$p_0 \delta_{jz} = \Pi_{jz} = p\delta_{jz} - \eta \frac{dv}{dz} \delta_{jx} \tag{B.5.9}$$

und somit die Randbedingungen

$$p(h) = p_0, \qquad \eta \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=h} = 0. \tag{B.5.10}$$

c) Die Lösungen der in Teil a) abgeleiteten Bewegungsgleichungen lauten

$$p = \rho g (h - z) \cos\alpha, \tag{B.5.11}$$

$$v = \frac{\rho g}{2\eta} z (2h - z) \sin\alpha. \tag{B.5.12}$$

Somit ergibt sich für den Durchfluß

$$Q = \int_0^L \int_0^h v dz dy = L \int_0^h v dz = \frac{g h^3}{3\eta} \sin\alpha. \tag{B.5.13}$$

Offensichtlich verschwindet der Durchfluß für $\alpha = 0$, wie wir das auch erwarten. Ein Strom ohne Druckgradient in x-Richtung ist nicht möglich.

6. Übung zur Vorlesung
Einführung in die Hydrodynamik

im Wintersemester 2003/04

11. Reynolds-Zahl und Blutzirkulation

Schätze die Reynolds-Zahl für die Blutströmung in der Aorta ab! Die relevanten Größenordnungen sind dabei $l = 2$ cm, $u = 0.5$ m/s und $\eta = 4 \cdot 10^{-3}$ Ns/m^2. Was bedeutet das Ergebnis?

12. Widerstandskraft paralleler Platten

Zwei parallele kreisförmige Platten vom Radius R liegen in geringem Abstand h voneinander. Ihr Zwischenraum ist von einer inkompressiblen Flüssigkeit ausgefüllt. Die Platten nähern sich mit konstanter Geschwindigkeit u und verdrängen dabei die Flüssigkeit.

a) Begründe die Näherungen

$$v_z \ll v_r, \qquad \frac{\partial v_r}{\partial r} \ll \frac{\partial v_r}{\partial z}$$

(in Zylinderkoordinaten).

b) Zeige, dass die Bewegungsgleichungen lauten

$$\eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

c) Begründe die Randbedingungen

$$v_r(z=0) = v_z(z=0) = 0, \qquad v_r(z=h) = 0, \qquad v_z(z=h) = -u, \qquad p(r=R) = p_0,$$

wobei p_0 der äußere Druck ist.

d) Bestimme den Widerstand, den die Platten zu überwinden haben.

Besprechung der Aufgaben: 6. Januar 2004, 13^{45} Uhr.

Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter `www.thp.uni-koeln.de/~as`.

B.6 Lösungen zu Übung 6

Aufgabe 11

Mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Größenordnungen und der Dichte $\rho_{\text{Blut}} = 1$ g/cm^3 $=$ $1 \cdot 10^3$ kg/m^3 des Blutes ergibt sich

$$Re = \frac{\rho u l}{\eta} \approx 2500. \tag{B.6.1}$$

Dies ist viel größer als die kritische Reynolds-Zahl $Re_c = 1160$, bei der die Strömung durch ein Rohr turbulent wird. Diese einfache Abschätzung zeigt, daß es bei der Strömung des Blutes durch die Aorta leicht zu Turbulenzen kommen kann. Insbesondere ist in der Austriebsphase die Strömungsgeschwindigkeit u — und damit die Reynolds-Zahl — noch größer. Die bei der turbulenten Strömung entstehenden Wirbel transportieren Energie und können daher beim Auftreffen auf die Gefäßwände zu Schädigungen führen.

Aufgabe 12

Wir wählen im folgenden Zylinderkoordinaten, deren Ursprung im Mittelpunkt der unteren Platte liegt. Außerdem nehmen wir o.B.d.A. an, daß die untere Platte unbeweglich ist.
a) Die Strömung ist axialsymmetrisch, daher treten keine Winkelabhängigkeiten auf. Da die Flüssigkeitsschicht dünn sein soll, verläuft die Strömung im wesentlichen radial, d.h. $v_z \ll v_r$. Die zweite Bedingung folgt hieraus nicht offensichtlich, sie hängt mit der Inkompressibilität zusammen.
b) Die stationäre Navier-Stokes-Gleichung lautet

