Andreas Schadschneider

Physik I

Version: 3. Februar 2005

Wintersemester 2004/2005

Vorbemerkungen

Das vorliegende Skript zum theoretischen Teil der Vorlesung *Physik I* ersetzt nicht den regelmässigen Besuch der Vorlesungen. Es ist als Ergänzung gedacht, zum Nacharbeiten oder zur Vorbereitung auf Klausuren und Prüfungen. Deshalb sollten alle Formeln und Aussagen immer kritisch betrachtet werden, es könnten noch Druckfehler enthalten sein!
Wesentlicher Bestandteil der Vorlesung *Physik I* sind die Übungen. Gerade in den ersten Semestern ist es unbedingt erforderlich, den Stoff durch eigenständiges Bearbeiten von Übungsaufgaben zu vertiefen.
Die Vorlesung soll einen Einblick in die Arbeitsweise der theoretischen Physik geben. Ihr Aufbau orientiert sich dabei an physikalischen Fragestellungen. Wenn dies zur Beschreibung der Phänomene notwendig ist, wird in den entsprechenden Abschnitten zunächst eine Einführung in die notwendigen mathematischen Techniken gegeben.

Für Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar. Sie können auch per email an mich (`as@thp.uni-koeln.de`) geschickt werden. Die jeweils aktuellste Version des Skripts ist im Internet über meine Homepage

`http://www.thp.uni-koeln.de/~as/as.html`

verfügbar.
Für Ihre Hilfe bei der Erstellung dieser Ausarbeitung des Skriptes bedanke ich mich bei Marc André Ahrens, Erik Bartel, Frank Brücher, Carsten Burstedde, Sascha Grabolus, Andreas Kemper und Alexander Reischl.

Andreas Schadschneider

Literaturempfehlungen

Im folgenden finden Sie eine kommentierte Auswahl der populärsten Lehrbücher. Die Vorlesung orientiert sich nicht speziell an einem Buch. Ich empfehle Ihnen deshalb, sich vor einem eventuellen Kauf zunächst die einzelnen Werke gründlich anzusehen. Die meisten sind in der Studentenbibliothek vorhanden.

- S. Großmann: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (Teubner-Verlag)

  Sehr empfehlenswerte, preiswerte Einführung in die wichtigsten mathematischen Techniken, von einem Physiker für Physiker geschrieben. Kann während des gesamten Studiums verwendet werden, insbesondere als Nachschlagewerk.

- R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynman Vorlesungen über Physik* (Oldenbourg)

  Ein eher ungewöhnliches Lehrbuch! Sehr empfehlenswert als Ergänzung zur Vorlesung, um einen alternativen Zugang kennenzulernen, insbesondere in der zweisprachigen (deutsch-englisch) Ausgabe.

- W. Nolting: *Grundkurs: Theoretische Physik, Band 1: Klassische Mechanik* (Verlag Zimmermann-Neufang)

  Sehr gut strukturiertes Lehrbuch mit einer guten Einführung auch in die mathematischen Techniken. Enthält zahlreiche Aufgaben und Kontrollfragen und deckt zusammen mit Band 2 im Wesentlichen auch den Stoff der Vorlesung Theoretische Physik 1 ab.

- C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, A.C. Helmholz, B.J. Moyer: *Berkeley Physik Kurs 1: Mechanik* (Vieweg)

  Sehr übersichtliches Buch, das den Stoff der Vorlesung weitgehend abdeckt. Die Themen werden ausführlich und auf relativ einfachem Niveau diskutiert.

- W. Greiner: *Theoretische Physik, Band 1: Mechanik I; Band 2: Mechanik II* (Harri Deutsch)

  Die ersten beiden Bände einer sehr populären Reihe. Alle Bände enthalten zahlreiche Aufgaben mit Lösungen! Band 1 und 2 decken zusammen allerdings nicht den Inhalt der Vorlesung Theoretische Physik 1 ab.

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalische und mathematische Grundgrößen

Zunächst stellen Sie sich vielleicht die Frage “Was ist überhaupt theoretische Physik?”
Im experimentellen Teil der Vorlesung haben Sie gehört, daß man durch die Beobachtung von *physikalischen Größen* Gesetzmäßigkeiten feststellt und so zur Formulierung von *physikalischen Gesetzen* kommt. Ziel der *theoretischen Physik* ist eine einheitliche Erklärung dieser Gesetzmäßigkeiten. Zusätzlich erwartet man von einer “guten” Theorie auch, daß sie (neue) Vorhersagen macht, die einer experimentellen Prüfung unterzogen werden können. Die Formulierung der Gesetze erfolgt in der Sprache der Mathematik.

1.1 Physikalische Größen

Um eine physikalische Größe zu definieren, benötigt man die Angabe einer Meßvorschrift. Es liegt immer *Zahl und Einheit* zusammen vor. Mögliche *Dimensionen* der Einheit sind z.B. Länge, Zeit oder Masse. Man schreibt dann z.B. dim $s =$L, wenn es sich bei der Größe s um eine Länge handelt. Wird s in Metern gemessen, so schreibt man $[s] = m$ für seine Einheit. In vielen Fällen kann eine Dimensionsanalyse zur Kontrolle hilfreich sein (siehe Aufgabe 1). Es haben sich unterschiedliche Maßsysteme entwickelt, die die Basiseinheiten festlegen. So ist das SI-System gesetzlich vorgeschrieben, während in der theoretischen Physik gerne das cgs-System (cm, g, sec) verwendet wird.

Zunächst ein Überblick über die Größenordnungen, mit denen wir es in der Physik zu tun haben:

- Planck-Länge ($\approx 10^{-35}m$): Entspricht in etwa der Länge eines Superstrings. Unterhalb der Planck-Länge bricht unser heutiges Wissen über die Struktur der Raumzeit zusammen, da hier Effekte der Quantengravitation wesentlich werden. In Aufg. 7 (iii) (2. Übung) lernen Sie, wie sich die Planck-Länge durch bekannte Naturkonstanten ausdrücken läßt.

- Radius des Universums ($>$ 10 Milliarden Lichtjahre $\approx 10^{26}m$): Die größte physikalische Länge entspricht der Ausdehnung des Universums.

Die kleinste und die größte relevante Länge unterscheiden sich also um mehr als 60 Größenordnungen! Man kann diese Längen auch in Zeiten umrechnen. Der Umrechnungsfaktor ist dabei die Lichtgeschwindigkeit:

- Planck-Zeit ($\approx 10^{-43}sec$): Entspricht der Zeit, die Licht benötigt, um die Planck-Länge zurückzulegen.

- Alter des Universums ($>$ 10 Milliarden Jahre $\approx 10^{17}sec$)

1.2 Vektoren

Vektoren sind gerichtete Größen. Sie beinhalten Informationen über *Länge* (Zahl) und *Richtung*. Vektoren können auch dimensionsbehaftete Größen sein. Dann haben sie auch eine Einheit.

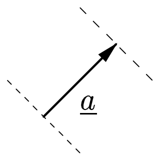


Abbildung 1.1: Verschiebungen lassen sich durch Vektoren charakterisieren.

Ein typischer Vektor ist eine Verschiebung (siehe Abb. 1.1). Damit lautet eine erste, intuitive Definition für einen Vektor:
Größen, die sich wie eine Verschiebung verhalten, bezeichnet man als *Vektoren*.
Man schreibt $\vec{a}, \underline{a}, \mathbf{a}, \ldots$.
Im Rahmen der Vorlesung und in diesem Skript verwenden wir die Notation $\underline{a}$. Dies ist vor allem dann bequem, wenn man mit der Hand schreibt.

Eine mathematisch formalere Definition eines Vektors ist folgende:

Definition 1.1 (Vektorraum, Vektor)**.** Eine Menge von Elementen $V = \{\underline{a}, \underline{b}, \ldots\}$ heißt Vektorraum und $\underline{a}, \underline{b}, \ldots$ Vektoren, wenn für alle $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \cdots \in V$ gilt:

1. Abgeschlossenheit: $\underline{a}+\underline{b} \in V$ und $\lambda\underline{a} \in V$ (für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; λ bezeichnet man auch als Skalar)

2. Assoziativität: $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$

3. Neutrales Element: Es existiert $\underline{0} \in V$ mit $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$ für alle $\underline{a} \in V$

4. Inverse: Für alle $\underline{a} \in V$ existiert $\underline{\tilde{a}} \in V$ mit $\underline{a} + \underline{\tilde{a}} = \underline{0}$. $\underline{\tilde{a}}$ bezeichnet man als inverses Element. Man schreibt auch $-\underline{a}$.

5. Kommutativität: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

6. Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

   (a) $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$
   (b) $(\lambda\mu)\underline{a} = \lambda(\mu\underline{a})$
   (c) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = (\lambda\underline{a}) + (\lambda\underline{b})$

7. $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$

Die Addition zweier Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ kann man sich wie folgt veranschaulichen (siehe Abb. 1.2a): Der Vektor $\underline{b}$ wird parallel an das Ende des Vektors $\underline{a}$ verschoben. $\underline{a} + \underline{b}$ ist dann die Verbindung des Anfangspunktes von $\underline{a}$ mit dem Endpunkt des verschobenen Vektors $\underline{b}$.
Die anschauliche Bedeutung des Multiplikation mit einem Skalar werden wir später in diesem Abschnitt diskutieren.

Abbildung 1.2: Veranschaulichung der Addition von Vektoren (links) und des inversen Elements $\underline{\tilde{a}} = -\underline{a}$ (rechts).

Abbildung Abb. 1.2b veranschaulicht das inverse Element $\underline{\tilde{a}} = -\underline{a}$. $-\underline{a}$ hat die gleiche Länge, aber die entgegengesetzte Richtung von $\underline{a}$. Damit läßt sich auch die Subtraktion von Vektoren als Addition des Inversen definieren.

Beispiel 1.1.
$\mathbb{R}^2$ mit $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, wobei $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

mit der Addition und skalaren Multiplikation: $\underline{a} + \lambda \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda b_1 \\ a_2 + \lambda b_2 \end{pmatrix}$

Verallgemeinerung: $\mathbb{R}^n$
speziell für $n = 1$ erhält man die bekannten Rechenregeln für die reellen Zahlen.

Definition 1.2 (Betrag eines Vektors)**.** Den Betrag bzw. die Länge oder auch Norm eines Vektors $\underline{a}$ bezeichnet man mit

$$|\underline{a}| = a.$$

Später werden wir immer die Schreibweise a verwenden, sofern keine Verwechslungsgefahr besteht.
Speziell gilt: $|\underline{0}| = 0$.
Für das obige Beispiel 1.1 des $\mathbb{R}^2$ bestimmt man den Betrag aus $\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Im folgenden wollen wir drei verschiedene Multiplikationen von Vektoren definieren.

Definition 1.3 (Skalare Multiplikation)**.** $\underline{b} = \lambda \underline{a}$ (Vektor=Skalar $\cdot$ Vektor)

a) $\lambda > 0$: $\underline{a}$ und $\underline{b}$ zeigen in die gleiche Richtung (parallel): $\underline{a} \parallel \underline{b}$
b) $\lambda < 0$: $\underline{a}$ und $\underline{b}$ entgegengesetzt (antiparallel).

Die Regeln für die skalare Multiplikation sind durch die Vektorraum-Axiome festgelegt.

Definition 1.4 (Skalarprodukt)**.** Vektor$\cdot$Vektor=Skalar (Zahl)

Definition im $\mathbb{R}^2$: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
Die Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^n$ ist offensichtlich.
geometrische Definition: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\phi$
Diese geometrische Deutung impliziert nun:
$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow \phi = \pm\pi/2 \Leftrightarrow \underline{a}$ senkrecht auf $\underline{b}$ $(\underline{a} \perp \underline{b})$
Die Projektion von $\underline{b}$ auf $\underline{a}$ ist $|\underline{b}| \cos\phi$ (siehe Abb. 1.3).

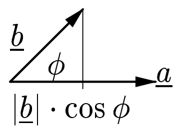


Abbildung 1.3: Die Projektion von $\underline{b}$ auf $\underline{a}$.

Definition 1.5 (Kreuzprodukt (Vektorprodukt, äußeres Produkt))**.** Vektor $\times$ Vektor = Vektor

Im Gegensatz zur skalaren Multiplikation und dem Skalarprodukt ist das Kreuzprodukt $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ zweier Vektoren $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ nur im $\mathbb{R}^3$ definiert.

Anschauliche Definition: $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$ hat den Betrag $|\underline{c}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \sin\phi$ und steht senkrecht auf $\underline{a}$ und $\underline{b}$: $\underline{c} \perp \underline{a}, \underline{c} \perp \underline{b}$. Dabei bilden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ein Rechtssystem (Rechte-Hand-Regel).
Bem: Daraus folgt sofort: $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$ (antikommutativ).

Komponentenweise Definition:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Weitere Rechenregeln für Skalar-und Kreuzprodukt lernen Sie in den Übungen kennen!

Wichtige Bemerkung: Im Gegensatz zur Multiplikation von reellen Zahlen lassen sich die Multiplikationen von Vektoren i.a. nicht umkehren. M.a.W.: Es gibt keine Division durch Vektoren!

1.3 Koordinatensysteme

Definition 1.6 (Basis, Dimension, Koordinatensystem)**.** Es ist zweckmässig, in einem Vektorraum gewisse Vektoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ auszuzeichnen, mit deren Hilfe sich alle anderen Vektoren $\underline{a} \in V$ als

$$\underline{a} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underline{e}_j$$

darstellen lassen[1]. Die minimale Anzahl n von Vektoren, die dies erfüllen, bezeichnet man als Dimension von V und die Menge $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ als Basis von V. Die λ_j sind die Komponenten oder Koordinaten von $\underline{a}$ bzgl. der Basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$. In der Physik spricht man deshalb auch davon, daß $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ ein Koordinatensystem bilden.
Bem.: n kann auch unendlich sein. In diesem Fall spricht man von einem unendlich-dimensionalen Vektorraum.

Bem.: Nimmt man zu einer Basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ zum Beispiel noch den Vektor $\underline{e}_{n+1} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$ hinzu, so lassen sich natürlich immer noch alle $\underline{a}$ in obiger Weise darstellen. Ein solche nicht-

[1]Man sagt: $\underline{a}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$.

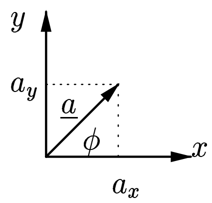


Abbildung 1.4: Kartesisches Koordinatensystem.

minimale Menge von Vektoren, die den Vektorraum aufspannen, bezeichnet man als *Erzeugendensystem*.

Beispiel 1.2.

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Allgemein hat der $\mathbb{R}^n$ die Dimension n.

Häufig ist es zweckmässig, die Basisvektoren möglichst "einfach" zu wählen. I.a. normiert man ihre Länge auf 1 (d.h. $\underline{e}_j \cdot \underline{e}_j = 1$) und wählt die Vektoren paarweise orthogonal: $\underline{e}_j \cdot \underline{e}_l = 0$ für alle $i \neq j$. Man spricht dann von einer *Orthonormalbasis*.

Definition 1.7 (Einheitsvektor)**.** Einheitsvektoren sind Vektoren der Länge 1. Zu einem beliebigen Vektor $\underline{a} \in V$ ($\underline{a} \neq \underline{0}$) kann man einen Einheitsvektor gleicher Richtung definieren:

$$\hat{a} = \frac{a}{|\underline{a}|} \qquad \curvearrowright \qquad |\hat{a}| = 1$$

Speziell für die Einheitsvektoren in x, y, z-Richtung schreibt man: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ oder $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$.

Die Wahl einer Basis eines Vektorraumes ist nicht eindeutig. Man wählt i.a. die Basis, die für ein gegebenes Problem am zweckmässigsten erscheint. Im folgenden werden wir die für die Physik wichtigsten Basen (Koordinatensysteme) des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ diskutieren.

1.3.1 Zweidimensionale Koordinatensysteme

Die einfachste Wahl einer Basis des $\mathbb{R}^2$ führt auf das sog. *kartesische Koordinatensystem*. Hier wählt man Einheitsvektoren $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$ in $x-$ und $y-$Richtung als Basisvektoren und kommt so zu der bekannten Darstellung $\underline{a} = a_x\underline{e}_x + a_y\underline{e}_y$ bzw. $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$.

Das zweite häufig verwendete Koordinatensystem in zwei Dimensionen sind die (ebenen) Polarkoordinaten $(|\underline{a}|, \phi)$. Die Koordinaten sind hier nicht durch die Projektionen auf die $x-$ und

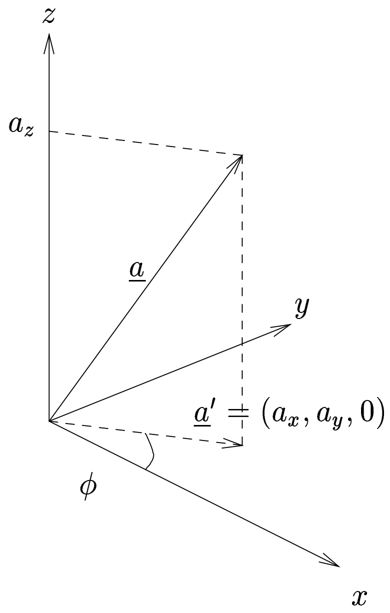


Abbildung 1.5: Zylinderkoordinaten

$y-$Achse gegeben, sondern durch die Länge a des Vektors $\underline{a}$ und den Winkel ϕ, den er mit der $x-$Achse einschließt. Daraus ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Polarkoordinaten:

$$\left.\begin{array}{lcl} a_x & = & a\cos\phi \\ a_y & = & a\sin\phi \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} a & = & \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ \tan\phi & = & \frac{a_y}{a_x} \end{array}\right.$$

Bem: Ein Vektor $\underline{a}$ an sich ist unabhängig vom Koordinatensystem. Erst die Komponenten eines Vektors sind von der Wahl des Koordinatensystems abhängig.

