11. Übung zur Vorlesung
Stark korrelierte Systeme der Festkörperphysik

im Sommersemester 2003

40. Zum Bethe-Ansatz des Hubbard-Modells

In der Vorlesung haben wir die Bethe-Ansatz-Gleichungen des Hubbard-Modells in der Form

$$e^{iLk_j} = \prod_{\alpha=1}^{N_\downarrow} \frac{\sin k_j - \lambda_\alpha + iU/4}{\sin k_j - \lambda_\alpha - iU/4}, \qquad \prod_{j=1}^{N} \frac{\lambda_\alpha - \sin k_j + iU/4}{\lambda_\alpha - \sin k_j - iU/4} = -\prod_{\beta=1}^{N_\downarrow} \frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta + iU/2}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta - iU/2}$$

abgeleitet.

a) Bringe diese Gleichungen in die logarithmische Form

$$Lk_j = 2\pi I_j + \sum_{\beta=1}^{N_\downarrow} \theta(2\sin k_j - 2\lambda_\beta),$$
$$\sum_{j=1}^{N} \theta(2\sin k_j - 2\lambda_\alpha) = 2\pi J_\alpha - \sum_{\beta=1}^{N_\downarrow} \theta(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)$$

mit $\theta(x) = -2\arctan(2x/U)$.
Analog zum Heisenberg-Modell können die Parameter I_j und J_α ganz- und halbzahlig sein. Wie hängen diese von den Paritäten der Teilchenzahlen N und $N_\downarrow$ ab?

b) Drücke den Impuls $P = \sum_{j=1}^{N} k_j$ durch die Bethe-Quantenzahlen I_j und J_α aus!

c) Für den Grundzustand sind die Bethe-Quantenzahlen durch

$$I_j = j - \frac{N+1}{2}, \qquad J_\alpha = \alpha - \frac{N_\downarrow + 1}{2}$$

mit $j = 1, \ldots, N$ und $\alpha = 1, \ldots, N_\downarrow$ gegeben. Begründe dies im Grenzfall $U \to \infty$.

d) Leite durch Einführung der Dichten

$$\rho(k_j) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L(k_{j+1} - k_j)}, \qquad \sigma(\lambda_\alpha) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L(\lambda_{\alpha+1} - \lambda_\alpha)}$$

die Integralgleichungen für den Grundzustand ab:

$$\begin{aligned} 2\pi\rho(k) &= 1 - 2\cos k \int_{-B}^{B} \theta'(2\sin k - 2\lambda)\sigma(\lambda)d\lambda \\ 2\pi\sigma(\lambda) &= \int_{-B}^{B} \theta'(\lambda - \tilde{\lambda})\sigma(\tilde{\lambda})d\tilde{\lambda} - 2\int_{-Q}^{Q} \theta'(2\sin k - 2\lambda)\rho(k)dk. \end{aligned}$$

e) Für den Fall $N_\downarrow = N_\uparrow$ ist $B = \infty$. Löse dann die zweite Gleichung durch Fourier-Transformation und drücke so $\sigma(\lambda)$ durch $\rho(k)$ aus. Setze dies in die erste Gleichung ein und bringe sie in die Form

$$2\pi\rho(k) = 1 + \cos k \int_{-Q}^{Q} h(\sin k - \sin \tilde{k})\rho(\tilde{k})d\tilde{k}.$$

Besprechung der Aufgaben: 22. Juli 2003, 15^{15} Uhr