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}. \tag{B.6.2}$$

Die z-Komponente dieser Gleichung liefert unter Beachtung von a) sofort

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{B.6.3}$$

In Zylinderkoordinaten gilt für eine beliebige Funktion f

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{B.6.4}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{B.6.5}$$

In unserem Fall vereinfacht sich dies, da keine φ-Abhängigkeit vorliegt. Speziell gilt

$$\Delta v_r \approx \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}. \tag{B.6.6}$$

Die r-Komponente der Navier-Stokes-Gleichung liefert somit

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}. \tag{B.6.7}$$

Nach Teil a) ist

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \approx 0 \tag{B.6.8}$$

und somit

$$\frac{\partial p}{\partial r} \approx \eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}. \tag{B.6.9}$$

Schließlich haben wir noch die Kontinuitätsgleichung:

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{B.6.10}$$

c) An der unteren Platte muß die Geschwindigkeit verschwinden, d.h. $\mathbf{v}|_u = 0$, und somit

$$v_r(z = 0) = v_z(z = 0) = 0. \tag{B.6.11}$$

An der oberen Platte ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gerade $-\mathbf{u}$, d.h. $\mathbf{v}|_o = -\mathbf{u}$, und somit

$$v_r(z = h) = 0, \qquad v_z(z = h) = -u. \tag{B.6.12}$$

Am Rand der Platten existiert eine freie Oberfläche mit dem äußerem Druck p_0. Der Impulsstrom muß also verschwinden, d.h.

$$\sigma'_{jk} n_k - p n_j = 0 \tag{B.6.13}$$

mit dem Normalenvektor $\mathbf{n} = \hat{r}$. Dies liefert

$$\sigma'_{jr} = 0 \qquad \text{für } \; j = r, \varphi, z. \tag{B.6.14}$$

Da $\sigma'_{jk} = \eta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)$ folgt in Zylinderkoordinaten

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \approx 0, \qquad \sigma'_{\varphi r} = 0, \qquad \sigma'_{zr} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \tag{B.6.15}$$

Aus (B.6.13) ergibt sich für $j = r$

$$p = \sigma'_{rr} = p_0 \tag{B.6.16}$$

und deshalb

$$p(r = R) = p_0. \tag{B.6.17}$$

d) Aus der Navier-Stokes-Gleichung folgt mit den bisherigen Ergebnissen

$$\eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dr}, \tag{B.6.18}$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß p nicht von φ und nach b) auch nicht von z abhängt. Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von z ab, die rechte nur von r. Daher müssen beide Seiten konstant sein:

$$\eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r} = const. = \frac{dp}{dr} \tag{B.6.19}$$

und somit

$$v_r = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dz} z(z-h). \tag{B.6.20}$$

Außerdem folgt durch Integration der dritten Bewegungsgleichung aus b)

$$0 = \int_0^h \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dz = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h r v_r dz + v_z(h) - v_z(0) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h r v_r dz - u. \tag{B.6.21}$$

Daher ist

$$u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^h r v_r dz = \frac{1}{2\eta r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} h z^2 \right) \Bigg|_{z=0}^{z=h} \right) = -\frac{h^3}{12\eta r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right). \tag{B.6.22}$$

Integration liefert dann, da $\frac{dp}{dr}$ konstant ist, mit $p(R) = p_0$

$$p = p_0 + \frac{3\eta u}{h^3}(R^2 - r^2). \tag{B.6.23}$$

Für den Impuls gilt allgemein $P_j = p n_j - \sigma'_{jk} n_k$, womit sich in unserem Fall für die wirkende Kraft ergibt

$$F = \int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{f} = \int P_z df = 2\pi \int_0^R r p(r) dr = \frac{3\eta u R^4}{2h^3}. \tag{B.6.24}$$

Dabei haben wir

$$\sigma'_{zz}\Big|_{\text{Platte}} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}\Bigg|_{\text{Platte}} = 0 \tag{B.6.25}$$

ausgenutzt.