1.3.2 Dreidimensionale Koordinatensysteme

Üblicherweise arbeitet man hier in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem. Bei Problemen mit bestimmten Rotationssymmetrien können jedoch daran angepaßte Koordinatensysteme weiterhelfen.
In *Zylinderkoordinaten* werden zweidimensionale ebene Polarkoordinaten in der x-y-Ebene mit einer z-Koordinate kombiniert (siehe Abb. 1.5). $\underline{a}' = (a_x, a_y, 0)$ ist die Projektion von $\underline{a}$ in die $x - y-$Ebene und ϕ der Winkel zwischen $\underline{a}'$ und der $x-$Achse. Dabei hat man zu beachten, daß das urprüngliche kartesische Koordinatensystem rechtshändig ist, d.h. die Rechte-Hand-Regel

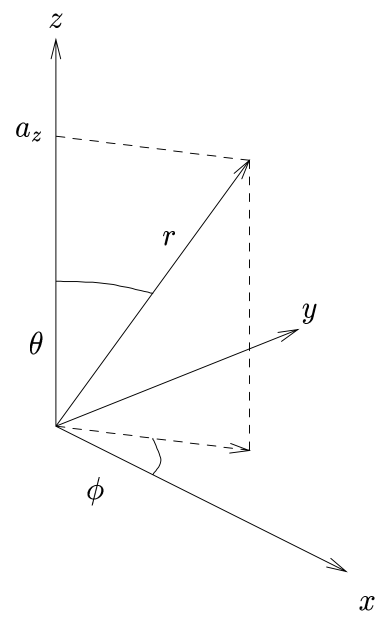


Abbildung 1.6: Kugelkoordinaten

erfüllt[2]. Als Koordinaten erhält man $r = |\underline{a}'|$, ϕ und a_z mit folgender Umrechnungsvorschrift:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_x &=& r\cos\phi \\ a_y &=& r\sin\phi \\ a_z && \end{array}\right\} \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcl} r &=& \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ \tan\phi &=& \frac{a_y}{a_x} \\ a_z && \end{array}\right.$$

In *Kugelkoordinaten* benutzt man außer der Länge $a = |\underline{a}|$ des Vektors $\underline{a}$ zwei Winkel ϕ, θ (siehe Abb. 1.6). Der Winkel θ ist dabei der Winkel zwischen dem Vektor $\underline{a}$ und der $z-$Achse. Um von den Zylinderkoordinaten zu den Kugelkoordinaten überzugehen, muß man die Projektionen $\underline{a}'$ in die $x - y-$Ebene und a_z auf die $z-$Achse durch die Länge a und den Winkel θ ausdrücken. Mit $a' = a\sin\theta$ und $a_z = a\cos\theta$ erhält man:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_x &=& a\sin\theta\cos\phi \\ a_y &=& a\sin\theta\sin\phi \\ a_z &=& a\cos\theta \end{array}\right\} \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcl} a &=& \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |\underline{a}| \\ \tan\phi &=& \frac{a_y}{a_x} \\ \tan\theta &=& \frac{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}{a_z} \end{array}\right.$$

Wir werden später sehen, daß man durch geschickte Wahl des Koordinatensystems oftmals ein Problem stark vereinfachen kann. Dabei hat man sich an den Symmetrien des Problems zu orientieren. Bei einer Kreisbewegung ist z.B. der Radius konstant und nur der Winkel ϕ verändert sich in einer Polarkoordinatendarstellung. In kartesischen Koordinaten würden sich dagegen sowohl die $x-$ als auch die $y-$Koordinate zeitlich ändern.

[2]Der Daumen zeigt in Richtung der $x-$Achse, der Zeigefinger in $y-$Richtung und der Mittelfinger in Richtung der $z-$Achse.

2 Grundlagen der Kinematik

Zur Begriffsklärung:

- Die *Kinematik* beschreibt die Bahn einer Bewegung.
- Die *Dynamik* untersucht physikalische Ursachen einer Bewegung.
- Die *Statik* gibt Bedingungen an, unter denen keine Bewegung auftritt.

2.1 Funktionen und Differentiation

Definition 2.1 (Funktion)**.** Eine Funktion ist eine Zuordnung von zwei Variablen mit einer Vorschrift für die Verknüpfung:

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad y = y(x)$$

Hier können x und y auch Vektoren sein. Die Schreibweise $y(x)$ soll andeuten, daß man in der Physik häufig nicht zwischen der Funktion f (also der Zuordnungsvorschrift) und der abhängigen Variablen y unterscheidet.
Eine stetige Funktion hat einen Kurvenverlauf ohne Sprung[3].

Definition 2.2 (Ableitung, Differentiation)**.** Der Zuwachs $y \to y + \Delta y$, wenn $x \to x + \Delta x$ ist ein Maß für die Veränderung einer Funktion (siehe Abb. 2.1):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Dies ist also die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, y(x))$ und $(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$ (siehe Abb. 2.1).
Die Ableitung $y'(x)$ einer Funktion $y(x)$ ist dann die momentane Veränderung der Funktion, die durch den Grenzwert

$$y'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

gegeben ist. Man schreibt auch $y' = \frac{dy}{dx}$ mit den Differentialen dx, dy.
Höhere Ableitungen sind rekursiv definiert: $y'' = (y')'$, $y^{(n+1)} = (y^{(n)})'$, etc.

Bemerkung: Streng genommen ist $\frac{dy}{dx}$ kein Quotient zweier Größen und kann nicht auseinandergerissen werden. Trotzdem macht man dies in der Physik häufig! Dahinter steckt die Vorstellung, daß man mit den Veränderungen Δy, Δx rechnet und am Ende erst den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ vollzieht.

Beispiel 2.1.

$$y(x) = x^n \quad \curvearrowright \quad y'(x) = nx^{n-1}$$

[3]Wir verzichten hier auf eine streng mathematische Definition zu Gunsten der intuitiven Vorstellung.

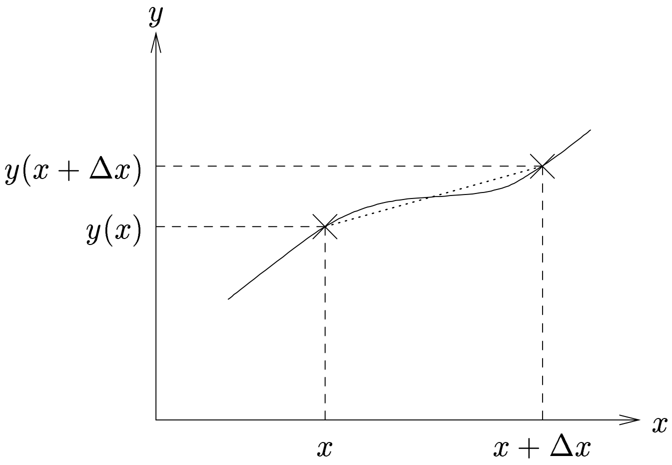


Abbildung 2.1: Zur Ableitung

Im folgenden stellen wir die wichtigsten Rechenregeln zusammen, mit denen sich aus bekannten Ableitungen weitere Ableitungen bestimmen lassen:

1. $y(x) = u(x)v(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ (Produktregel)
2. $y(x) = \frac{u(x)}{v(x} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ (Quotientenregel)
3. $y = f(u), u = u(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = f\left(u\left(x\right)\right)$
   $\Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} \underset{\text{“erweitern”}}{=} \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'\left(u\left(x\right)\right)u'(x)$ (Kettenregel)
4. *Ableitung der Umkehrfunktion* $x = f^{-1}(y)$ *von* $y = f(x)$*:*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \qquad \text{bzw. in Kurzform} \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

   Dies beweist man z. B. über die Kettenregel, da $f(f^{-1}(x)) = x$. Man beachte, daß man die Ableitung von f' an der Stelle $f^{-1}(x)$ zu nehmen hat (siehe folgendes Beispiel).

Beispiel 2.2.
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist bekanntlich der (natürliche) Logarithmus $f^{-1}(x) = \ln x$. Da $f'(x) = e^x$ erhält man als Ableitung des Logarithmus

$$\frac{d\ln x}{dx} = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Definition 2.3 (Ableitung von Vektoren)**.**
Die *Ableitung von Vektoren* ist komponentenweise erklärt: Sei $\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}$ eine vektorwertige Funktion und $\underline{a}(t+\Delta t) = \underline{a}(t) + \Delta\underline{a}(t)$ deren Änderung. Dann ist

$$\frac{d\underline{a}}{dt} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{a}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{da_1}{dt} \\ \frac{da_2}{dt} \end{pmatrix}.$$

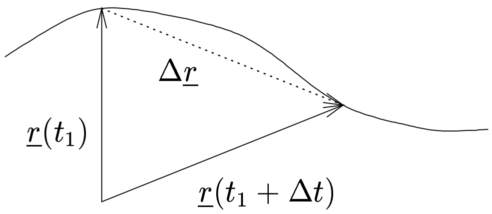


Abbildung 2.2: Zur Bahnkurve

Definition 2.4 (Partielle Ableitungen)**.** Die Ableitung von $y = f(x_1, x_2)$ nach x_1 wird berechnet, indem man x_2 festhält und dann wie oben mit $x = x_1$ ableitet. Schreibweise:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

Beispiel 2.3.
Wir betrachten die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ der Variablen x_1 und x_2. Als partielle Ableitungen erhält man dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 x_2.$$

Bem.: Man beachte, daß

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} := \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 2x_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Diese Regel für die Vertauschbarkeit der Reihenfolge partieller Ableitungen gilt und recht allgemeinen Bedingungen. Wir werden später darauf zurückkommen.

2.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

2.2.1 Bewegung eines Massenpunktes

Es sei $\underline{r}(t)$ der Ortsvektor eines Massenpunktes (keine Ausdehnung) zur Zeit t. Man bezeichnet die Funktion $\underline{r}(t)$ auch als die *Bahnkurve* des Massenpunktes.
In 3 Dimensionen kann man die Bahnkurve z.B. in kartesischen Koordinaten angeben:
$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ mit drei Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$.

Im vorigen Abschnitt 2.1 haben wir die Differentiation von Vektoren definiert. Dies wollen wir nun benutzen, um mit Hilfe der Bahnkurve verschiedene Geschwindigkeiten und die Beschleunigung zu definieren.

Definition 2.5 (Geschwindigkeit, Beschleunigung)**.** Die *mittlere Geschwindigkeit* zwischen t und $t + \Delta t$ ist $\underline{\bar{v}} := \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$ (siehe Abb. 2.2).
Als *momentane Geschwindigkeit* definiert man

$$\underline{v}(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}}(t)\,.$$

Die *Beschleunigung* ist die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit:

$$\underline{a}(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)\,.$$

Die Zeitableitung wird üblicherweise durch einen Punkt gekennzeichnet, um sie von anderen Ableitungen zu unterscheiden. Man kann also auch schreiben:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Beispiele

1-dimensionale Bewegung mit konstanter Beschleunigung Wir betrachten zunächst eine eindimensionale Bewegung mit konstanter Beschleunigung $a = a_x = \text{const}$. Dann folgt:

$$\dot{v} = a \quad \Rightarrow \quad v(t) = at + v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Dabei bezeichnen v_0 und x_0 die Werte von v und x zur Zeit $t = 0$. Diese Größen tauchen auf, weil wir hier zweimal integriert und somit jedesmal eine Integrationskonstante erhalten haben (siehe Kap. 3.1).

Anwendung: Freier Fall
Die Erdoberfläche sei die x-y-Ebene. Die $z-$Koordinate gibt dann die Höhe des Körpers über der Erdoberfläche an: $z(t) = h(t)$. Auf den Körper wirkt die Gravitation und er erfährt so eine Beschleunigung $\underline{a} = (0, 0, -g)$ mit $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$. Mit der Anfangshöhe: $z(t = 0) = z_0 = h$ und der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = v(t = 0) = 0$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} h(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2, \\ v(t) &= \dot{h}(t) = -gt, \\ a(t) &= -g. \end{aligned}$$

Denn Aufschlagszeitpunkt t_A des Körpers erhält man aus $h(t_A) = 0$:

$$t_A = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

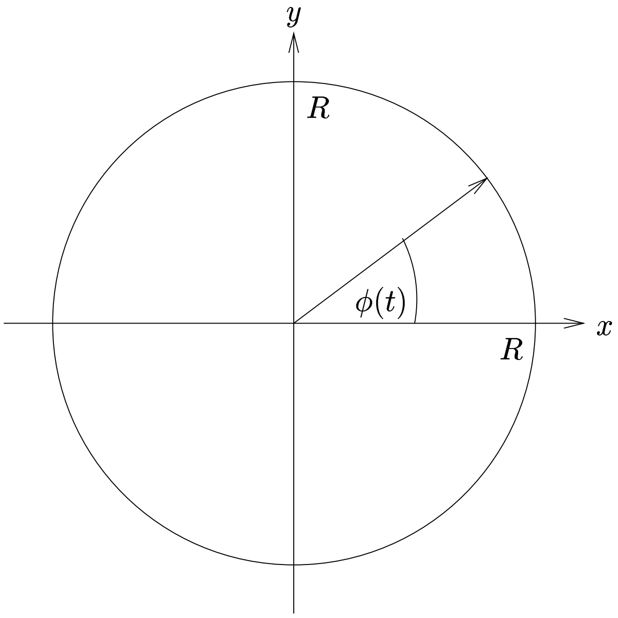


Abbildung 2.3: Kreisbewegung

Die Aufschlaggeschwindigkeit ergibt sich zu

$$v_A = -v(t_A) = gt_A = \sqrt{2gh}.$$

Kreisbewegung (2-dimensional) Wir betrachten nun einen Körper, der sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius R bewegt (siehe Abb. 2.3). Die entsprechende Bahnkurve ist dann gegeben durch

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\phi(t) \\ R\sin\phi(t) \end{pmatrix}.$$

Wie man sieht, ist $r = |\underline{r}| = R$.
Die zeitliche Änderung des Winkels $\phi(t)$ bezeichnet man als Winkelgeschwindigkeit: $\omega(t) = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}(t)$.

Die Geschwindigkeit in $x-$ und $y-$Richtung des Körpers auf der Kreisbahn ist durch

$$v_x = \dot{x} = -R\sin(\phi)\cdot\dot{\phi} = -\omega y,$$
$$v_y = \dot{y} = R\cos(\phi)\cdot\dot{\phi} = \omega x$$

gegeben, d.h.

$$\begin{aligned}\underline{v}(t) &= R\omega \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}, \\ v = |\underline{v}| &= R|\omega|\sqrt{(-\sin\phi)^2 + \cos^2\phi} = R|\omega|.\end{aligned}$$

Somit ist $\underline{v} \cdot \underline{r} = 0$, d.h. zu jedem Zeitpunkt ist $\underline{v} \perp \underline{r}$.
Für die Beschleunigung ergibt sich analog:

$$\begin{aligned}\underline{a} = \dot{\underline{v}} &= R\dot{\omega} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} + R\omega^2 \begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix}, \\ a = |\underline{a}| &= \sqrt{R^2\dot{\omega}^2 + R^2\omega^4} = R\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}.\end{aligned}$$

Speziell: Gleichmäßige Kreisbewegung, d.h. $\dot{\omega} = 0$.
Dann ist $\omega = \text{const}$ und $\phi(t) = \omega t$ (wenn $\phi(t = 0) = 0$).

$$\begin{aligned}\underline{r} &= R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} & r &= R \\ \underline{v} &= R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} & v &= r|\omega| = \text{const} \\ \underline{a} &= -R\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \underline{r} & a &= R\omega^2 = \frac{v^2}{R}.\end{aligned}$$

Dabei ist $\underline{a}$ (anti-)parallel zu $\underline{r}$ und $\underline{v}$ senkrecht dazu (siehe Abb. 2.4). Die Tatsache, daß $\underline{r} \perp \underline{v}$ ist, kann man sich auch direkt klar machen. Da bei der Kreisbewegung der Betrag $r(t)$ konstant ist, ist auch $r^2(t) = \underline{r} \cdot \underline{r} = const$. Differenziert man dies nach der Zeit, so folgt $0 = 2\,\underline{r} \cdot \dot{\underline{r}} = 2\,\underline{r} \cdot \underline{v}$. Das Skalarprodukt von Ortsvektor und Geschwindigkeitsvektor verschwindet also, d.h. diese Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

Bem.: Die Kreisbewegung ist also eine beschleunigte Bewegung, da $\underline{a} \neq \underline{0}$, obwohl $|\underline{v}| = v$ konstant ist !

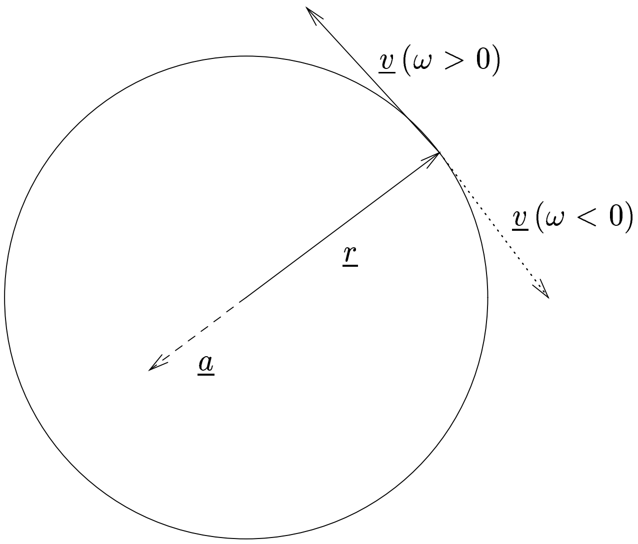


Abbildung 2.4: Richtung von Geschwindigkeit und Beschleunigung bei der gleichmäßigen Kreisbewegung.

3 Dynamik eines Massenpunktes, Kräfte

3.1 Integration und Differentialgleichungen

Eine häufig auftauchende Frage lautet: Wie bestimmt man $x(t)$ wenn $v(t) = \frac{dx}{dt}$ bekannt ist ?
Die zur Beantwortung dieser Frage nötige Umkehrung der Differentiation bezeichnet man als *Integration*.
Bemerkung: Ist $\tilde{x}(t)$ eine beliebige Lösung mit $v(t) = \frac{d\tilde{x}}{dt}$, dann hat die allgemeine Lösung die Form

$$x(t) = \tilde{x}(t) + c$$

mit $c =$const. (Integrationskonstante).

Eine andere Motivation der Integration ist die Flächenberechnung. Man spricht auch von *bestimmten Integralen*. Für die Fläche die vom Graphen $f(x)$ der Funktion f mit der $x-$Achse zwischen $x = a$ und $x = u$ eingeschlossene Fläche (schraffierter Bereich in Abb. 3.1) schreibt man auch:

$$F(u) = \int_a^u f(x)dx.$$

Man fragt sich nun: Wie sieht $F(u)$ aus, wenn $f(x)$ bekannt ist?
Zu ihrer Beantwortung vergrößern wir den Integrationsbereich um ein Stück Δu (siehe Abb. 3.1):

$$\begin{aligned} F(u + \Delta u) &= F(u) + f(u)\Delta u + \Delta R, \\ \Delta R &\approx \Delta u \Delta f. \end{aligned}$$

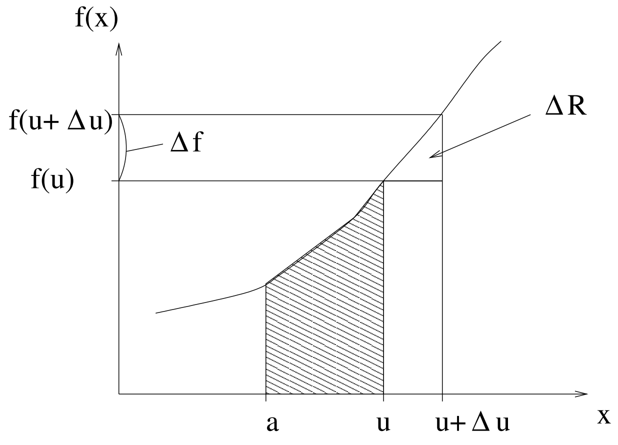


Abbildung 3.1: Das Integral

Die Fläche ΔR haben wir nur sehr grob durch $\Delta u \Delta f$ approximiert. I.a. wird hier noch ein Koeffizient α auftreten, d.h. $\Delta R = \alpha \Delta u \Delta f$. In dem Beispiel in Abb. 3.1 wäre eine Approximation des Bereichs ΔR durch ein Dreieck (d.h. $\alpha = 1/2$) sicher genauer. Wir werden aber gleich sehen, daß es darauf gar nicht ankommt. Wichtig ist nur, daß ΔR gegen Null geht, wenn Δu oder Δf gegen Null gehen.

Nun ergibt sich durch einfache Umformung:

$$\frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = \frac{f(u)\Delta u + \Delta R}{\Delta u} \approx f(u) + \Delta f$$

und somit für $\Delta u \to 0$:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = f(u)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß $\lim_{\Delta u \to 0} \Delta f = 0$.

Insgesamt haben wir also:

$$f(u) = \frac{dF(u)}{du} = F'(u)$$

Man nennt deshalb F auch *Stammfunktion von f.*

Die Menge aller Stammfunktionen[4] bezeichnet man als *unbestimmtes Integral*:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Das unbestimmte Integral von f ist also eine Funktion (bzw. eine Schar von Funktionen).

Die Bedingung $F(u = a) = 0$ legt Integrationskonstante fest. So kommt man zum *bestimmten Integral:*

$$\int_a^u f(x)dx = F(u) - F(a) = F(x)\Big|_a^u$$

[4]Man beachte, daß mit F immer auch $F + c$ mit einer beliebigen Konstanten c (Integrationskonstante) eine Stammfunktion von f ist, wie man durch Differentiation leicht nachprüft.

Das bestimmte Integral von f zwischen a und u ist also eine Zahl!

Beispiel 3.1.
Als einfaches Beispiel betrachten wir die Funktion x^n. Das unbestimmte Integral ist gegeben durch

$$F(x) = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Das bestimmte Integral zwischen a und u ist

$$\int_a^u x^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Speziell für $a = 1$ und $u = 2$ ergibt sich

$$\int_1^2 x^n dx = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

In der Praxis muß man eine gewisse Menge elementarer (unbestimmter) Integrale auswendig können. Aus diesen kann man sich durch Anwendung geeigneter Regeln viele Integrale herleiten. Im folgenden wollen wir zwei wichtige Regeln vorstellen:

- *Partielle Integration:* Die partielle Integration ist gewissermaßen die Umkehrung der Produktregel der Differentiation.
  Sei $f(x) = u'(x)v(x)$. Da $\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$ folgt:

  $$\int f(x)dx = \int \left[\frac{d}{dx}(uv) - uv'\right] dx = uv - \int uv'dx$$

  Der Nutzen dieser Regel liegt darin, daß manchmal das Integral $\int uv'dx$ einfacher auszurechnen ist als $\int u'vdx$. Beispiele hierfür werden in den Übungen (Aufg. 14) diskutiert.

- *Substitutionsregel:* Die Substitutionsregel ist die Umkehrung der Kettenregel der Substitution.
  Sei $u = u(x)$, $u' = \frac{du}{dx}$. Dann ist

  $$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$$

  Dies kann man sich leicht merken, wenn man $du = u'dx$ schreibt und dies einfach in $\int f(u)u'dx$ einsetzt.
  Die Substitutionsregel kann man in beide Richtungen (von links nach rechts oder von rechts nach links) anwenden. Manchmal ist es nützlich, durch Substition mit einer geeigneten Funktion $u(x)$ zum scheinbar schwierigeren Integral auf der linken Seite überzugehen. Auch hierzu wird es Beispiele in den Übungen geben.

Bemerkung: Bei bestimmten Integralen sind die Integrationsgrenzen mitzutransformieren!

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

Beispiel 3.2.

1. $$\int e^{\sin x} \cos x dx \underset{\substack{u=\sin x \\ du=\cos x dx}}{=} \int e^u du = e^u = e^{\sin x}$$

2. $$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx \underset{du=u'dx}{=} \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|u(x)|.$$

Differentialgleichungen (DGL)

Als Verallgemeinerung der Integration werden uns im folgenden immer sogenannte Differentialgleichungen (DGL) begegnen. In erster Linie werden wir es mit zwei Typen zu tun haben, den sog. DGL 1. Ordnung: $y'(x) = f(x, y)$ und den DGL 2. Ordnung: $y''(x) = f(x, y, y')$.
Wir wollen dies zunächst an Hand von Beispielen erläutern.

Beispiel 3.3.

1. Der einfachste Fall einer DGL 1. Ordnung ist $y' = f(x)$. Die allgemeine Lösung dieser DGL ist $y(x) = \int f(x)dx$, d.h. dieser Fall entspricht gerade der Integration.

2. Wir betrachten eine DGL der Form

$$y' = g(x)h(y)$$

Man bezeichnet diesen Typ als eine DGL mit getrennten Variablen. Für solche DGL läßt sich ein allgemeines Lösungsverfahren angeben[5]:

$$\overset{y'=\frac{dy}{dx}}{\curvearrowright} \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \quad \curvearrowright \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

Somit erhält man

$$\int^{y(x)} \frac{d\tilde{y}}{h(\tilde{y})} = \int^x g(\tilde{x})d\tilde{x} + c$$

und daraus durch Auflösen nach $y = y(x)$ die Lösung. Das oben dargestellte Verfahren bezeichnet man auch als “Trennung der Variablen”.

[5]Das ist nur für die wenigsten DGL-Typen möglich!

Beispiel 3.4.
Wir betrachten als Beispiel folgende DGL mit getrennten Variablen: $y'(x) = -2xy^2(x)$.
Wir haben

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (-2)x dx = -2x^2 + c$$

Andererseits:

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{y(x)} = x^2 + c \qquad \curvearrowright \qquad y(x) = \frac{1}{x^2 + c}$$

Mit Anfangsbedingung $y(1) = 1$ ergibt sich die Integrationskonstante zu $c = 0$ und man erhält die Lösung $y(x) = \frac{1}{x^2}$. Das dies tatsächlich eine Lösung der DGL $y'(x) = -2xy^2(x)$ überprüft man leicht durch Differenzieren.

Bemerkung: Wie wir an den Beispielen gesehen haben, enthalten Lösungen von DGL 1. Ordnung eine offene Konstante, mit der man die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllen kann.
Bei DGL 2. Ordnung treten dementsprechend immer zwei Konstanten auf, die durch zwei Anfangsbedingungen festgelegt werden, z.B. $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = v_0$.

Weitere Typen von DGL werden in den Übungen besprochen. Wir wollen sie hier der Vollständigkeit halber mit aufführen.

1. homogene, lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

   $$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{hom}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

   Die λ_j sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung, die man durch Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ erhält.

2. inhomogene DGL: ($b = const$)

   $$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b \quad \Longrightarrow \quad y(x) = y_{spez}(x) + y_{hom}(x)$$

   $y_{spez}(x)$ ist eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ($b \neq 0$), $y_{hom}(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL ($b = 0$).

3. Variation der Konstanten:

   $$y'(x) + g(x)y(x) = h(x).$$

   Zuerst löst man die homogene DGL ($h(x) = 0$) und ersetzt dann die auftretende Integrationskonstante C durch eine Funktion $C(x)$. Diesen Ansatz setzt man in die inhomogene DGL ($h(x) \neq 0$) ein.

3.2 Grundlagen der Dynamik, Kräfte

3.2.1 Newtonsche Gesetze (Axiome)

In seiner "Philosophiae naturalis principia mathematica" hat Newton 1687 drei Axiome formuliert, die die Grundlage der (nichtrelativistischen) Mechanik bilden. Diese Axiome sind aus Beobachtungen abgeleitete Erfahrungstatsachen, die nicht weiter begründet werden können[6].

- **1. Newtonsches Gesetz**: Trägheitsgesetz

  Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung (keine Beschleunigung), falls keine äußeren Kräfte auf ihn wirken:

  $$\boxed{\underline{a} = 0 \quad \text{falls} \quad \underline{F} = 0}$$

  Bem.: Die gleichförmige Bewegung entspricht also dem natürlichen Bewegungszustand eines Körpers. Da keine Beschleunigung auftritt, ist sie insbesondere geradlinig. Wir hatten ja schon früher gesehen, daß z.B. die Kreisbewegung beschleunigt ist, auch wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant bleibt.

- **2. Newtonsches Gesetz**: dynamische Grundgleichung (Bewegungsgleichung)

  Greift an einem Körper der Masse m eine (äußere) Kraft $\underline{F}$ an und bewegt sich dieser infolge der Krafteinwirkung mit der Geschwindigkeit $\underline{v}$, dann ist

  $$\boxed{\underline{F} = \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = \frac{d\underline{p}}{dt}}$$

  $\underline{p} = m\underline{v}$ bezeichnet man als den *Impuls* des Körpers.

  Bemerkung: Die obige Gleichung ist zugleich Definition und Gesetz. Sie definiert, was man unter einer dynamischen Kraft versteht. Andererseits legt sie fest, wie die Kraft vom Impuls abhängt, nämlich über $\dot{\underline{p}} = \underline{F}$ und nicht z.B. in der Form $\ddot{\underline{p}}^2 = \underline{F}$.

- **3. Newtonsches Gesetz**: Wechselwirkungsgesetz (mehrere Körper)

  Bei der Wechselwirkung zweier Körper ist die Kraft $\underline{F}_{21}$, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt, entgegengesetzt gleich der Kraft $\underline{F}_{12}$ von Körper 2 auf Körper 1:

  $$\boxed{\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}} \qquad \text{(actio=reactio)}$$

- **4. Axiom:** Superpositionsprinzip

  Wirken auf einen Massenpunkt gleichzeitig mehrere Kräfte $\underline{F}_1$, $\underline{F}_1$, ..., so ist ihre Gesamtwirkung durch

[6] Man mache sich klar, welche Abstraktionsleistung hinter der Formulierung dieser Axiome steht. So setzen sie z.B. Dinge voraus (z.B. Kräftefreiheit), die sich experimentell niemals vollständig realisieren lassen!

$$\boxed{\underline{F}_{ges} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \ldots}$$

gegeben.

Bemerkung: Dieses Axiom ist so nicht von Newton formuliert worden. Aus heutiger Sicht muß diese Tatsache aber der Vollständigkeit halber als Axiom hinzugefügt werden.

Definition 3.1 (Inertialsystem)**.** Ein Bezugssystem (Koordinatensystem), in dem die obigen Axiome gelten, nennen wir *Inertialsystem*. Diese sind somit ausgezeichnete Bezugssysteme, in denen die physikalischen Gesetze in ihrer einfachsten Form gelten.

Bemerkungen: Hat man ein Inertialsystem gefunden, so ist jedes andere Bezugssytem, das sich relativ zu diesem mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ebenfalls ein Inertialsystem.
Man kann sich die Frage stellen, ob das 1. Axiom nicht einfach ein Spezialfall des 2. Axioms ist. In der Tat hat dies die Wissenschaftstheorie lange beschäftigt. Aus heutiger Sicht sind die Axiome aber unabhängig. Die wesentliche Aussage des 1. Axioms ist, daß es überhaupt ein Inertialsystem gibt.

Voraussetzungen und Annahmen

- **Absolute Zeit:** Die Zeit ist in allen Koordinatensystemen gleich, d.h. invariant. Da die Zeitnullpunkte unterschiedlich sein können, gilt die Gleichheit strenggenommen nur für Zeitdifferenzen: $\Delta t = \Delta t'$.

  Bemerkung. Die Bestimmung der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse ist möglich, da unendliche Signalgeschwindigkeit erlaubt wird.

- **Absoluter Raum:** Es gibt einen absoluten Raum in dem Sinne, daß Längen, Abstände und Winkel unabhängig vom Bezugssystem festliegen. Es ist jedoch kein Inertialsystem ausgezeichnet, das angibt, was "in Ruhe" absolut bedeutet.

  Bemerkung. Jedes Bezugssystem, das sich bezüglich eines Inertialsystems mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist selbst ein Inertialsystem. Die auf einen Körper wirkende Kraft ist für alle Beobachter gleich, d.h. sie ist invariant *(klassisches Relativitätsprinzip)*. Dies gilt aber nicht für z.B. Geschwindigkeiten!
  Beschleunigte Bezugssysteme sind keine Inertialsysteme. Möchte man in ihnen in Ruhe bleiben, so muß man Kräfte ausüben. Z.B. muß man sich in einem Karussell festhalten!

3.3 Beispiele für spezielle Kräfte

3.3.1 Schwerkraft

Die Erdanziehungskraft, d.h. die Gravitationskraft an der Erdoberfläche, auf einen Körper der Masse m_s ist bekanntlich

$$\underline{G} = m_s \underline{g} = -m_s(0, 0, g).$$

Dabei ist m_s die sogenannte *schwere Masse*, d.h. die Masse, die die Gravitation "spürt". In der Bewegungsgleichung tritt dagegen die *träge Masse* m_t auf, die den Widerstand gegen Änderungen des Bewegungszustandes beschreibt. Es hat sich aber keine Notwendigkeit ergeben, diese beiden Massen zu unterscheiden. Man setzt daher $m_s = m_t =: m$ und spricht nur von *der* Masse. Sie fällt dann aus der Bewegungsgleichung heraus und deren Lösung ergibt sich zu

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 .$$

Dies haben wir ja bereits in Kap. 2.2.2 diskutiert.

3.3.2 Elastische Kräfte

Elastische Kräfte haben die Form

$$\underline{F}_{\text{elast}} = \underline{F}_{\text{elast}}(\underline{r}) = -k\underline{r}.$$

Speziell in einer Dimension gilt dann die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -kx$. Ein wichtiges Beispiel für das Auftreten solcher elastischen Kräfte ist die Rückstellkraft einer Feder.
Setzt man $k = m\omega_0^2$, so erhält man folgende DGL 2. Ordnung

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x.$$

Diese Gleichung bezeichnet man auch als Schwingungsgleichung. Analoge Gleichungen gelten für die anderen Komponenten y und z.
Diese DGL ist eine Gleichung, die sehr häufig in der Physik auftritt. Sie ist eng mit Schwingungsphänomenen verknüpft (siehe später) und hat die Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(\omega_0 t) \qquad \big(\text{denn: } \dot{x}_1 = -\omega_0 \sin(\omega_0 t),\, \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)\big), \\ x_2 &= \sin(\omega_0 t) \qquad \big(\text{denn: } \dot{x}_1 = \omega_0 \cos(\omega_0 t),\, \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)\big). \end{aligned}$$

Als allgemeine Lösung erhält man daher[7]

$$x(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

mit den beiden Integrationskonstanten A, B.
Eine alternative Darstellung dieser Lösung ist

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \varphi_0) ,$$

mit den Integrationskonstanten C und φ_0. Den Zusammenhang mit der ersten Lösung erkennt man unter Benutzung des Additionstheorems

$$C \cos(\omega_0 t - \varphi_0) = C \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi_0) + C \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi_0)$$

[7]Statt $\sin(\omega_0 t)$ schreibt man i.a. einfach $\sin \omega_0 t$. Aus dem Zusammenhang ist klar, daß damit nicht $t \sin \omega_0$ gemeint ist, da z.B. das Argument des Sinus dimensionslos sein muß.

für die Kosinusfunktion. Hieraus kann man durch Vergleich sofort den Zusammenhang zwischen den beiden Sätzen von Integrationskonstanten ablesen:

$$C\cos\varphi_0 = B,\ C\sin\varphi_0 = A \quad \Rightarrow \quad \tan\varphi_0 = \tfrac{A}{B},\ C^2 = A^2 + B^2.$$

Wie üblich werden die Integrationskonstante durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Speziell für $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} &x_0 = x(t=0) \quad \curvearrowright \quad B = x_0 \\ &v_0 = \dot{x}(t=0) = \omega_0 \left[A\cos\omega_0 t - C\sin\omega_0 t\right]_{t=0} = \omega_0 A \quad \curvearrowright \quad A = \frac{v_0}{\omega_0}. \end{aligned}$$

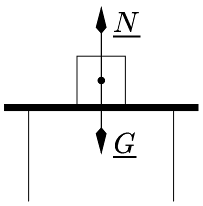
Somit erhalten wir als Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_0 t - \varphi_0) \qquad \left(\text{mit } \tan\varphi_0 = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right). \end{aligned}$$

3.3.3 Zwangskräfte

Zwangskräfte werden eingeführt, um Zwangsbedingungen zu erfüllen. Ein Körper, der auf einem Tisch steht, spürt natürlich die Erdanziehungskraft. Trotzdem bewegt er sich nicht. Nach den Newtonschen Gesetzen muß daher die Gesamtkraft, die auf ihn wirkt, verschwinden. Die Erdanziehungskraft wird also gerade durch eine entgegengerichtete Zwangskraft kompensiert (siehe Beispiel (i)).

(i):



$$\begin{aligned} m\underline{a} = \underline{F}_{\text{ges}} = 0 = \underline{G} + \underline{N} \\ \Rightarrow \underline{N} = -\underline{G} \end{aligned}$$

(ii): Das zweite Beispiel sind zwei Massen, die über einen (straffen) Faden miteinander verbunden sind (siehe Abb. 3.2). Die Fadenspannung sei dabei T und N_1 die Zwangskraft auf Körper 1.

In Abb. 3.3) sind die Kräfte dargestellt, die auf die beiden Massen wirken. Die Bewegungsgleichungen lauten daher:

$$\begin{aligned} N_1 &= m_1 g, \\ T &= m_1 a_{1x}, \\ m_2 a_{2y} &= T - m_2 g. \qquad (\star) \end{aligned}$$

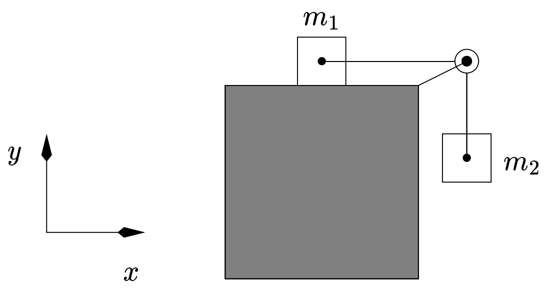


Abbildung 3.2: Zwei über einen straffen Faden gekoppelte Massen.

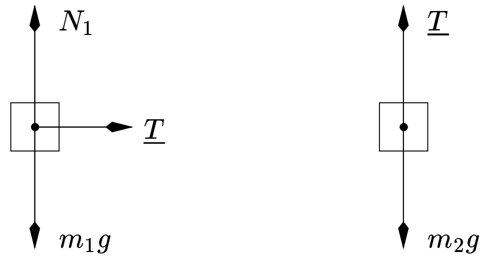


Abbildung 3.3: Kräfte, die auf die beiden Massen wirken.

Da der Faden immer straff sein soll, ist $a_{1x} = -a_{2y}$ und somit

$$\frac{T}{m_1} = a_{1x} = -a_{2y}$$

Hieraus folgt dann:

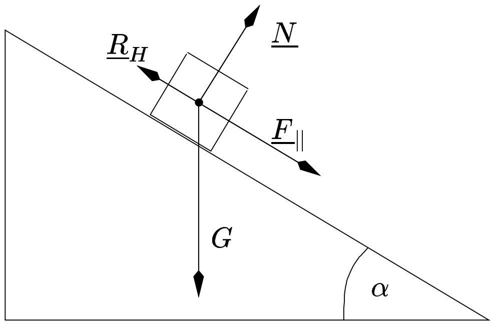
$$\begin{aligned}(\star) \curvearrowright \quad & -\frac{m_2}{m_1}T = T - m_2 g \\ \curvearrowright \quad & T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot g < m_2 g = G_2 \\ & a_{1x} = -a_{2y} = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} < g\end{aligned}$$

Die beiden Körper erfahren also eine Beschleunigung, die kleiner ist als die Erdbeschleunigung g.

3.3.4 Reaktionskräfte, Reibung

Wie der Name schon andeutet, sind Reaktionskräfte i.a. die Antwort auf äußere Einflüße, z.B. den Kontakt zweier Körper (Beispiel (i), (ii)) oder Bewegung (Beispiel (ii), (iii)).