7. Übung zur Vorlesung Einführung in die Hydrodynamik

im Wintersemester 2003/04

13. Integrabilität der KdV-Gleichung: Lax-Paare

Die Lösbarkeit vieler nichtlineare Differentialgleichungen beruht auf der Tatsache, dass es sich eigentlich um integrable (mechanische) Systeme handelt. Sie führen auf zeitabhängige Potentiale, die ein zeitunabhängiges Spektrum generieren.
Sei $\mathcal{H}(t)$ ein zeitabhängiger selbstadjungierter linearer Operator, der differenzierbar ist und die (diskreten) reellen Eigenwerte $\lambda(t)$ besitzt, d.h.

$$\mathcal{H}(t)|\psi(t)\rangle = \lambda(t)|\psi(t)\rangle.$$

Wir betrachten nun einen (i.a. nichtlinearen!) Operator $\mathcal{B}(t)$, für den gilt

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = [\mathcal{B}, \mathcal{H}].$$

Die Operatoren $\mathcal{B}$ und $\mathcal{H}$ bezeichnet man dann als *Lax-Paar*.

a) Zeige zunächst:

$$(\mathcal{H} - \lambda)\left(\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} - \mathcal{B}|\psi\rangle\right) = \lambda_t|\psi\rangle,$$

wobei $\lambda_t := \frac{\partial\lambda}{\partial t}$.

b) Folgere aus a): $\lambda_t = 0$, d.h. das Spektrum von $\mathcal{H}(t)$ ist zeitunabhängig.
Tip: Benutze die Selbstadjungiertheit von $\mathcal{H}$.

c) Wir betrachten speziell den Schrödinger-Operator $\mathcal{H} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$ und $\mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial x}$. Zeige, dass das Spektrum von $\mathcal{H}$ zeitunabhängig ist, falls $V_t = V_x$. Finde ein Beispiel für ein solches Potential.

d) Als zweites Beispiel betrachten wir wieder den Schrödinger-Operator aus c) und

$$\mathcal{B} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + b\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}b$$

mit $b = -\frac{3}{4}V$. Zeige, dass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{H}$ ein Lax-Paar bilden, falls

$$V_t = \frac{1}{4}V_{xxx} - \frac{3}{2}VV_x.$$

Somit folgt: Erfüllt das Potential V die KdV-Gleichung, so ist das Spektrum der entsprechenden Schrödinger-Gleichung zeitunabhängig.

Bem.: Eine Konsequenz der obigen Zusammenhänge ist, dass man "physikalische Methoden" (z.B. die sog. "inverse Streutheorie") zur Lösung partieller DGLen einsetzen kann.

Besprechung der Aufgaben: 20. Januar 2004, 13^{45} Uhr.

Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter `www.thp.uni-koeln.de/~as`.

B.7 Lösungen zu Übung 7

Aufgabe 13

a) Differenzieren wir $\mathcal{H}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ nach dem Parameter t, so folgt[1]

$$\dot{\mathcal{H}}|\psi\rangle + \mathcal{H}|\dot{\psi}\rangle = \dot{\lambda}|\psi\rangle + \lambda|\dot{\psi}\rangle. \tag{B.7.1}$$

Da $\dot{\mathcal{H}} = [\mathcal{B}, \mathcal{H}]$ ist, erhalten wir

$$\dot{\lambda}|\psi\rangle = [\mathcal{B}, \mathcal{H}]|\psi\rangle + (\mathcal{H} - \lambda)|\dot{\psi}\rangle = \lambda\mathcal{B}|\psi\rangle - \mathcal{H}\mathcal{B}|\psi\rangle + (\mathcal{H} - \lambda)|\dot{\psi}\rangle = (\mathcal{H} - \lambda)\left(|\dot{\psi}\rangle - \mathcal{B}|\psi\rangle\right). \tag{B.7.2}$$

b) Wir multiplizieren Gleichung (B.7.2) von links mit $\langle\psi|$ und erhalten

$$\dot{\lambda}\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\mathcal{H} - \lambda|\dot{\psi}\rangle - \langle\psi|(\mathcal{H} - \lambda)\mathcal{B}|\psi\rangle = 0, \tag{B.7.3}$$

da auf Grund der Selbstadjungiertheit von $\mathcal{H}$ gilt $\langle\psi|\mathcal{H} = \lambda\langle\psi|$. Somit ist $\dot{\lambda} = 0$ und das Spektrum damit t-unabhängig.
c) Wir wenden zunächst den Kommutator auf eine beliebige Funktion f an:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{B}, \mathcal{H}]f &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)f - \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)\frac{\partial f}{\partial x} \\
&= -f''' + V'f + Vf' + f''' - Vf' = V'f.
\end{aligned} \tag{B.7.4}$$