(i): **Haftreibung** (Körper bewegt sich nicht)



$$N = |\underline{N}| = G\cos\alpha$$
$$F_{||} = \left|\underline{F}_{||}\right| = G\sin\alpha$$

Solange sich der Körper nicht bewegt, wird die Kraft $F_{||} = G\sin\alpha$, die den Körper die Ebene heruntertreiben möchte, durch die sog. *Haftreibungskraft* $R_H = |\underline{R}_H| = \mu_H N$ kompensiert:

$$\underline{R}_H = -\underline{F}_{||} \qquad \text{falls } F_{||} < \mu_H N$$

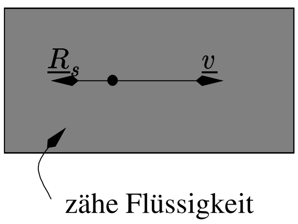
Die Haftreibung ist also parallel zur Kontaktfläche der sich berührenden Körper. Die Materialkonstante μ_H wird als *Haftreibungskoeffizient* bezeichnet. I.a. ist $\mu_H \lesssim 1$.
Wird $F_{||} > \mu_H N$, beginnt der Körper zu rutschen (siehe (ii)). Durch Messung des maximalen Winkels α_c, bei dem sich die Masse noch nicht bewegt, kann man μ_H experimentell bestimmen.

(ii): **Gleitreibung** (Körper bewegt sich)
Auf den rutschenden Körper wirkt die Gleitreibungskraft

$$R_G = |\underline{R}_G| = \mu_G N$$
$$\text{bzw.} \quad \underline{R}_G = -\mu_G N\hat{v}$$

Der *Gleitreibungskoeffizient* μ_G ist wieder eine Materialkonstante. Allgemein ist $\mu_G < \mu_H$.

(iii): **Stokessche Reibung**: Widerstand bei Bewegung durch ein zähes Medium



Aus Erfahrung weiß man, daß die Reibungskraft R_s, die ein Körper erfährt, der sich mit der Geschwindigkeit v durch ein zähes Medium bewegt, proportional zur Geschwindigkeit ist[8]: $R_s \propto v$. Dieses Gesetz gilt, solange v nicht zu groß oder zu klein wird. In vektorieller Form hat man

$$\underline{R}_s = -\gamma\underline{v},$$

[8] $f(x,y,\ldots) \propto x$ bedeutet "f ist proportional zu x", d.h. $\frac{f(x,y,\ldots)}{x}$ ist unabhängig von x.

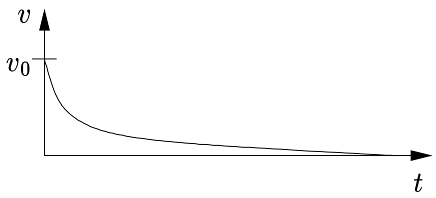


Abbildung 3.4: Relaxationsverhalten.

da die Reibungskraft der Geschwindigkeit entgegengerichtet ist.

Speziell in einer Dimension erhält man für ein Teilchen der Masse m, auf das sonst keine weiteren Kräfte mehr wirken, folgende Bewegungsgleichung:

$$m\dot{v} = -\gamma v \qquad \text{bzw.} \qquad \dot{v} = -\frac{1}{\tau}v \qquad \left(\text{mit } \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}\right)$$

Dies ist einer der wichtigsten DGL-Typen. Da wir wissen, daß die die Ableitung einer Exponentialfunktion wieder eine Exponentialfunktion ist, machen wir folgenden Ansatz zur Lösung der obigen Bewegungsgleichung:

$$v = Ae^{\lambda t} \quad \curvearrowright \quad \dot{v} = \lambda A e^{\lambda t} = \lambda v \quad \curvearrowright \quad \lambda = -\frac{1}{\tau}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v$ ist also

$$v = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Speziell für die Anfangsbedingung $v(t=0) = v_0$ erhält man dann

$$v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Diese Lösung beschreibt das sog. *Relaxationsverhalten*. Die Geschwindigkeit nimmt monoton ab und geht für $t \to \infty$ gegen 0 (siehe Abb. 3.4). Der Abfall erfolgt umso schneller, je kleiner die sog. *Relaxationszeit* τ ist. Zur Zeit $t = \tau$ ist die Geschwindigkeit auf das $1/e-$fache[9] ihres Ausgangswertes v_0 abgefallen.

4 Arbeit und Energie

4.1 Vektoranalysis und Wegintegrale

4.1.1 Vektoranalysis

Zu Beginn sei noch einmal an die Definition der partiellen Ableitung (siehe Kap. 2.1) erinnert:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = \frac{d}{dx} f(x_1 = x, x_2 = \text{const.}) \quad \text{etc..}$$

[9] $1/e \approx 0.367879$.

Eine wichtige Eigenschaft, von der wir uns bereits an einem konkreten Beispiel überzeugt haben, ist die Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} := \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Definition 4.1 (Skalares Feld)**.** Skalares Feld $f(x, z, z)$

Jedem Raumpunkt $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ wird ein Skalar $f(x, y, z)$ zugeordnet.

Wir betrachten nun eine Funktion $f(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Hierbei kann t z.B. die Zeit sein, $x(t), y(t), z(t)$ die Koordinaten eines Massenpunktes zur Zeit t und f die auf das Teilchen wirkende Kraft. Diese ist i.a. als Funktion des Ortes $\underline{r}$ gegeben, wird aber bei Einsetzen der Bahnkurve zu einer Funktion $f(t)$ der Zeit.
Der Gesamtzuwachs der Funktion $f(t)$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} df &= f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \end{aligned}$$

df bezeichnet man auch als *totales Differential*.
Die Ableitung von f nach dem Parameter t bestimmt sich dann aus

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Wie erwartet gehen dabei natürlich auch die $t-$Abhängigkeiten der Funktionen $x(t), y(t), z(t)$ ein.

Definition 4.2 (Gradient)**.** (eines skalaren Feldes)
Zu einem skalaren Feld $f(x, y, z)$ definieren wir

$$\mathrm{grad} f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorfeld bezeichnet man als den Gradienten von f.

Mit Hilfe des Gradienten läßt sich das totale Differential von f schreiben als

$$df = (\mathrm{grad} f) \cdot d\underline{r} \qquad \text{mit} \quad d\underline{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

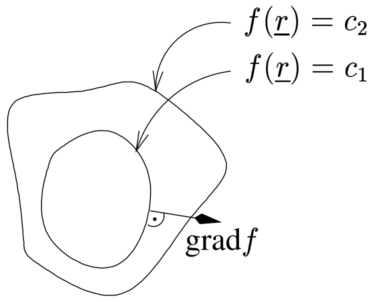


Abbildung 4.1: grad$f$ steht senkrecht auf der Fläche $f(\underline{r}) = \text{const.}$

Definition 4.3 (Nabla-Operator)**.** Der sog. Nabla-Operator ∇ ist definiert als

$$\underline{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{(Vektoroperator).}$$

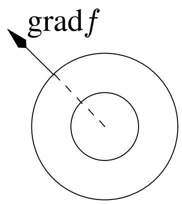
Damit kann man den Gradienten von f auch schreiben als

$$\text{grad}f = \underline{\nabla} f.$$

Der Gradient grad$f$ eines skalaren Feldes f hat auch eine anschauliche Bedeutung.
(i): grad$f$ steht senkrecht auf der Fläche $f(\underline{r}) = \text{const.}$ (siehe Abb. 4.1).
Dies sieht man, da auf diesen Flächen per Definition $df = 0$, also $(\text{grad}f) \cdot d\underline{r} = 0$, d.h. grad$f$ steht senkrecht auf $d\underline{r}$, wobei $d\underline{r}$ entlang von einem Punkt $\underline{r}$ der Fläche $f(\underline{r}) = \text{const.}$ zu einem infinitesimal benachbarten Punkt $\underline{r} + d\underline{r}$ zeigt.
(ii): Der Vektor grad$f(\underline{r}_0) = (\text{grad}f)(\underline{r}_0)$ zeigt in Richtung des stärksten Anstieges von f am Punkt $\underline{r}_0$.
Dies ist klar, da df in der Richtung $d\underline{r}$ des stärksten Anstieges maximal wird. Offensichtlich wird das Skalarprodukt $(\text{grad}f) \cdot d\underline{r}$ genau dann maximal, wenn grad$f$ parallel zu $d\underline{r}$ ist. (iii): Der Betrag $|\text{grad}f|$ misst die Stärke der Änderung von f senkrecht zu den Flächen $f(\underline{r}) = const.$

Beispiel 4.1.
Die beiden oben genannten Eigenschaften kann man sich an folgendem Beispiel unmittelbar klar machen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 \\ \text{grad}f &= 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\underline{r} \end{aligned}$$



Die Kurven $f(\underline{r}) = c = \text{const.}$ sind hier Kreise vom Radius $R = \sqrt{c}$. Das Gradientenfeld zeigt radial nach außen und steht senkrecht auf diesen Kurven.

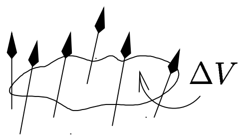


Abbildung 4.2: Fluß durch ΔV

Definition 4.4 (Vektorfeld)**.** Vektorfeld $\underline{F}(\underline{r})$
Jedem Raumpunkt $\underline{r}$ wird ein Vektor $\underline{F}(\underline{r})$ zugeordnet.

Definition 4.5 (Divergenz)**.** Die Divergenz eines Vektorfeldes $\underline{F}(\underline{r})$ ist definiert als

$$\operatorname{div} \underline{F} := \underline{\nabla} \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x}(\underline{r}) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(\underline{r}) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(\underline{r}).$$

Man erhält also $\operatorname{div} \underline{F}$ indem man formal das Skalarprodukt des Nabla-Vektors mit dem Vektorfeld bildet! Die Divergenz eines Vektorfeldes ist also ein Skalarfeld.
Die Divergenz gibt Auskunft über die Quellen und Senken eines Feldes. Dies wird uns noch ausführlich in der Elektrodynamik (Physik II) beschäftigen.
Eine andere Interpretation der Divergenz erhält man durch Betrachtung des sog. Flusses durch ein Volumenelement ΔV (siehe Abb. 4.2):

$$\operatorname{div} \underline{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\text{Fluß durch } \Delta V}{\Delta V}$$

Definition 4.6 (Rotation)**.**
In 3 Dimensionen können wir die Rotation eines Vektorfeldes $\underline{F}(\underline{r})$ durch

$$\operatorname{rot} \underline{F} = \underline{\nabla} \times \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

definieren. Formal ergibt sie sich also aus dem Kreuzprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld. Die Rotation eines Vektorfeldes ist also wieder ein Vektorfeld. Sie gibt Auskunft über die Wirbel des Feldes.

4.1.2 Wegintegrale

Definition 4.7 (Wegintegral)**.** Das Integral eines Vektorfeldes $\underline{F}(\underline{r})$ längs eines Weges vom Punkt P zum Q ist definiert durch

$$\int_P^Q \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} \quad = \quad \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \underline{F}(\underline{r}_i) \cdot \Delta \underline{r}_i = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i F(\underline{r}_i) \Delta r_i \cos \phi_i.$$

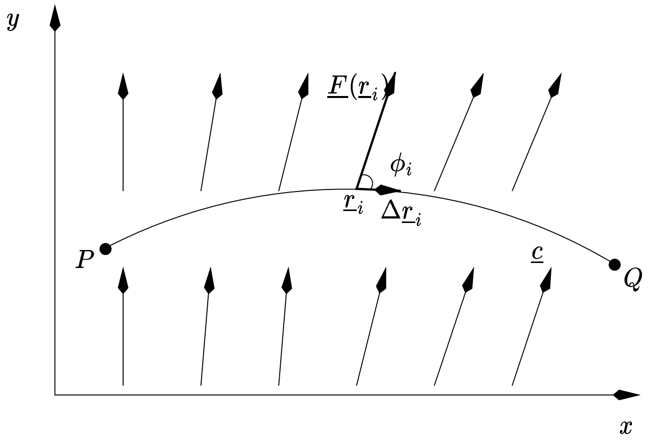


Abbildung 4.3: Wegintegral

Im Gegensatz zum früher definierten Integral über eine vektorwertige Funktion werden hier also nur die Projektionen $\underline{F}(\underline{r}_i) \cdot \Delta\underline{r}_i$ des Vektorfeldes $\underline{F}(\underline{r})$ auf die Richtung $\Delta\underline{r}_i$ des Weges aufsummiert (siehe Abb. 4.3). Man muß dabei beachten, daß der Wert des Integrales i.a. vom genauen Verlauf des Weges zwischen P und Q abhängt. Dieser muß daher immer spezifiziert werden.

Die praktische Berechnung von Wegintegralen $\int_P^Q \underline{F} \cdot d\underline{r}$ geschieht i.a. so:
1) Bestimme eine Parametrisierung $\underline{c}(t)$ des Weges von P nach Q:

$$\underline{c}(t) = (c_x(t), c_y(t)) \quad \text{mit} \quad \underline{c}(t_0) = \underline{r}_P,\ \underline{c}(t_1) = \underline{r}_Q.$$

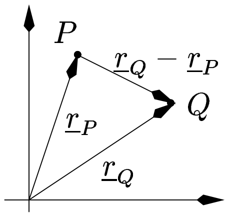
2) Diese Parametrisierung wird dann in den Integranden eingesetzt und das Wegintegral somit zu einem Integral über den Parameter t:

$$\begin{aligned} \int_P^Q \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} &= \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}(c_x(t), c_y(t)) \cdot \dot{\underline{c}}(t)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[F_x(c_x(t), c_y(t)) \frac{dc_x}{dt}(t) + F_y(c_x(t), c_y(t)) \frac{dc_y}{dt}(t) \right] \end{aligned}$$

Damit haben wir die Berechung von Wegintegrale auf die Berechnung eines eindimensionalen Integrals zurückgeführt. Dies kann man als Verallgemeinerung der Substitutionsregel ansehen. Das Vorgehen in 3 Dimensionen ist vollkommen analog zum obigen zweidimensionalen Beispiel!

Beispiel 4.2. Im folgenden geben wir die wichtigsten Beispiele für Parametrisierungen an:

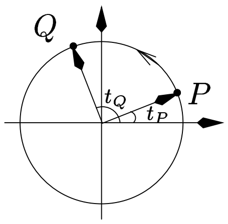
1. Gerade von P nach Q:



$$\underline{c}(t) = \underline{r}_P + (\underline{r}_Q - \underline{r}_P)\, t$$
$$(t \in [0,1])$$

Offensichtlich beschreibt dies eine Gerade mit $\underline{c}(0) = \underline{r}_P$ und $\underline{c}(1) = \underline{r}_Q$.

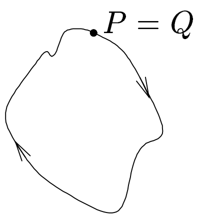
2. Kreisbogen:



$$\underline{c}(t) = R(\cos t, \sin t)$$
$$\text{mit } R = |\underline{r}_P| = |\underline{r}_Q| \text{ und } t \in [t_P, t_Q]$$

Dabei sind t_P und t_Q die Winkel, die die Ortsvektoren $\underline{r}_P$ und $\underline{r}_Q$ von P und Q mit der $x-$Achse bilden, und R der Radius des Kreisbogens. Bei solchen Wegen müssen natürlich P und Q den gleichen Abstand R vom Ursprung haben.

Definition 4.8 (Geschlossener Weg)**.**
Bei einem Wegintegral können Anfangs- und Endpunkt auch identisch sein ($P = Q$). Für solche Wegintegrale führt mein ein spezielles Symbol ein:



$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

I.a. wird $\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} \neq 0$ sein. Für den Weg, der nur aus dem Punkt $P = Q$ besteht, ist natürlich immer $\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$.

Beispiel 4.3.

Wir wollen das Wegintegral des Vektorfeldes $\underline{F}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} z \\ xy \\ x \end{pmatrix}$ längs eines geraden Weges von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnen. Zunächst bestimmen wir eine Parametrisierung des Weges:

$$\underline{c}(t) = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\underline{c}}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen dieser Parametrisierung folgt dann:

$$\begin{aligned} \int_P^Q \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} &= \int_0^1 \underline{F}(\underline{c}(t)) \cdot \dot{\underline{c}}\, dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \cdot t \\ 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (0 + 3t^2 + 0)\, dt = t^3\big|_0^1 = 1 \end{aligned}$$

Eine wichtige Frage lautet nun: Wann existiert zu vorgegebenem Vektorfeld $\underline{F}$ ein Skalarfeld f mit $\underline{F} = -\mathrm{grad} f$?

Definition 4.9 (Potential)**.**
Existiert zu einem Vektorfeld $\underline{F}(\underline{r})$ ein Skalarfeld f mit $\underline{F} = -\mathrm{grad} f$, dann nennt man f ein *Potential* von $\underline{F}$.
Ein Potential f ist nicht eindeutig bestimmt, da auch $f + c$ mit einer beliebigen Konstanten c ein Potential ist. Häufig wählt man c geeignet, um z.B. gewisse Nebenbedingungen zu erfüllen.

Wie bereits erwähnt, hängt der Wert des Wegintegrals $\int_P^Q \underline{F} \cdot d\underline{r}$ i.a. vom gewählten Weg zwischen P und Q ab. Die Frage, wann das Integral unabhängig vom expliziten Weg ist, ist eng verknüpft mit der Frage nach der Existenz eines Potentials. Wir geben nun (ohne vollständigen Beweis) wichtige Kriterien für die Wegunabhängigkeit bzw. die Existenz von Potentialen an:

Satz 4.1. Folgende drei Aussagen sind äquivalent:

1) $\int_P^Q \underline{F} \cdot d\underline{r}$ ist wegunabhängig

2) Es existiert ein Potential f von $\underline{F}$, d.h. $\underline{F} = -\mathrm{grad} f$

3) rot $\underline{F} = 0$ (+ Definitionsbereich von $\underline{F}$ ist einfach-zusammenhängend)

Der Beweis zu "2) $\Rightarrow$ 3)" ist leicht, denn $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0$ gilt nach Aufg. 25 für beliebige f. Die anderen Beweise wollen wir hier nicht angeben.

Existiert ein Potential von $\underline{F}$, so kann man es aus

$$f(\underline{r}) = f(\underline{r}_0) - \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

bestimmen, wobei der Integrationsweg zwischen den fest gewählten (beliebigen) Punkten $\underline{r}_0$ und $\underline{r}$ beliebig ist.

Definition 4.10 (einfach-zusammenhängend)**.**
Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach-zusammenhängend, wenn sich jeder geschlossene Weg durch kontinuierliche Deformation ganz in M auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Außerdem muß M wegzusammenhängend sein, d.h. zwei beliebige Punkte müssen sich durch einen Weg ganz in M miteinander verbinden lassen.

Diese Definition wollen wir durch zwei Beispiele illustrieren:

Beispiel 4.4.

1. Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, also die $x - y-$Ebene ohne den Ursprung. Betrachten wir einen geschlossenen Weg, der den Ursprung umschließt, z.B. einen Kreis vom Radius R. Dieser läßt sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen, da man beim Zusammenziehen immer am Ursprung 0 "hängenbleibt", der ja nicht zu M gehört. M ist also nicht einfach-zusammenhängend.

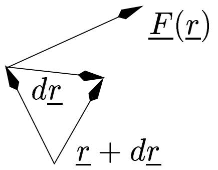
2. Sei $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, also der dreidimensionale Raum ohne den Ursprung. Hier lassen sich die im vorigen Beispiel betrachteten Wege auf einen Punkt zusammenziehen, da man sie zunächst aus der $x-y-$Ebene anheben kann. Man kann zeigen, daß $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ einfach-zusammenhängend ist. In drei Dimensionen muß man typischerweise eindimensionale Gebiete (z.B. Geraden) entfernen, damit der einfache Zusammenhang verloren geht.

In Aufg. 27 der Übungen wird ein Beispiel diskutiert, das zeigt, daß die Bedingung über den einfachen Zusammenhang des Definitionsbereichs tatsächlich erfüllt sein muß, um aus rot $\underline{F} = 0$ auf die Existenz eines Potentials schließen zu können.

4.2 Arbeit und Energie

In diesem Abschnitt setzen wir generell voraus, daß $m =$ const und die Kraft $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r})$ unabhängig von $\underline{v}$ und t ist.

Definition 4.11 (Arbeit (längs eines Weges)).



Die Kraft $\underline{F}(\underline{r})$ bewirkt eine Verschiebung $d\underline{r}$ eines Massenpunktes
$dA = \underline{F} \cdot d\underline{r}$ ist die infinitesimale Arbeit, die am Objekt geleistet wurde.

Die Arbeit, die von der Kraft $\underline{F}(\underline{r})$ bei endlicher Verschiebung längs eines Wegs c geleistet wird:

$$A = \int_c \underline{F} \cdot d\underline{r}.$$

Man beachte, daß diese Arbeit i.a. von der expliziten Wahl des Weges abhängt !

Eine eng verwandte Größe ist die (momentane) Leistung: $P = \frac{dA}{dt} = \underline{F} \cdot \underline{v}$

Es stellt sich die Frage, ob es Kräfte gibt, für die die geleistete Arbeit nicht wegabhängig ist.

Definition 4.12 (konservative Kräfte).
Eine Kraft $\underline{F}(\underline{r})$ heißt konservativ, wenn die geleistete Arbeit bei Verschiebung von einem beliebigen Punkt P zu einem beliebigen Punkt Q unabhängig vom Weg zwischen P und Q ist.

Warum man solche Kräfte als "konservativ" (erhaltend) bezeichnet, wird weiter unten klar werden!

Aus Kap. 4.1.2 wissen wir, daß zu einer konservativen Kraft ein Potential $V(\underline{r})$ mit $\underline{F} = -\text{grad}\, V(\underline{r})$ existiert. Für die geleistete Arbeit ergibt sich in diesem Fall:

$$A = \int_P^Q \underline{F} \cdot d\underline{r} = -\int_P^Q \underbrace{\text{grad}\, V \cdot d\underline{r}}_{=dV} = V(\underline{r}_P) - V(\underline{r}_Q) \quad (=: V_P - V_Q)$$

Für die geleistete Arbeit ist also nur die *Potentialdifferenz* relevant. D.h. insbesondere, daß die additive Konstante $V(\underline{r}_0)$, die bei der Berechnung des Potentials auftritt, herausfällt und somit keine physikalische Bedeutung hat. Sie kann also frei gewählt werden.

Insbesondere folgt für $P = Q$

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0,$$

d.h. die Arbeit längs geschlossener Wege verschwindet.

Definition 4.13 (Kinetische Energie)**.**
Ein Körper der Masse m, der sich mit der Geschwindigkeit $\underline{v}$ bewegt (und somit den Impuls $\underline{p} = m\underline{v}$ hat), besitzt die kinetische Energie

$$T := \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

T ist also eine skalare Größe.

Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist

$$\frac{dT}{dt} = m\underline{v} \cdot \underline{\dot{v}} = \underline{v} \cdot \underline{F}$$

wobei wir die Newtonsche Gleichung ausgenutzt haben. Somit ergibt sich wegen $\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$ für das totale Differential der kinetischen Energie

$$dT = \underline{F} \cdot d\underline{r} = dA.$$

Die totale Änderung der kinetischen Energie ist also gleich der am Körper geleisteten Arbeit.

Definition 4.14 (Potentielle Energie)**.**
Zu einer konservativen Kraft $\underline{F}(\underline{r})$ definiert man die potentielle Energie

$$V(\underline{r}) := V(\underline{r}_0) - \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{F}(\underline{r}) \cdot d\underline{r},$$

wobei der Integrationsweg zwischen dem Bezugspunkt $\underline{r}_0$ und $\underline{r}$ beliebig gewählt werden kann. Für das so definierte Potential gilt dann offensichtlich $\underline{F} = -\text{grad}\, V$.

Im folgenden wollen wir ein sehr wichtiges Resultat ableiten, den *Energiesatz*.
Es sei $\underline{F}$ eine konservative Kraft mit $\underline{F} = -\text{grad}\, V$.
Die Änderung der potentiellen Energie ist gegeben durch

$$dV = \text{grad}\, V \cdot d\underline{r} = -\underline{F} \cdot d\underline{r} = -dT.$$

Die erste Identität folgt aus dem allgemeinen Zusammenhang von totalen Differentialen mit dem Gradienten, im zweiten Schritt haben wir die Tatsache ausgenutzt, daß $\underline{F}$ konservativ ist und im letzten Schritt die oben abgeleitete Identität für die Änderung der kinetischen Energie.
Für die Änderung der *Gesamtenergie* $E = T + V$ ergibt sich damit

$$dE = d(T+V) = 0 \quad \curvearrowright \quad \frac{d}{dt}(T+V) = 0 \quad \curvearrowright \quad T + V = \text{const.}\ \text{(in der Zeit)}$$

Energieerhaltungssatz:
Für ein Teilchen der Masse m, das sich in einem konservativen Kraftfeld mit Potential $V(\underline{r})$ bewegt, ist die Gesamtenergie $\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\underline{r})}$ zeitlich konstant.

Hier seien noch einmal die bei der Ableitung benutzten Voraussetzungen zusammengestellt:
1) Newtonsche Gesetze (mit m =const.),
2) $\underline{F}$ konservativ, $\underline{F} = -\text{grad}\, V$.

Der Energieerhaltungssatz ist also die Motivation für die Bezeichung "konservative Kraft" !

Allgemein spielen Erhaltungssätze in der Physik eine wichtige Rolle, nicht nur in der Mechanik (z.B. Ladungserhaltung).

Erhaltungssätze

- sind von Einzelheiten der Teilchenbahn unabhängig, oft auch von Einzelheiten der wirkenden Kräfte [d.h. sie sind Ausdruck sehr allgemeiner Folgerungen aus den Bewegungsgleichungen]
- lassen erkennen, dass gewisse Vorgänge unmöglich sind
- lassen sich auch ohne Kenntnis der ursächlichen Kräfte anwenden (z.B. in der Elementarteilchen-Physik)
- sind eng mit Invarianzen und Symmetrien verknüpft[10], z.B. folgt der Energiesatz aus der Invarianz der Gesetze unter zeitlicher Verschiebung $t \to t + t_0$
- erleichtern explizite Rechnungen, denn die Bewegungsgleichung ist eine DGL 2. Ordnung ($m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$), der Energiesatz führt auf eine DGL 1. Ordnung (s.u.).

Beispiel 4.5.

1. Elastische Kraft $F(x) = -kx$ in einer Dimension:
   Hier können wir durch Integration schnell ein Potential bestimmen:
   $$V(x) = V(x_0) - \int_{x_0}^{x} F(x)dx = V(x_0) + \frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2).$$
   Wählen wir speziell die Nebenbedingung $V(x_0 = 0) = 0$, so erhalten wir
   $$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$
   und damit für die Gesamtenergie
   $$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

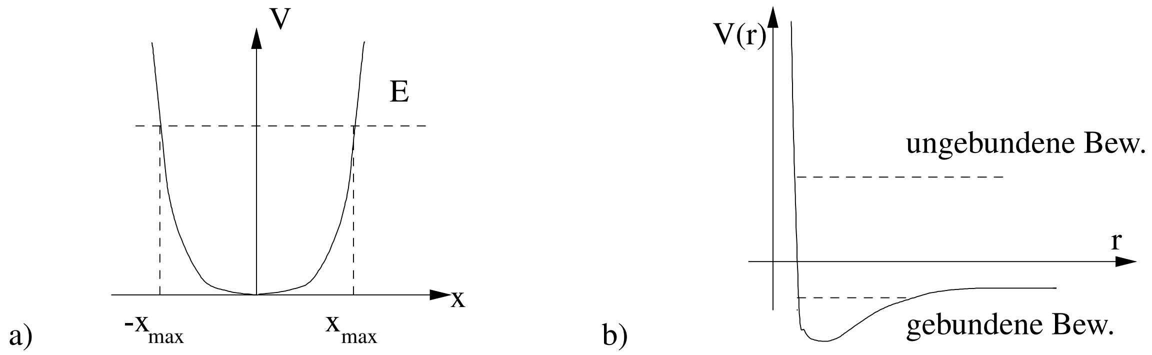


Abbildung 4.4: a) Potential einer Feder, b) Potential eines 2-atomigen Moleküls

Das Potential ist in Abb. 4.4a grafisch dargestellt.

Da die kinetische Energie $T = \frac{m}{2}v^2 \geq 0$ ist, folgt: $\frac{1}{2}kx^2 \leq E$.
Diese Ungleichung legt die erlaubten Werte von x fest: $-x_{max} \leq x \leq x_{max}$, wobei $x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{k}}$.
Man spricht hier von einer gebundenen Bewegung, da sich das Teilchen nur in einem endlichen Raumbereich $|x| \leq x_{max}$ aufhalten kann.

2. Potentielle Energie eines zweiatomigen Moleküls:
   Die Atome eines zweiatomigen Moleküls können gegeneinander schwingen. Die typische Form des Potentials, das sie dabei als Funktion ihres Abstandes r spüren, ist dabei in Abb. 4.4b dargestellt[11]. Die Gesamtenergie ist dann

$$E = \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2 + V(r).$$

   Man kann zwei Bereiche unterscheiden: Für $E < 0$ ist nur eine gebundene Bewegung möglich. Für $E > 0$ ist die Bewegung ungebunden, denn die Teilchen können sich beliebig weit voneinander entfernen. Dies entspricht dem Zerfall des Moleküls.

Obige Überlegungen lassen sich natürlich verallgemeinern. Da $T \geq 0$ ist, folgt aus $E = T + V$:

$$V(\underline{r}) \leq E.$$

Diese Ungleichung legt fest, in welchen Raumbereichen Bewegung stattfinden kann!

[10] Das sog. Noether-Theorem faßt diese Aussage in einer mathematisch präzisen Form.
[11] Häufig verwendet man das sog. Lennard-Jones-Potential $V(r) = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$.

Der Energiesatz $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\underline{r})$ entspricht einer ersten Integration der Newton-Gleichung $m\dot{\underline{v}} = F(\underline{r})$, die ja eine DGL 2. Ordnung ist, mit der Integrationskonstanten E:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V(\underline{r})\right) = m\underline{v} \cdot \dot{\underline{v}} + (\text{grad}\, V) \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = (m\dot{\underline{v}} - \underline{F}) \cdot \underline{v}$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn die Newton-Gleichung $\underline{F} = m\dot{\underline{v}}$ gilt.

In diesem Sinne erleichtert der Energiesatz also explizite Rechnungen, da man es (bei der Bestimmung der Bahnkurve aus der Energie) nur noch mit einer DGL 1. Ordnung zu tun hat.

Wir wollen den wichtigen Spezialfall einer eindimensionalen Bewegung im Potential $V = V(x)$ betrachten. Aus dem Energieerhaltungssatz

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

folgt durch Auflösen nach $v = \dot{x}$:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

und hieraus

$$dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}.$$

Diese Gleichung kann man (unter der Randbedingung $x(t_0) = x_0$ bzw. deren Umkehrung $t(x_0) = t_0$) sofort integrieren:

$$t - t_0 = (\pm)\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}.$$

Wir kennen somit die Funktion $t = t(x)$, aus der wir durch Invertieren die Bahnkurve $x = x(t)$ erhalten.
Wir haben damit die allgemeine Lösung des Newton-Problems für konservative Kräfte in einer Dimension bestimmt !

Beispiel 4.6.
Ein wichtiger Spezialfall, mit dem man es häufig zu tun hat, sind Kräfte, die nur vom Abstand $r = |\underline{r}|$ abhängen und in radiale Richtung zeigen:

$$\underline{F}(\underline{r}) = f(r)\hat{r} \qquad \left(\hat{r} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\right)$$

Solche Kräfte bezeichnet man als *Zentralkräfte* oder *Radialkräfte*.
Eine wichtige Eigenschaft dieser Kräfte ist, daß sie immer konservativ sind. In Aufg. 25 haben wir nämlich gezeigt, daß durch

$$V(r) = -\int f(r)dr$$

ein Potential von $\underline{F}(\underline{r}) = f(r)\hat{r}$ gegeben ist.

Typische Beispiele für Zentralkräfte sind:

$$\begin{aligned} \text{elastische Kraft:} \qquad & \underline{F}_{elast} = -k\underline{r} = -kr\hat{r}, \\ \text{Gravitation:} \qquad & \underline{F}_{grav} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}. \end{aligned}$$

Als einfache Faustregel kann man feststellen: Die meisten <u>aktiven</u> Kräfte sind konservativ.
Aktive Kräfte sind dabei z.B. von Reaktionskräften (siehe Kap. 3.3.4) wie der Reibung zu unterscheiden.

Im folgenden wollen wir nun den Einfluß einer Reaktionskraft, nämlich der Reibung, genauer untersuchen. Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, daß sich unter dem Einfluß der Gesamtkraft

$$\underline{F} = \underline{F}_0 - \gamma\underline{v}$$

bewegt, wobei $\underline{F}_0$ konservativ sei: $\underline{F}_0 = -\nabla V_0$. Die Reibungskraft $-\gamma\underline{v}$ ist natürlich nicht konservativ. Wir berechnen zunächst die zeitliche Änderung der mechanischen Energie $T + V_0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T + V_0) &= m\underline{v}\cdot\dot{\underline{v}} - \underline{F}_0\cdot\underline{v} = \underline{v}\cdot(m\dot{\underline{v}} - \underline{F}_0) \\ &= \underline{v}\cdot(\underline{F}_0 - \gamma\underline{v} - \underline{F}_0) = -\gamma v^2 < 0. \end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir die Newton-Gleichung $\underline{F} = m\dot{\underline{v}}$ benutzt. Wir sehen also, daß die mechanische Energie $T + V_0$ abnimmt.
Was passiert mit dem Verlust an mechanischer Energie ? Aus Erfahrung wissen wir, daß sich Körper unter Reibung erwärmen.
Erwärmt sich der Körper in der Zeit Δt um $\Delta\mathcal{T}$ (= Temperaturänderung[12]), so entspricht einer Zufuhr an Wärmeenergie von

$$Q = C\Delta\mathcal{T},$$

wobei die Wärmekapazität C eine Materialkonstante ist. Die zeitliche Änderung der Wärmeenergie ist also

$$\frac{dQ}{dt} = \gamma v^2,$$

[12]Hier zeigt sich wieder die Vorliebe der Physiker für bestimmte Buchstaben. Um die Temperatur $\mathcal{T}$ von der kinetischen Energie T unterscheiden zu können, wählen wir für die Temperatur die kaligraphische Schreibweise.

wobei wir im letzten Schritt angenommen haben, daß der gesamte "Verlust" an mechanischer Energie durch Reibung in Wärmeenergie umgewandelt wird. Insgesamt ergibt sich daher für die Änderung der Gesamtenergie

$$\frac{d}{dt}(T + V_0 + Q) = 0.$$

Unter der Annahme der Umwandlung von mechanischer Energie in Wärmeenergie ist also die Gesamtenergie $T + V_0 + Q$ konstant.

Dies ist nur ein Beispiel dafür, daß die Energieerhaltung auch über die Mechanik hinaus gültig ist. Man kann den allgemeinen Energiesatz folgendermaßen formulieren:

$$\boxed{\text{Summe aller Energieformen} = \text{konstant}}$$

5 Schwingungen

5.1 Komplexe Zahlen

Beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren von reellen Zahlen bleiben wir im Bereich der reellen Zahlen. Beim Wurzelziehen stoßen wir auf einen neuen Zahlentyp.

Problem: $x^2 = -1$ hat keine reelle Lösung x

Man definiert daher (Euler 1777): $i := \sqrt{-1}$.
i wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet.

Eine allgemeine *imaginäre Zahl* ist dann von der Form $b \cdot i$ mit reellem b, also z.B. $2i$, πi, etc. Wir übertragen nun die üblichen Rechenregeln der reellen Zahlen auf die imaginären Zahlen (unter Beachtung von $i^2 = -1$):

$$b_1 i + b_2 i = (b_1 + b_2)i$$
$$(b_1 i)(b_2 i) = b_1 b_2 i^2 = -b_1 b_2$$
$$i^3 = i^2 i = -i \qquad \text{etc.}$$

Definition 5.1 (komplexe Zahlen)**.**
Allgemeine *komplexe Zahlen* sind von der Form

$$z = x + iy$$

mit reellen Zahlen x und y. x bezeichnet man auch als den *Realteil* von z und y als den *Imaginäerteil*. Man schreibt dann auch:

$$z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z).$$

Wie für die rein imaginären Zahlen übertragen wir auch für die komplexen Zahlen die bekannten Rechenregeln. Man erhält so den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

$$\begin{aligned}\text{Addition: } z_3 &= z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ \mathrm{Re}(z_3) &= \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}(z_3) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Multiplikation: } z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2) + i(x_1 y_2) + i(y_1 x_2) + i^2(y_1 y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\end{aligned}$$

Speziell für reelles λ gilt:

$$\lambda z = \lambda(x + iy) = (\lambda x) + i(\lambda y)$$

Definition 5.2 (Komplexe Konjugation)**.**
$z^* := x - iy$ heißt *komplex-konjugiert* zu $z = x + iy$, d.h. die Operation * bedeutet Vorzeichenwechsel beim Imaginärteil.

Für das Produkt einer komplexen Zahl z mit ihrem komplex-konjugierten

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

ist also immer reell und größer gleich Null.
Nützlich ist das Komplex-Konjugierte auch bei der Division durch komplexe Zahlen:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Hiermit ist die Division in $\mathbb{C}$ auf eine Multiplikation zurückgeführt.
Es bietet sich an, Real- und Imaginärteil als Komponenten eines zweidimensionalen Vektors zu interpretieren. Man kommt so zu der zweidimensionalen Darstellung in der sog. komplexen Ebene (siehe Abb. 5.1):

$$z = x + iy \to (x, y)$$

wobei nun (x, y) ein zweidimensionaler Vektor ist. Nun kann man wieder zu ebenen Polarkoordinaten $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ übergehen und erhält

$$z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Definition 5.3 (Betrag)**.**
Unter dem *Betrag* $|z|$ einer komplexen Zahl z versteht man die Länge des zugehörigen Vektors in der komplexen Ebene: $r = |z|$. Da $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ kann man dies auch schreiben als

$$|z| = \sqrt{zz^*}.$$

Den Winkel ϕ in der Polarkoordinatendarstellung bezeichnet man auch als *Argument* von z: $\phi = \arg(z)$

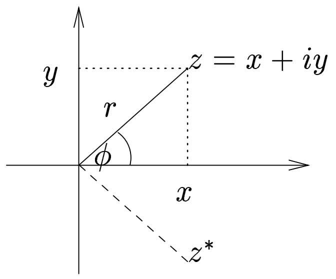


Abbildung 5.1: Die komplexe Ebene.

Wir werden später sehen, daß $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ gilt.

Mit komplexen Zahlen kann man komplexe Funktionen bilden: $f(z) \in \mathbb{C}$, z.B. $f(z) = 2z^2 + z$.

Beispiel 5.1. Wir betrachten im folgenden ein für die Praxis sehr wichtiges Beispiel für eine komplexwertige Funktion. Sei ϕ reell. Dann gilt

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \qquad (*)$$

d.h. die komplexe Zahl $e^{i\phi}$ mit $\phi \in \mathbb{R}$ liegt auf dem Einheitskreis (da $|e^{i\phi}| = 1$) mit Winkel ϕ.
Beweis[13] von (*): Durch zweimalige Differenzieren überzeugt man sich, daß die Funktion $f(\phi) = e^{i\phi}$ die DGL $f'' = \frac{d^2}{d\phi^2} = -f$ erfüllt. In Kap. 3.1 hatten wir gesehen, daß die allgemeine Lösung dieser DGL lautet:

$$f(\phi) = a\cos\phi + b\sin\phi.$$

Die Parameter a und b werden durch die Randbedingungen festgelegt. Für $f(\phi) = e^{i\phi}$ haben wir

$$\begin{aligned} f(\phi = 0) &= e^{i0} = e^0 = 1, \\ f'(\phi = 0) &= ie^{i0} = i. \end{aligned}$$

Damit die allgemeine Lösung $a\cos\phi + b\sin\phi$ diese Randbedingungen erfüllt, muß $a = b = 1$ sein. Da die Lösung der DGL eindeutig ist, folgt die Identität $(*)$.