Für die Zeitableitung von $\mathcal{H}$ gilt in unserem Fall explizit

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = \dot{V}. \tag{B.7.5}$$

Zusammengenommen lautet daher die Lax-Gleichung

$$\dot{V} = V'. \tag{B.7.6}$$

Diese Bedingung ist z.B. für alle Potentiale erfüllt, die einer Verschiebung entsprechen, d.h.

$$V(x,t) = V(x+t). \tag{B.7.7}$$

d) In diesem Fall gilt für den Kommutator

$$\begin{aligned}
[\mathcal{B}, \mathcal{H}] &= \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + b\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}b\right)\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)f - \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + b\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}b\right)f \\
&= -f^{(5)} - bf''' - (bf'')' + (Vf)''' + b(V'f + Vf') + (bVf)' \\
&\quad + f^{(5)} + (bf')'' + (bf)''' - Vf''' - Vbf' - V(bf)' \\
&= 4b'f'' + 4b''f' + b'''f + 3V'f'' + 3V''f' + V'''f + 2bfV' \\
&= \frac{1}{4}V'''f - \frac{3}{2}VV'f = \left(\frac{1}{4}V_{xxx} - \frac{3}{2}VV_x\right)f,
\end{aligned} \tag{B.7.8}$$

[1] Wir kennzeichnen hier die Ableitung nach t durch einen Punkt.

wobei wir in der letzten Zeile die explizite Form $b = -\frac{3}{4}V$ ausgenutzt haben. Außerdem wurde mehrfach die bekannte Regel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)} g^{(j)} \tag{B.7.9}$$

für die n-te Ableitung eines Produktes angewendet. Da wieder $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \dot{V}$ gilt, ist die Lax-Gleichung gerade die KdV-Gleichung.

Priv.-Doz. Dr. A. Schadschneider

8. Übung zur Vorlesung Einführung in die Hydrodynamik

im Wintersemester 2003/04

14. Burgers-Gleichung und Cole-Hopf-Transformation

In der Vorlesung haben wir die *Burgers-Gleichung*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\,\rho\frac{\partial\rho}{\partial x} = \tilde{D}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$$

als eine Erweiterung des Lighthill-Whitham-Modells vorgestellt. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die Burgers-Gleichung äquivalent zur Wärmeleitungsgleichung ist. Dies gelingt mit Hilfe der sog. *Cole-Hopf-Transformation*.

a) Zeige, dass man durch geeignete Reskalierung den Koeffizienten $2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}$ des nichtlinearen Terms zu Eins machen kann:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\rho}{\partial x} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}.$$

b) Wir definieren $\psi'(x,t)$ durch $\rho(x,t) =: \frac{\partial\psi'(x,t)}{\partial x}$. Zeige, dass die Burgers-Gleichung die Form

$$\frac{\partial\psi'}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2 = D\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}.$$

gebracht werden kann.
c) Nun transformieren wir mit $\psi'(x,t) =: -2D\ln\psi(x,t)$. Zeige, dass die Burgers-Gleichung in die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = D\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

übergeht.
d) Bestimme die allgemeine Lösung der Wärmeleitungsgleichung aus c) für die Anfangsbedingung $\psi(x,t=0)$. Wie erhält man die allgemeine Lösung der Burgers-Gleichung?

Besprechung der Aufgaben: 27. Januar 2004, 13^{45} Uhr.

Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden Sie unter `www.thp.uni-koeln.de/~as`.