Wir können daher für reelle Argumente ϕ den Real- und Imaginärteil der Exponentialfunktion bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(e^{i\phi}) &= \cos\phi, \\ \mathrm{Im}(e^{i\phi}) &= \sin\phi. \end{aligned}$$

[13]Die folgende Beweisstrategie über DGL wird häufig eingesetzt. Man kann $(*)$ natürlich auch anders beweisen, z.B. über die Taylorreihen von exp, cos und sin. Dies ist Gegenstand von Aufgabe 34.

Mit dem Resultat aus dem vorangegangenen Beispiel können wir nun eine beliebige komplexe Zahl darstellen als

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi} \\ &= |z|e^{i\phi}. \end{aligned}$$

Mit dieser Darstellung macht man sich sofort die bereits oben erwähnten Rechenregeln für den Betrag und das Argument klar:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\phi_1} \cdot |z_2|e^{i\phi_2} = |z_1 z_2|e^{i(\phi_1+\phi_2)}.$$

Speziell für das Komplex-Konjugierte folgt:

$$z^* = r(\cos\phi - i\sin\phi) = r(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)) = re^{-i\phi}$$

Allgemein gilt folgende Aussage:
Ist $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ reellwertig, so gilt: $f(z^*) = (f(z))^*$.

Man kann nun auch die Winkelfunktionen durch die komplexe Exponentialfunktion darstellen. Da $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ und $e^{-i\phi} = \cos(-\phi) + i\sin(-\phi) = \cos\phi - i\sin\phi$, folgt

$$\cos\phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \qquad \text{und} \qquad \sin\phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}).$$

Bem.: Ist $z = x + iy$, so gilt:

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y} = e^{-y}(\cos x + i\sin x).$$

Als Anwendung betrachten wir nun eine DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese hatten wir bereits in Kap. 3.1 untersucht. Im folgenden wird sich zeigen, daß die Behandlung mit Hilfe der komplexen Zahlen einfacher, eleganter und in gewissem Sinne auch allgemeiner ist.

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= 0 && \text{homogene DGL} \\ ay'' + by' + cy &= f(x) && \text{inhomogene DGL} \end{aligned}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Wir nehmen nun o.B.d.A. an, daß $a = 1$ ist. Wir können eine beliebige Gleichung mit $a \neq 0$ immer auf diesen Fall zurückführen, indem wir die Gleichung durch a dividieren und $b \to \frac{b}{a}$, $c \to \frac{c}{a}$, $f(x) \to \frac{1}{a}f(x)$ ersetzen. Wir untersuchen daher zunächst die homogene Gleichung

$$y'' + by' + cy = 0.$$

Zur Lösung machen wir den Ansatz
$$y(x) = Ae^{\lambda x},$$
den wir in die DGL einsetzen. Somit erhält man mit $y'(x) = \lambda Ae^{\lambda x}$ und $y''(x) = \lambda^2 Ae^{\lambda x}$
$$Ae^{\lambda x}(\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$
Da $A \neq 0$ (wir sind schließlich an einer nichttrivialen Lösung interessiert!) und $e^{\lambda x} \neq 0$, folgt
$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
und somit
$$\lambda_\pm = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$
Wir nehmen nun an, daß b, c reell sind. Dann ist
$$\sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \qquad \begin{cases} \text{reell,} & \text{falls } \frac{b^2}{4} - c \geq 0, \\ \text{imaginär,} & \text{falls } \frac{b^2}{4} - c < 0. \end{cases}$$
Deshalb sind $\lambda_\pm$ für $\frac{b^2}{4} - c < 0$ komplex:
$$\lambda_\pm = -\frac{b}{2} \pm i\sqrt{c - \frac{b^2}{4}},$$
d.h. insbesondere ist $\lambda_+ = (\lambda_-)^*$.
Für $\frac{b^2}{4} - c > 0$ haben wir zwei verschiedene reelle Lösungen λ_+ und λ_-.
Für $\frac{b^2}{4} - c = 0$ ist $\lambda_+ = \lambda_-$. Dann existiert aber eine weitere Lösung $y = xe^{\lambda x}$. Diesen Fall werden wir in den Übungen (Aufgabe 59) genauer untersuchen.

Zusammenfassend lautet also die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung im Fall $\frac{b^2}{4} \neq c$
$$y(x) = A_+e^{\lambda_+ x} + A_-e^{\lambda_- x}$$
mit zwei Integrationskonstanten $A_\pm$, die durch die Anfangsbedingung festgelegt werden.

Wenn y aus physikalischen Gründen reell sein muß, können wir den Realteil (oder auch den Imaginärteil) der obigen Lösung nehmen, der auf Grund der Linearität der Gleichung im Falle reeller Koeffizienten b, c auch eine Lösung darstellt:
$$y(x) = \text{Re}\left(A_+e^{\lambda_+ x} + A_-e^{\lambda_- x}\right).$$

Wir betrachten nun die inhomogene DGL. Sei daher $\overline{y}$ eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL, die wir uns auf irgendeine Art und Weise verschafft haben, z.B. durch Raten oder Variation der Konstanten. Dann ist
$$y(x) = \overline{y}(x) + \text{Re}\left(A_+e^{\lambda_+ x} + A_-e^{\lambda_- x}\right)$$

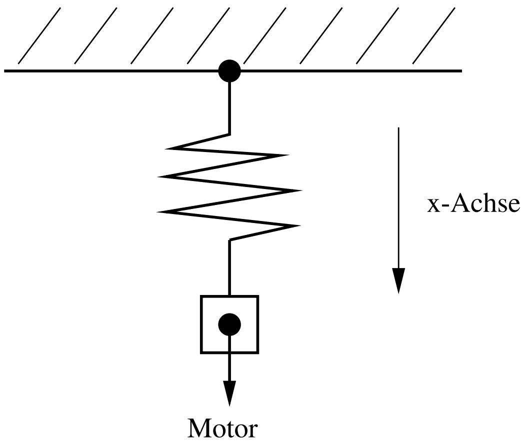


Abbildung 5.2: Angetriebener Oszillator.

die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Oft findet man leicht eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (z.B. $\overline{y} =$ konst.). Diese erfüllt i.a. aber nicht die gewünschten Anfangsbedingungen. Deshalb benötigt man die allgemeine Lösung.

5.2 Schwingungsvorgänge

Wir wollen nun die Erkenntnisse über DGL aus dem vorigen Abschnitt zur Beschreibung von Schwingungsvorgänge verwenden. Wir betrachten dazu das System in Abb. 5.2. Eine Feder werde durch einen Motor in $x-$Richtung ausgelenkt, wobei die Ruhelage der Feder $x = 0$ entsprechen soll. Neben der Motorkraft F_{Motor} und der Rückstellkraft F_{Feder} soll noch eine Reibungskraft F_{Reibung} wirken. Die Newton-Gleichung lautet dann

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F_{\text{Feder}} + F_{\text{Reibung}} + F_{\text{Motor}}, \\
F_{\text{Feder}} &= -kx =: -m\omega_0^2 x, \\
F_{\text{Reibung}} &= -\gamma\dot{x} =: -\frac{m}{\tau}\dot{x}, \\
F_{\text{Motor}} &= mf(t).
\end{aligned}$$

Dies führt auf folgende inhomogene lineare DGL 2. Ordnung:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t).$$

Ein analoges Problem werden wir im nächsten Semester kennenlernen, nämlich den elektrischen Schwingkreis mit den Identifikationen $x(t) \to$ Ladung $Q(t)$, Feder $\to$ Kondensator, Reibung $\to$ Widerstand, Trägheit $\to$ Spule.

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}\right) \qquad \text{mit} \qquad \lambda_\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}.$$

Wir betrachten nun wieder drei Fälle:

1. Fall: $\omega_0 > \frac{1}{2\tau}$ (schwache Dämpfung)
Dann ist $\lambda_\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega'$ mit dem reellen $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$.
Wir haben also zwei komplexe Lösungen

$$x_\pm(t) = A_\pm e^{-\frac{1}{2\tau}} e^{\pm i\omega' t}$$

und die allgemeine Lösung ist dann $x(t) = x_+(t) + x_-(t)$. Mit $A = |A|e^{i\phi}$ folgt $x_\pm = |A_\pm| e^{-\frac{1}{2\tau}} e^{\pm i\omega' t + i\phi_\pm}$ und daraus erhalten wir wegen $\mathrm{Re}(|A|e^{i(\omega' t+\phi)}) = |A|\cos(\omega' t + \phi)$ die allgemeine reelle Lösung

$$x(t) = |A|\cos(\omega' t + \phi)\; e^{-\frac{t}{2\tau}}.$$

Man beachte, daß die beiden Teillösungen x_+ und x_- zur gleichen reellen Lösung führen. Die allgemeine reelle Lösung ist in Abb. 5.3a dargestellt und hat natürlich zwei Integrationskonstanten, nämlich die *Amplitude* $a = |A|$ und den *Phasenwinkel* ϕ. Bei der Lösung handelt es sich um eine gedämpfte Schwingung. Man bezeichnet daher den Fall $\omega_0 > \frac{1}{2\tau}$ auch als *Schwingfall*.

2. Fall: $\omega_0 < \frac{1}{2\tau}$ (starke Dämpfung)
Hier ist $\lambda_\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}$ reell und offensichtlich $0 > \lambda_+ > \lambda_-$. Die allgemeine Lösung[14]

$$\begin{aligned} x(t) &= A_+ e^{-|\lambda_+|t} + A_- e^{-|\lambda_-|t} \\ &= e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(A_+ e^{\lambda t} + A_- e^{-\lambda t}\right) \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2} \end{aligned}$$

ist nicht (quasi-)periodisch und entspricht deshalb keiner Schwingung (siehe Abb. 5.3b). Man spricht daher auch vom *Kriechfall*.

3. Fall: $\omega_0 = \frac{1}{2\tau}$ (aperiodischer Grenzfall)
In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{t}{2\tau}},$$

die wir in den Übungen (siehe Aufg. 59) genauer untersuchen werden.

[14]Hier haben wir ausgenutzt, daß wegen $0 > \lambda_\pm$ gilt: $|\lambda_\pm| = -\lambda_\pm$.

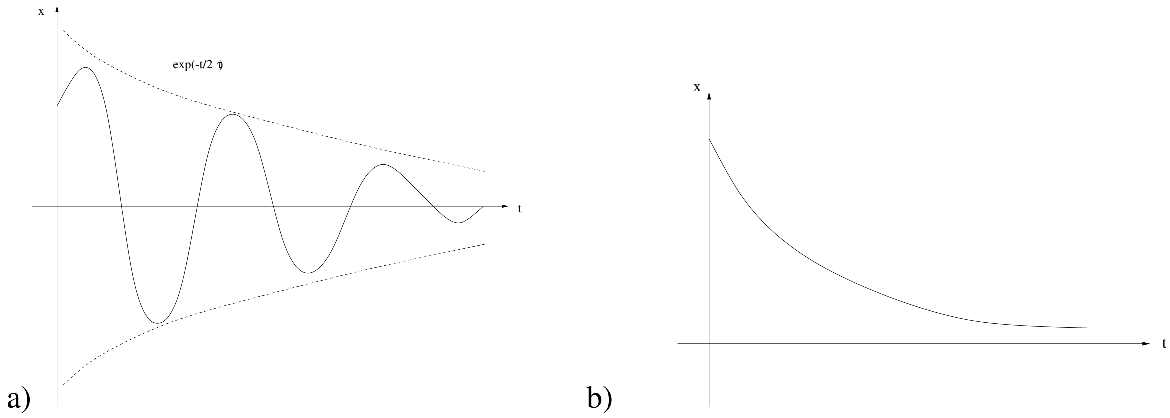


Abbildung 5.3: Lösung für den a) Schwingfall und b) Kriechfall.

Wir betrachten nun die *erzwungene Schwingung*, d.h. die Schwingung unter dem Einfluß einer äußeren Kraft $F_{\text{Motor}} = mf(t)$. In diesem erhält man die inhomogene DGL

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t).$$

Es ist zweckmäßig, den Differentialoperator[15] $L[y] := y'' + by' + cy$ einzuführen. Dieser Operator ist linear, d.h. $L[y+z] = L[y] + L[z]$. Dies folgt sofort aus den bekannten Rechenregeln für das Differenzieren.

Wie sieht die allgemeine Lösung von $y'' + by' + cy = g$ (d.h. $L[y] = g$) aus?
Die allgemeine Lösung muß zwei Integrationskonstanten enthalten, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden.
Sei y_{hom} die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, also $L[y_{\text{hom}}] = 0$, und $\overline{y}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL: $L[\overline{y}] = g$. Dann ist $y = y_{\text{hom}} + \overline{y}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL, denn

$$L[y] = L[y_{\text{hom}} + \overline{y}] = L[y_{\text{hom}}] + L[\overline{y}] = 0 + g = g,$$

d.h. y erfüllt die inhomogene DGL und y enthält zwei Integrationskonstanten (da y_{hom} zwei Integrationskonstanten enthält).

Für die Schwingungsgleichung mit einer konstanten äußeren Kraft

$$f(t) = f_0$$

[15]Ein *Operator* ist eine Abbildung, die eine Funktion auf eine andere Funktion abbildet. Typische Beispiele sind *Differentialoperatoren*, bei denen eine Funktion auf eine Kombination ihrer Ableitungen abgebildet wird.

(z.B. die Gravitationskraft mg) finden wir leicht eine spezielle Lösung, nämlich die konstante Funktion

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2}.$$

Diesen Fall wollen wir hier aber nicht weiter betrachten.
Wir werden nun die Schwingungsgleichung mit einer periodischen Kraft

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t)$$

genauer untersuchen. Dazu arbeiten wir wieder mit komplexen Zahlen und setzen

$$z = x + iy \qquad \text{mit} \qquad x = \text{Re}\, z = \text{Auslenkung}$$

und

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t}.$$

Der Realteil dieser Gleichung ist gerade unsere Schwingungsgleichung mit periodischer Kraft!

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung kennen wir schon:

$$\begin{aligned} z_{\text{hom}} &= A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} \\ &= e^{-\frac{t}{2\tau}} \left(A_+ e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}\,t} + A_- e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}\,t} \right) \end{aligned}$$

wobei wir im folgenden annehmen, daß wir uns im Schwingfall $\omega_0 > \frac{1}{2\tau}$ befinden.

z_{hom} fällt für große Zeiten exponentiell ab ($|z_{\text{hom}}| \to 0$ für $t \to \infty$), denn wir haben es ja mit einer gedämpften Schwingung zu tun. Wir brauchen daher für große Zeiten nur die spezielle Lösung $\overline{z}$ zu betrachten:

$$z = z_{\text{hom}} + \overline{z} \quad \overset{t\to\infty}{\to} \quad \overline{z}.$$

Im folgenden zeigen wir, daß

$$\overline{z} = a e^{i\omega t}$$

mit einem geeignet zu bestimmenden a eine spezielle Lösung ist.
Dies sieht man leicht ein, da wegen $\dot{\overline{z}} = i\omega a e^{i\omega t}$ und $\ddot{\overline{z}} = -\omega^2 a e^{i\omega t}$ folgt:

$$a e^{i\omega t}(-\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} + \omega_0^2) = f_0 e^{i\omega t} \qquad (*).$$

Diese Gleichung ist offensichtlich erfüllt, falls

$$a = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} =: R(\omega) f_0$$

mit der *Response–Funktion*

$$R(\omega) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}}.$$

Sie beschreibt die Antwort (Reaktion) des schwingfähigen Systems auf die äußere periodische Kraft $f_0 e^{i\omega t}$:

$$\overline{z}(t) = R(\omega) f_0 e^{i\omega t}.$$

Mit[16] $R = |R| e^{-i\phi}$ ist $\overline{z}(t) = |R| f_0 e^{i(\omega t - \phi)}$ und somit

$$x(t) = \text{Re}\, \overline{z} = |R| f_0 \cos(\omega t - \phi).$$

Dies beschreibt die periodische Antwort des Systems auf die äußere Kraft $f_0 \cos(\omega t)$. Die Amplitude (maximale Auslenkung) ist dabei $|R| f_0$ und die Auslenkung ist um die Phase ϕ gegenüber der äußeren Kraft verschoben. Explizit haben wir für die Amplitude wegen $|R| = \left|\frac{1}{a+ib}\right| = \frac{1}{|a+ib|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ mit $a = \omega_0^2 - \omega^0$ und $b = \frac{\omega}{\tau}$:

$$|R| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}.$$

Für die Phase ergibt sich mit $R^{-1} = |R|^{-1} e^{i\phi} = (\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}$:

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Im folgenden wollen wir das Verhalten von $|R|$ und ϕ als Funktion der Antriebsfrequenz ω diskutieren. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.4 grafisch zusammengefaßt.

Als Erstes betrachten wir den Fall kleiner ω, genauer $\omega \to 0$. Hier findet man

$$|R|(\omega = 0) = \frac{1}{\omega_0^2} \qquad \text{und} \qquad \tan\phi(\omega = 0) = 0, \quad \text{d.h.} \quad \phi(\omega = 0) = 0.$$

Die Auslenkung in diesem Grenzfall geschieht also ohne Phasenverschiebung mit der Kraft, d.h. die Auslenkung ist „in Phase" mit der Kraft. Sie ist explizit durch

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2}$$

gegeben. Dies kann man sich z.B. klar machen, indem man in Gleichung $(*)$ den Limes $\omega \to 0$ ausführt. Auf der linken Seite überlebt nur der Term, der von der elastischen Kraft kommt, die also im Fall $\omega \to 0$ das Verhalten bestimmt.

Als nächstes untersuchen wir den Fall großer ω, d.h. $\omega \to \infty$. Hier ist

$$|R|(\omega \to \infty) = 0, \qquad \text{und} \qquad \tan\phi(\omega \to \infty) \nearrow 0, \quad \text{d.h.} \quad \phi(\omega \to \infty) = \pi.$$

[16] Konventionell benutzt man hier $\phi = \arg(\frac{1}{R}) = -\arg(R)$.

Die Phasenverschiebung ist dabei π (und nicht 0), da $\cos\phi$ (also i.w. der Realteil der Responsefunktion) für große ω negativ ist. Im Fall $\omega \to \infty$ spielen die elastische Kraft und die Reibung keine Rolle. Dies sieht man wieder an $(*)$, wo für $\omega \to \infty$ auf der linken Seite der ω^2-Term dominiert, der ja von $\ddot{\overline{z}}$ stammt. Die Gleichung $(*)$ führt also auf $\ddot{x}(t) = f_0 \cos(\omega t)$ und somit

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega^2} \cos(\omega t - \pi).$$

Die Phasenverschiebung nimmt also hier ihren maximal möglichen Wert π an.

Schließlich bestimmen wir noch das Maximum von $|R|$. Dazu müssen wir das Minimum des Nenners finden. Mit der Abkürzung $x = \omega^2$ haben wir $f(x) = (x - \omega_0^2)^2 + \frac{x}{\tau^2}$ und $f'(x) = 2(x - \omega_0^2) + \frac{1}{\tau^2} \stackrel{!}{=} 0$. Hieraus folgt, daß die Amplitude für

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}}$$

maximal wird. Man spricht auch von *Resonanz*. Im Fall schwacher Dämpfung ist $\omega_0^2 \gg \frac{1}{2\tau^2}$ und somit $\omega_{res} \approx \omega_0$ und $\phi = \frac{\pi}{2}$. Die Amplitude im Resonanzfall bei schwacher Dämpfung ist dann $|R|_{\text{res}} = \frac{\tau}{\omega_0}$.
Explizit lautet die Lösung für die Auslenkung in diesem Fall

$$\overline{x}(t) = \frac{\tau}{\omega_0} f_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

und somit für die Geschwindigkeit $\dot{\overline{x}} = \frac{\tau\omega}{\omega_0} f_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{\tau\omega}{\omega_0} f_0 \cos(\omega t)$. Wir sehen also, daß bei Resonanz Kraft und Geschwindigkeit in Phase sind !

Bei schwacher Dämpfung ($\omega_0 \tau \gg 1$) entwickeln wir $R(\omega)$ in der Umgebung von ω_0:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \omega^2 &= (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega), \\ \frac{\omega}{\tau} &\approx \frac{\omega_0}{\tau}. \end{aligned}$$

Mit diesen Näherungen ergibt sich für die Responsefunktion:

$$R(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}} \approx \frac{1}{2\omega_0} \cdot \frac{1}{\omega_0 - \omega + \frac{i}{2\tau}}$$

bzw. ihren Betrag und ihr Argument

$$\begin{aligned} |R|^2 &= \frac{1}{4\omega_0^2} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau^2}}, \\ \tan\varphi &\approx \frac{1}{2\tau(\omega_0 - \omega)}. \end{aligned}$$

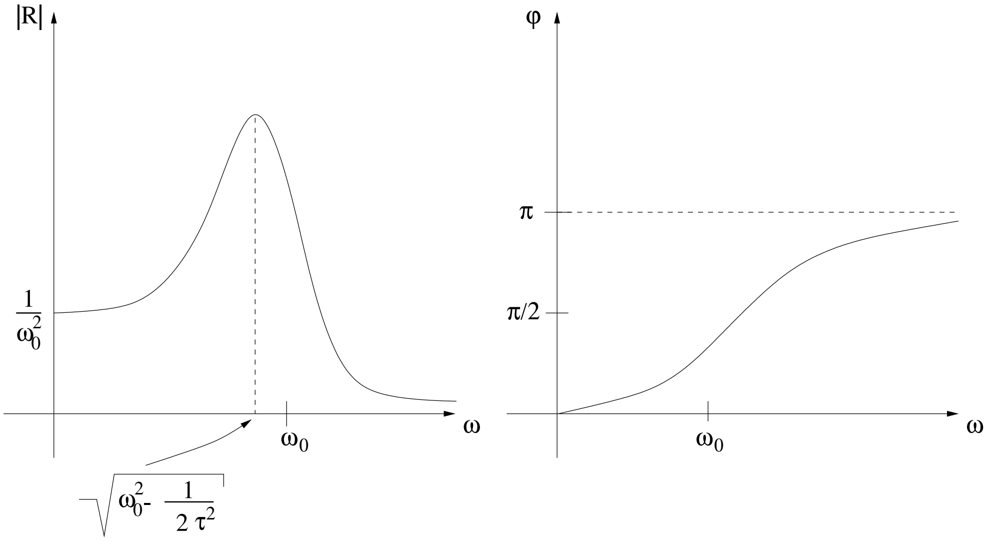


Abbildung 5.4: Verlauf von Amplitude und Phasenverschiebung als Funktion der Antriebsfrequenz.

Der Betrag (bzw. sein Quadrat) hat die für Resonanzen typische Form einer *Lorentzkurve* (siehe Abb. 5.5)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + u^2}.$$

$\frac{1}{\tau}$ heißt *Halbwertsbreite*, da es die Breite der Resonanzkurve beim halben Maximalwert angibt (siehe Abb. 5.5).
Für schwache Reibung ($\tau \to \infty$) führen Anregungen bei der Eigenfrequenz ω_0 zu einer sehr starken Reaktion des Systems, da $|R|$ dann sehr groß. Dies ist die sogenannte *Resonanzkatastrophe*, die sogar zur Zerstörung des Schwingers führen kann (Zersingen von Gläsern, Zusammenbruch der Tacoma-Bridge).

Bemerkung. Das hier diskutierte Resonanzverhalten eines schwingungsfähigen Systems tritt in vielen Bereichen der Physik auf, z.B. in der Atomphysik, Molekülphysik, Kernphysik, Festkörperphysik usw.

Energie und Leistung:

Im folgenden wollen wir uns die Energiebilanz der getriebenen Schwingung genauer ansehen. Auf Grund der Reibung geht mechanische Energie verloren. Wenn ein Schwinger von außen angeregt wird, so nimmt er Energie auf (Energieabsorption), die von der äußeren Energiequelle geliefert wird.
Die Newton-Gleichung lautet:

$$m\dot{v} + \frac{m}{\tau}v + m\omega_0^2 x = F\cos\omega t =: F(t).$$

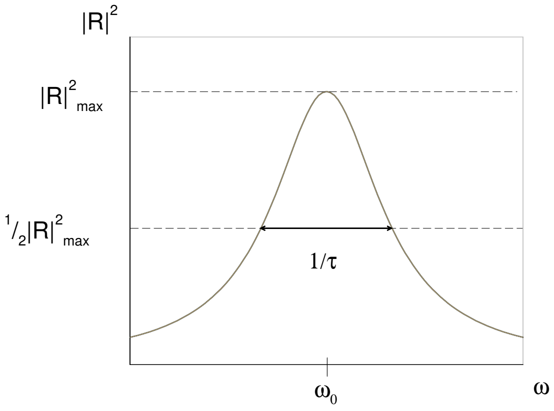


Abbildung 5.5: Lorentzkurve

Nach Multiplikation mit $v(t)$ ergibt sich hieraus

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}v^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2\right] + \frac{m}{\tau}v^2 = F(t)v(t) = P(t)$$

wobei wir die momentane Leistung $P(t)$ eingeführt haben.
Bei periodischen Systemen ist es zweckmässig, die über eine Periode T gemittelte Leistung zu betrachten, wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und deshalb $\cos(\omega t + \omega T) = \cos\omega t$.

Definition 5.4 (Mittelwert über eine Periode)**.**
Der Mittelwert über eine Periode T einer periodischen Funktion $f(t)$ ist definiert durch

$$\overline{f} := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

Um mit dieser Definition die mittlere Leistung zu bestimmen, ist zunächst folgende Beobachtung nützlich:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\underbrace{\left[\frac{m}{2}v^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2\right]}_{E_{\text{mech}}} dt = E_{\text{mech}}(T) - E_{\text{mech}}(0) = 0,$$

wobei wir benutzt haben, daß nach der Zeit T die (periodischen) Variablen v und x, und somit auch $E_{\text{mech}}(t)$ wieder den gleichen Wert wie zur Zeit $t = 0$ annehmen. Somit erhalten wir für die mittlere Leistung

$$\overline{P} = \overline{F(t)v(t)} = \frac{m}{\tau}\overline{v^2(t)}.$$

Hierbei beachte man, daß i.a. $\overline{v^2(t)} \neq \overline{v(t)}^2$ ist!
Die absorbierte Energie wird durch die Dämpfung verbraucht (Wärmeverlust).

Da $v = \dot{x} = -|R|f_0\omega\sin(\omega t - \varphi)$ folgt explizit:

$$\begin{aligned}\overline{P} &= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{m}{\tau}|R|^2 f_0^2\omega^2\sin^2(\omega t - \varphi)dt \\ &= \frac{m}{2\tau}f_0^2\omega^2|R|^2.\end{aligned}$$

Bei der Rechnung haben wir die Identität

$$\overline{\sin^2(\omega t - \varphi)} = \overline{\cos^2(\omega t - \varphi)} = \frac{1}{2}\overline{\left[\sin^2(\omega t - \varphi) + \cos^2(\omega t - \varphi)\right]} = \frac{1}{2}$$

benutzt, von der man sich selbst durch Nachrechnen überzeuge (siehe Aufgabe 41).

Da $\mathrm{Im}R(\omega) = -\frac{\omega/\tau}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]} = -\frac{\omega}{\tau}|R|^2$ folgt:

$$\overline{P} = -\frac{m\omega f_0^2}{2}\mathrm{Im}\,R(\omega),$$

d.h. Im $R(\omega)$ bestimmt die Leistung!
Man kann zeigen, daß die Energieaufnahme bei Resonanz maximal wird, d. h.

$$\overline{P} = \overline{P_{\mathrm{max}}} \qquad \text{für} \qquad \omega = \omega_{\mathrm{res}} = \omega_0.$$

5.3 Fourierreihen und Fourierintegrale

Im folgenden wollen wir uns ausführlicher mit periodischen Vorgängen und ihrer mathematischen Beschreibung befassen. Die Hauptmotivation dabei ist die Tatsache, daß periodische Vorgänge wie Schwingungen und Wellen in vielen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle spielen.

Definition 5.5 (Periodische Funktionen)**.**
Die $f(t)$ ist heißt *periodisch mit der Periode* T ($T > 0$), wenn für alle t gilt:

$$f(t + T) = f(t).$$

Der kleinste Wert von $T > 0$, der dies erfüllt, heißt *kleinste Periode* oder einfach nur *die Periode* von $f(t)$.

Beispiel 5.2 (Periodische Funktionen)**.**

a) $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ haben die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (bzw. Frequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$).

b) $\sin(n\omega t)$, $\cos(n\omega t)$ haben für $n > 1$ die Periode $\frac{2\pi}{n\omega} = T_n$, sind aber auch periodisch mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

c) Die konstante Funktion $f(t) = C$ hat jede positive Zahl als Periode.

Im folgenden werden wir zur Vereinfachung $x := \omega t$ als Variable wählen, d.h. wir betrachten nur die normierte Periode $T = 2\pi$ der Funktionen $\sin x$, $\cos x$. Am Ende des Abschnittes werden wir dann der Vollständigkeit halber die allgemeinen Formeln für beliebige Perioden T angeben.

Definition 5.6 (Fourierreihen)**.**
Eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

bezeichnet man als *Fourierreihe*. Man beachte, daß diese Reihe 2π-periodisch ist.

Im folgenden wollen wir die Frage untersuchen, wann sich eine periodische Funktion als Fourierreihe darstellen läßt.

Satz 5.1 (Fourierreihendarstellung periodischer Funktionen)**.**
Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert. Weiterhin sollen die sog. *Dirichlet-Bedingungen* erfüllt sein:

a) $f(x)$ ist 2π-periodisch, d.h. $f(x + 2\pi) = f(x)$

b) $f(x)$ und $f'(x)$ stückweise stetig in $[-\pi, \pi]$

Durch die Bedingung a) ist $f(x)$ für alle reellen Zahlen x eindeutig definiert. Bedingung b) bedeutet, daß $f(x)$ und $f'(x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ bis auf endlich viele Punkte stetig sind.

Sind die Dirichlet-Bedingungen erfüllt, dann gilt: $f(x)$ ist darstellbar als Fourierreihe, d.h.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

mit den Koeffizienten (Fourier-Koeffizienten)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = 0, 1, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Das heißt: Die Fourierreihe konvergiert gegen den Wert

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad \to \quad \begin{cases} f(x), & \text{wenn } f \text{ stetig bei } x \text{ ist} \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{wenn } f \text{ unstetig bei } x \text{ ist.} \end{cases}$$

Dabei bezeichnen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert (siehe Abb. 5.6).

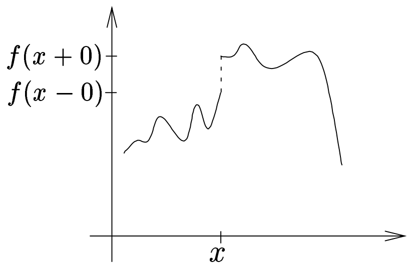


Abbildung 5.6: Unstetige Funktion

Bemerkungen:

1. Die Dirichlet-Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig. Für die physikalische Praxis reicht dies i.a. aus.

2. Als Periodenintervall kann jedes Intervall $[x_0, x_0 + 2\pi]$ gewählt werden, z. B. auch $[0, 2\pi]$.

3. Das Intervall $[-\pi, \pi]$ ist aber zweckmäßig, da symmetrisch um 0. Denn man sieht sofort:

$$\begin{array}{lll} a_n = 0, & \text{wenn } f(x) = -f(-x) & \text{(ungerade Funktion)} \\ b_n = 0, & \text{wenn } f(x) = f(-x) & \text{(gerade Funktion).} \end{array}$$

Das Interessante an obigem Satz ist ist, daß sich *jede* periodische Funktion (mit Dirichlet-Bedingungen) durch eine Reihe mit $\cos nx$ und $\sin nx$ darstellen läßt (Beweis: $\hookrightarrow$ Mathematik).

Definition 5.7 (vollständiges Funktionensystem)**.**
Ein solches Funktionensystem, d. h. die Menge $\{\cos nx, \sin nx \ (n = 0, 1, \dots)\}$ heißt *vollständig* (zur Darstellung periodischer Funktionen).

Man kann auch die Taylorentwicklung analytischer Funktionen in diesem Sinne verstehen. Statt nach den (vollständigen) periodischen Funktionen $\cos nx$ und $\sin nx$ zu entwickeln, entwickelt man hier nach den Funktion x^n.

Vielfach ist eine *komplexe Darstellung* der Fourierreihe zweckmäßig und einfacher. Mit den bekannten Beziehungen

$$\begin{aligned} e^{\pm inx} &= \cos nx \pm i \sin nx, \\ \cos nx &= \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \qquad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}), \end{aligned}$$

sieht man sofort ein, daß auch $\{e^{inx}\ (n = -\infty, \ldots, \infty)\}$ vollständig ist. Es gilt:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Die reelle und die komplexe Darstellung lassen sich leicht ineinander umrechnen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}] \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n(\cos nx + i \sin nx) + c_{-n}(\cos nx - i \sin nx)] \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(c_n + c_{-n}) \cos nx + i(c_n - c_{-n}) \sin nx)]
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Die Funktionen e^{inx} haben eine sehr wichtige Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
n \neq m: \qquad & \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{i(n-m)x} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{i(n-m)} = 0 \\
n = m: \qquad & \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \underbrace{e^{i(n-m)x}}_{=1} = 1.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis läßt sich mit Hilfe des Kronecker-Symbols

$$\delta_{n,m} := \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

kompakt zusammenfassen:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \delta_{n,m}.$$

Man sagt: Die Funktion e^{inx} stehen orthogonal aufeinander.

Definition 5.8 (orthogonale Funktionen).
$f(x)$ und $g(x)$ sind orthogonal in $[a,b]$, wenn

$$\int_a^b f(x)g^*(x)dx = 0$$

Die obige Rechnung zeigt, daß e^{inx} und e^{imx} für $n \neq m$ in $[-\pi,\pi]$ orthogonal sind, denn $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\left(e^{imx}\right)^* dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = 0$.

Wir wollen nun die Fourierdarstellung beweisen. Genauer werden wir zeigen, daß unter der Annahme, daß sich die Funktion $f(x)$ als eine Fourierreihe schreiben läßt, die Entwicklungskoeffizienten gerade die in dem obigen Satz behauptete Form haben:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)e^{-imx} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\right) e^{-imx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx}_{=2\pi\delta_{n,m}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta_{n,m} = c_m.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im ersten Schritt ausgenutzt, daß sich $f(x)$ als Fourierreihe schreiben läßt. Beim Übergang zur zweiten Zeilen wurden die Reihenfolge von Integration und Reihenbildung vertauscht[17].

Beispiel 5.3. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x$ in $[0,2\pi]$, die wir uns 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt denken (siehe Abb. 5.7)[18]. Der Graph von $f(x)$ ähnelt dann einem Sägezahn.

$$\begin{aligned}
n \neq 0: \quad c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xe^{-inx}dx = \left.\frac{xe^{-inx}}{-2\pi in}\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi in}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-inx}dx}_{=0} = \frac{1}{-in} = \frac{i}{n} \\
n = 0: \quad c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} xdx = \left.\frac{x^2}{4\pi}\right|_0^{2\pi} = \pi
\end{aligned}$$

Also haben wir folgende Darstellung von f als Fourierreihe:

$$x\Big|_{2\pi\text{-periodisch}} = \pi + \sum_{n\neq 0}\frac{i}{n}e^{inx} = \pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(nx),$$

[17]Aus den Dirichlet-Bedingungen kann man folgern, daß dies erlaubt ist.

[18]Natürlich ist f auch periodisch mit Periodizitätsintervall $[-\pi,\pi]$. Die folgenden Rechnungen sind aber einfacher in $[0,2\pi]$.

wobei wir bei der letzten Umformung die Terme zu n und $-n$ zusammengefaßt haben. Man beachte, daß die Reihe an den Unstetigkeitspunkten $x = 0 \mod 2\pi$ (d. h. x ist ein Vielfaches von 2π) tatsächlich den Wert $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{0+2\pi}{2} = \pi$ interpoliert!

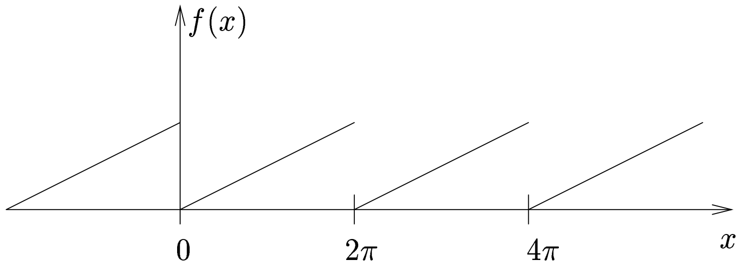


Abbildung 5.7: Sägezahn

Bemerkung:
Verwendet man statt der vollen Fourierreihe nur endlich viele Funktionen e^{inx}, so liefert dies eine Approximation der periodischen Funktion. Diese wird umso schlechter, je schneller sich die Funktion bei x ändert. Insbesondere an Unstetigkeiten tritt das sogenannte Gibbs-Phänomen auf.

Satz 5.2 (Parseval-Identität)**.**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\right)dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx}_{c_{-n}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Man kann die Parseval-Identität auch für die reelle Darstellung der Fourierreihe angeben:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n} = {c_0}^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n c_{-n} = \frac{{a_0}^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2)$$

Beispiel 5.4. Wir betrachten nun die Funktion $f(x) = x^2$ in $[0, 2\pi]$, die wir wieder 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen. Dies ist also gerade das Quadrat der in Beispiel 5.3 betrachten Funktion.

$$\begin{aligned} n \neq 0: \quad c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 e^{-inx}dx = \frac{2}{n^2} + \frac{2\pi i}{n}, \\ n = 0: \quad c_0 &= \frac{4\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Fourierreihe

$$\begin{aligned} x^2\Big|_{2\pi\text{-periodisch}} &= \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \left(\frac{2\pi i}{n} + \frac{2}{n^2}\right) e^{inx} \\ &= \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right] \end{aligned}$$

Speziell gilt: Bei $x = 0 \mod 2\pi$ ist $f(x) = 2\pi^2$, also

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \qquad \curvearrowright \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Man sieht, daß man mit Hilfe der Fourierdarstellung elegant komplizierte Reihen bestimmen kann.
Dieses Ergebnis folgt auch mit Hilfe der Parseval-Identität und der Resultate aus Beispiel 5.3. Mit $f(x) = x\big|_{2\pi\text{-periodisch}}$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\big|_{2\pi\text{-periodisch}}dx = \frac{4\pi^2}{3}.$$

Andererseits gilt nach Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{c}_n\tilde{c}_{-n} = \tilde{c}_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{c}_n\tilde{c}_{-n} = \pi^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

wobei $\tilde{c}_n = \frac{i}{n}$ die in Beispiel 5.3 bestimmten Fourierkoeffizienten von $f(x) = x\big|_{2\pi\text{-periodisch}}$ sind. Durch Umformung erhalten wir wieder $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Zum Abschluß wollen wir noch die Fourierdarstellung einer beliebigen $T-$periodischen Funktion ($T > 0$) angeben.