B.8 Lösungen zu Übung 8

Aufgabe 14

a) Für die reskalierten Variablen

$$x' := \alpha x, \qquad , t' := \beta t \tag{B.8.1}$$

gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} = \alpha \frac{\partial}{\partial x'} \tag{B.8.2}$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial t'}. \tag{B.8.3}$$

Eingesetzt in die Burgers-Gleichung ergibt sich damit

$$\beta \frac{\partial \rho}{\partial t'} + 2\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \rho \alpha \frac{\partial \rho}{\partial x'} = \tilde{D}\alpha^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2}, \tag{B.8.4}$$

wobei die Dichte ρ jetzt als Funktion von x', t' zu betrachten ist. Durch die Wahl

$$\alpha = \frac{\rho_{\max}}{2v_{\max}}, \qquad \beta = 1 \tag{B.8.5}$$

nimmt die Burgers-Gleichung die Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \qquad \text{mit} \quad D = \tilde{D}\frac{\rho_{\max}^2}{4v_{\max}^2} \tag{B.8.6}$$

an.

b) Im folgenden betrachten wir die reskalierte Gleichung, lassen aber den Strich zur Kennzeichnung der reskalierten Variablen weg.

Nach Einsetzen von ψ' in die Burgers-Gleichung folgt

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = D\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^3}. \tag{B.8.7}$$

Wegen

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial \psi'}{\partial x}\,\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} \tag{B.8.8}$$

können wir über x integrieren und erhalten

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\right)^2 = D\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}. \tag{B.8.9}$$

c) Unter Beachtung von

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = -2D\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = -2D\left[\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right] \tag{B.8.10}$$

ergibt sich aus b) zunächst

$$-2D\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{4D}{\psi^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2=-2D^2\left[\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] \tag{B.8.11}$$

und somit

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=D\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \tag{B.8.12}$$

Dies ist die bekannte Diffusionsgleichung.

d) Die allgemeine Lösung der Diffusionsgleichung ist durch

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\psi(x',0)e^{-\frac{(x-x')^2}{2Dt}} \tag{B.8.13}$$

gegeben. Dies macht man sich mit dem Separationsansatz $\psi(x,t)=f(x)g(t)$ klar. Eingesetzt in die Diffusionsgleichung folgt hiermit

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{D}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=:-k^2D=\text{konstant.} \tag{B.8.14}$$

Die linke Seite hängt nur von t ab, die rechte nur von x. Daher müssen sie konstant sein. Wir haben die Konstante zweckmässigerweise mit $-k^2D$ bezeichnet.

Integration der beiden Gleichungen liefert nun

$$g(t)\propto e^{-k^2Dt},\qquad f(x)\propto e^{ikx}. \tag{B.8.15}$$

Durch Überlagerung der speziellen Lösungen erhält man für die allgemeine Lösung

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}a(k)e^{ikx-k^2Dt}, \tag{B.8.16}$$

wobei die Funktion $a(k)$ durch die Anfangsbedingungen bestimmt wird. Ist $\psi(x):=\psi(x,t=0)$ vorgegeben, so ist

$$a(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-ikx}dx. \tag{B.8.17}$$

Setzt man dies in die allgemeine Lösung ein, so kann man nach einer quadratischen Ergänzung durch Einführung der neuen Variablen

$$p:=k-i\frac{x-x'}{2Dt} \tag{B.8.18}$$

das k- (bzw. p-) Integral ausführen und erhält die oben angegebene Form der Lösung.

I.a. ist in unserem Fall die Anfangsbedingung $\rho(x,0)$ für die Burgers-Gleichung vorgeben. Die entsprechende Anfangsbedingung

$$\psi(x,0)=e^{-\frac{1}{2D}\int_0^x dx'\rho(x',0)}. \tag{B.8.19}$$

für die Diffusionsgleichung folgt dann aus der Cole-Hopf-Transformation

$$\rho(x,t)=-\frac{2D}{\psi(x,t)}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}=-2D\frac{\partial}{\partial x}\ln\psi. \tag{B.8.20}$$

Literaturverzeichnis

[1] L.D. Landau und E.M. Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI: Hydrodynamik* (Akademie-Verlag)

[2] W. Greiner, H. Stock: *Theoretische Physik, Band 2A: Hydrodynamik* (Verlag Harri Deutsch)

[3] W. Freedman: *Das expandierende Universum*, Spektrum der Wissenschaft, Juni 2003

[4] R. Sexl, H. Sexl: *Weiße Zwerge — Schwarze Löcher* (Vieweg Verlag)

[5] A. Budó: *Theoretische Mechanik* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften)

[6] D.H. Rothman und S. Zaleski: *Lattice-gas cellular automata (Simple models of complex hydrodynamics)* (Cambridge University Press)