Satz 5.3 (Fourierreihendarstellung $T-$periodischer Funktionen)**.**
Die Funktion $f(x)$ sei $T-$periodisch und erfülle die Dirichlet-Bedingungen im Intervall $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Dann hat $f(x)$ folgende Fourierdarstellung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi i n x}{T}} \end{aligned}$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \qquad (n = 0, 1, \ldots), \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx \qquad (n = 1, 2, \ldots), \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi n x}{T}} dx \qquad (n = -\infty, \ldots, \infty). \end{aligned}$$

Wie man sieht, geht dies für den Spezialfall $T = 2\pi$ in die bekannten Formeln über.

5.4 Fourier-Transformation

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß sich periodische Funktionen als Fourierreihen darstellen lassen. Was passiert aber für Funktionen, die gar nicht periodisch sind ? Dieser Fall entspricht gerade dem Grenzübergang $T \to \infty$.

Wir betrachten zunächst die Funktion $\cos n\omega t = \cos(\frac{2\pi n}{T} t)$, die periodisch mit Periode T ist. Wenn $T \to \infty$ liegen die Punkte $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ immer dichter. Der Limes $T \to \infty$ entspricht dann dem Übergang von einer Fourier-Summe zu einem Fourier-Integral. Dies wollen wir im folgenden genauer betrachten.

Satz 5.4 (Fourier-Transformation)**.**
Die Funktion $f(x)$ erfülle folgende Voraussetzungen:

1) $f(x)$ genügt den Dirichlet-Bedingungen im Intervall $]-\infty, \infty[$,

2) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

mit der sog. *Fourier-Transformierten*

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

Man beachte, daß die oben genannten Voraussetzungen hinreichend, aber nicht notwendig sind. In der Praxis sind sie aber meist erfüllt.

Bemerkung. F ist Fourier-Transformierte von f und f ist Fouriertransformierte von F !

Bemerkung. Wir haben hier eine symmetrische Aufteilung der Koeffizienten (d. h. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$) vor dem Integral gewählt. Häufig werden andere Konventionen verwendet, d. h.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ldots \quad \text{und} \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \ldots \\ \text{oder} \quad f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ldots \quad \text{und} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ldots \end{aligned}$$

Die entsprechenden Fourier-Transformierten unterscheiden sich um einen Faktor ($\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ bzw. $\sqrt{2\pi}$). Dies muß man z. B. beim Nachschlagen in Tabellen immer beachten.

Im folgenden zeigen wir, wie sich die Fourier-Transformation aus dem Grenzfall $T \to \infty$ der Fourier-Reihe

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x} \qquad \text{mit} \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\omega_n x} dx \end{aligned}$$

ergibt, wobei $f(x) = f(x+T)$.
Wir machen nun den Grenzübergang $T \to \infty$ und $n \to \infty$ so, daß $\omega_n = \omega$ konstant gehalten wird. Dann ist auch $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T} =: \Delta\omega$ konstant und beim Grenzübergang geht $\Delta\omega \to d\omega$. Für die Fourierreihe folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{T}{2\pi} e^{i\omega_n x} \Delta\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega \\ &\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

wobei wir definiert haben

$$F(\omega_n) := \frac{T}{\sqrt{2\pi}} c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\omega_n x} dx \quad \stackrel{t,n\to\infty}{\longrightarrow} \quad F(\omega).$$

Damit haben wir gezeigt, daß sich die Fourier-Transformierte als Grenzfall der Fourierreihe einer Funktion mit unendlicher Periode ergibt.

Bemerkung. In der Physik interessieren uns häufig nur reelle Funktionen $f(x)$.
Dann gilt: $F(\omega)^* = F(-\omega)$
Beweis:

$$\begin{aligned} F(\omega)^* &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\right)^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f^*(x)}_{f(x)}\underbrace{\left(e^{-i\omega x}\right)^*}_{e^{i\omega x}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx = F(-\omega) \end{aligned}$$

Definition 5.9 (Delta-Funktion)**.**
Wir definieren die sog. *Delta-Funktion* durch folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} & \delta(x - x_0) = 0 \quad \text{für alle } x \neq x_0, \\ \text{und} \qquad & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0) \end{aligned}$$

wobei die zweite Eigenschaft für alle Funktionen $f(x)$ gelten soll, die stetig bei x_0 sind.

Bem.: Für analytische Funktionen $f(x)$ genügt die zweite Bedingung in der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)dx + 1$.
Die ist eine heuristische Definition. Eigentlich ist δ keine Funktion, sondern eine sogenannte Distribution ($\rightarrow$ Mathematik): Der Funktion f wird ihr Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle x_0 zugeordnet. Als Funktion ist $\delta(x - x_0)$ hochgradig singulär, da sie nur an einem Punkt x_0 von Null verschieden ist, aber trotzdem ein endliches Integral besitzt. $\delta(x - x_0)$ kann deshalb in x_0 keinen endlichen Wert annehmen, sondern wird dort unendlich. In Abb. 5.8 ist angedeutet, wie man sich $\delta(x - x_0)$ vorzustellen hat. Man kann die Delta-Funktion als das kontinierliche Analogon des Kronecker-Deltas ansehen, insbesondere wenn man beachtet das $\delta_{a,b} = \delta_{a-b,0}$.

Die Delta-Funktion spielt eine wichtige Rolle in der Physik, denn sie hat viele Anwendungen. Ein Beispiel hierfür liefern die Punktmassen, von denen wir sehr oft gesprochen haben.
Für die Massendichte $\rho(x)$ einer Punktmasse m am Ort x_0 gilt:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= 0 \qquad \text{für} \quad x \neq x_0, \\ \text{aber} \qquad m &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx. \end{aligned}$$

Somit sieht man, daß die Massendichte einer Punktmasse durch

$$\rho = m\delta(x - x_0)$$

gegeben ist. Mit Hilfe der Deltafunktion kann man also im Prinzip diskrete und kontinuierliche Systeme in einheitlicher Weise beschreiben.

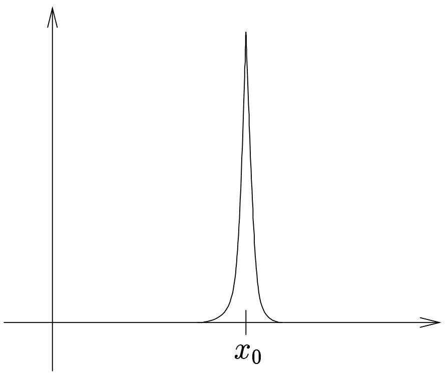


Abbildung 5.8: „Graph“ von $\delta(x - x_0)$

Das Fourier-Integral führt auf eine „Darstellung“ der δ-Funktion:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega y} f(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-y)} d\omega \right] dy \stackrel{!}{=} f(x). \end{aligned}$$

Hieraus liest man das wichtige Ergebnis

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-y)} d\omega = \delta(x - y)$$

ab. Die doppelte Fourier-Transformation führt also auf eine δ-Funktions-Integration.

Beispiel 5.5.
Im folgenden wollen wir einige Beispiele betrachten, bei denen die Deltafunktion auftritt.

1. Ein Integral der Form $\int f(x - y) g(y) dy$ bezeichnet man als *Faltungsintegral* bzw. als *Faltung* der Funktionen f und g. Es gilt folgender Zusammenhang des Faltungsintegrals mit den Fouriertransformierten F und G von f bzw. g:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

   Dies kann man auch so formulieren: Die Fourier-Transformierte des Faltungsintegrals ist das Produkt der Transformierten der gefalteten Funktionen:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) dy \right] e^{-i\omega x} d\omega = F(\omega) G(\omega).$$

Der Beweis der ersten Aussage folgt durch Einsetzen der jeweiligen Fouriertransformierten in das Faltungsintegral und anschließender Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega d\omega'}{2\pi} F(\omega)e^{i\omega(x-y)}G(\omega')e^{i\omega' y} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega d\omega'}{2\pi} F(\omega)G(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iy(\omega'-\omega)}}_{2\pi\delta(\omega'-\omega)} e^{i\omega x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega)e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' G(\omega')\delta(\omega'-\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega)G(\omega)e^{i\omega x}.
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage erhält man, indem mna die erste Fouriertransformiert:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\right] e^{-i\omega x}d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')G(\omega')e^{i\omega' x}d\omega'\right] e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' F(\omega')G(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(\omega'-\omega)x}}_{2\pi\delta(\omega'-\omega)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' F(\omega')G(\omega')\delta(\omega'-\omega) \\
&= F(\omega)G(\omega).
\end{aligned}$$

2. Als zweites Beispiel wollen wir die Fouriertransformierte der Blockfunktion (siehe Abb. 5.9)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

berechnen:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{a} \cos(\omega x)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\bigg|_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega a)}{\omega}.
\end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, daß das Integral über den Imaginärteil $\sin(\omega x)$ verschwindet, da der Sinus ungerade ist. Abb. 5.10 zeigt die Form der

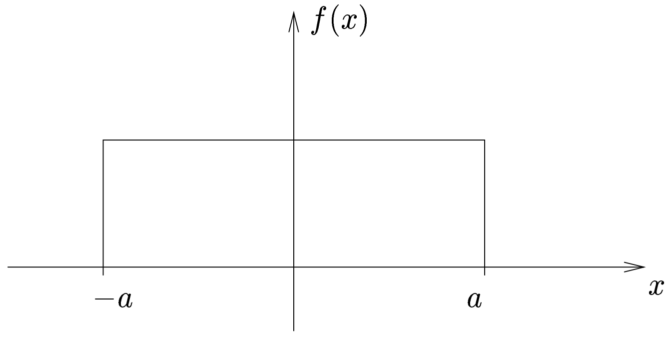


Abbildung 5.9: Blockfunktion

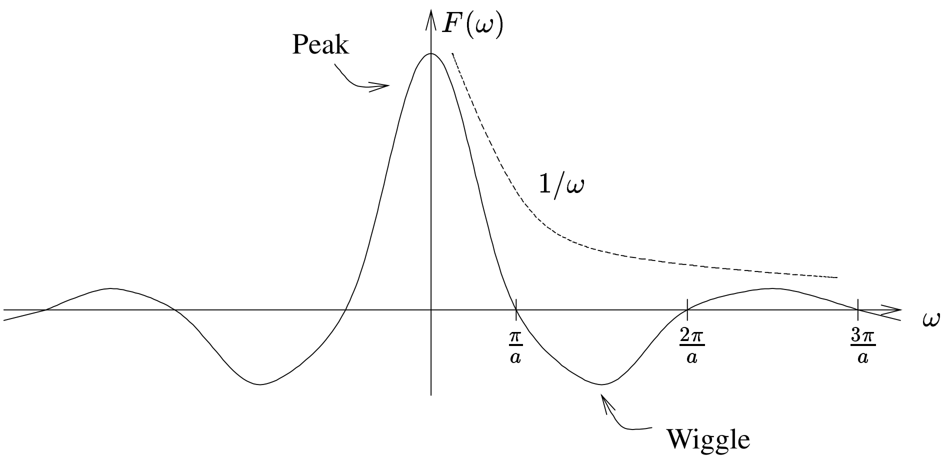


Abbildung 5.10: Fouriertransformierte der Blockfunktion

Fouriertransformierten. Das Maximum bei $x = 0$ bezeichnet man manchmal auch mit dem englischen Ausdruck *Peak* und die kleineren Maxima im oszillierenden Teil als *Wiggle*.

Speziell für $x = 0$ haben wir:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)}{\omega} d\omega \\ &\overset{u=\omega a}{=} \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \end{aligned}$$

und somit

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

Ähnlich wie die Fourierreihe bei der Berechnung komplizierter Reihen hilfreich sein kann, hilft die Fouriertransformation manchmal bei der Berechnung von Integralen.

Zum Abschluß wollen wir noch eine weitere Darstellung von $\delta(x)$ angeben. Die Funktionenfolge $(\delta_\alpha)_\alpha$ mit

$$\delta_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} e^{-\alpha|\omega|} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + x^2}$$

konvergiert nämlich für $\alpha \to 0$ gegen die Deltafunktion $\delta(x)$. Dies kann man zeigen, indem man verifiziert, daß für $\alpha \to 0$ die beiden definierenden Eigenschaften der Deltafunktion erfüllt sind. Dies wird in den Übungen genauer betrachtet.

6 Impuls, viele Teilchen

Bisher haben wir immer nur ein einzelnes Teilchen betrachtet, das sich unter dem Einfluß einer äußeren Kraft bewegt. I.a. hat man es aber mit Systemen aus vielen Teilchen zu tun, die miteinander wechselwirken. Zusätzlich können dann noch äußere Kräfte wirken. In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den grundlegenden Eigenschaften solcher Systeme beschäftigen.

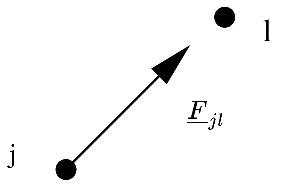
6.1 Schwerpunkt und Relativkoordinaten

Ein Teilchen:

Der Impuls für ein Teilchen berechnet sich wie bekannt über $\underline{p} = m\underline{v}$, die Newton-Gesetze fordern $\underline{F} = \dot{\underline{p}}$. Wenn also keine Kräfte auf das Teilchen wirken ($\underline{F} = 0$), folgt, daß der Impuls konstant sein muß: $\underline{p}(t) = \underline{p}_0$.

Viele Teilchen:

Gegeben seien n Teilchen mit zeitlich konstanten Massen $m_1, \ldots, m_n$, den Koordinaten $\underline{r}_j(t)$ und den Impulsen $\underline{p}_j = m_j \underline{v}_j$ für $j = 1, \ldots, n$.



Die Teilchen üben innere Kräfte aufeinander aus, wobei die Kraft $\underline{F}_{jl}$ von Teilchen l auf Teilchen j wirkt.

Nach dem dritten Newtonschen Gesetz (actio=reactio) gilt somit $\underline{F}_{jl} = -\underline{F}_{lj}$. Werden noch äußere Kräfte $\underline{F}_j^{(ext)}$ (=Kraft der Umgebung auf Teilchen j) dazugenommen, so lautet das zweite Newtonsche Gesetz:

$$\dot{\underline{p}} = \underline{F}_j^{(ges)} = \underline{F}_j^{(ext)} + \sum_{l \neq j} \underline{F}_{jl} \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

Definition 6.1 (Schwerpunkt, Massenmittelpunkt)**.** Mit den obigen Benennungen gilt für den Schwerpunkt einer Menge von Massen:

$$\underline{R} := \frac{\sum_{j=1}^n m_j \underline{r}_j}{\sum_{j=1}^n m_j} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \underline{r}_j$$

mit der Gesamtmasse

$$M = \sum_{j=1}^n m_j.$$

Für die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\underline{V}$ erhält man durch Ableiten

$$\underline{V} = \dot{\underline{R}} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \dot{\underline{r}}_j = \frac{1}{M} \sum_j \underline{p}_j = \frac{\underline{P}}{M}$$

mit dem Gesamtimpuls

$$\underline{P} = \sum_{j=1}^n \underline{p}_j.$$

6.2 Impulssatz

Ausgehend von den Größen des Gesamtsystems aus Definition 6.1 ergibt sich zunächst

$$\underline{P} = M \cdot \underline{V}$$

und hieraus durch Differentiation nach der Zeit

$$\dot{\underline{P}} = \sum_j \dot{\underline{p}}_j \overset{3.NG}{=} \sum_j \underline{F}_j^{(ges)} = \sum_j \underline{F}_j^{(ext)} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{l=1, l \neq j}^n \underline{F}_{jl}}_{(*)} = \sum_{j=1}^n \underline{F}_j^{(ext)}.$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß die Summe $(*)$, die ausgeschrieben folgendermaßen aussieht

$$(*) = (\underline{F}_{12} + \underline{F}_{13} + \dots) + (\underline{F}_{21} + \underline{F}_{23} + \dots) + (\underline{F}_{31} + \underline{F}_{32} + \dots) + \dots = 0.$$

Sie verschwindet, da nach dem 3. Newtonschen Gesetz $\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$ etc.
Der Schwerpunkt $\underline{R} = \frac{1}{M}\sum_j m_j \underline{r}_j$ eines Systemes bewegt sich also wie die in ihm vereinigte Gesamtmasse $M = \sum_j m_j$ unter dem Einfluß der Summe aller äußeren Kräfte $\underline{F}^{(ext)} = \sum_j \underline{F}_j^{(ext)}$, d.h.

$$\dot{\underline{P}} = \underline{F}^{(ext)}.$$

Satz 6.1 (Impulserhaltungssatz)**.**
Verschwindet die Summe der äußeren Kräfte, d.h. gilt $\underline{F}^{(ext)} = \sum_j \underline{F}_j^{(ext)} = 0$, so ist der Gesamtimpuls $\underline{P} = \sum_j \underline{p}_j$ erhalten: $\dot{\underline{P}} = 0 \quad \curvearrowright \quad \underline{P}(t) = P_0$.

Beispiel 6.1 (2-Körper-Problem (n=2))**.**
Wir wollen nun den Fall $n = 2$ zweier Teilchen genauer betrachten. Die Gesamtmasse ist $M = m_1 + m_2$. Zusätzlich definieren wir die *reduzierte Masse*

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{M}.$$

Der Schwerpunkt ist gegeben durch

$$\underline{R} = \frac{1}{M}(m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2).$$

Durch Einführung der *Relativkoordinate* $\underline{r} := \underline{r}_1 - \underline{r}_2$ kann man das Problem auf den Einkörperfall zurückführen. Dazu stellen wir zunächst für beide Massen die Bewegungsgleichung nach Newton auf:

$$\begin{aligned} 1) \quad m_1\ddot{\underline{r}}_1 &= \underline{F}_1^{(ext)} + \underline{F}_{12} \\ 2) \quad m_2\ddot{\underline{r}}_2 &= \underline{F}_2^{(ext)} + \underline{F}_{21} \end{aligned}$$

Addiert man Gleichung 1) und 2) so folgt wegen $\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$

$$M\ddot{\underline{R}} = \underline{F}^{(ext)} \qquad \text{mit} \qquad \underline{F}^{(ext)} = \underline{F}_1^{(ext)} + \underline{F}_2^{(ext)}.$$

Speziell für $\underline{F}_1^{(ext)} = \underline{F}_2^{(ext)} = 0$ folgt dann

$$\ddot{\underline{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\underline{R}} = \underline{V}_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{R}(t) = \underline{V}_0 t + \underline{R}_0.$$

Durch Bildung der Differenz 1)−2) der beiden Ausgangsgleichungen ergibt sich

$$\underbrace{m_1\ddot{\underline{r}}_1 - m_2\ddot{\underline{r}}_2}_{(*)} = \underline{F}_{12} - \underline{F}_{21} = 2\underline{F} \quad \text{mit} \quad \underline{F} := \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}.$$

Da

$$\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{R} + \frac{m_2}{M}\underline{r} & \curvearrowright \qquad \ddot{\underline{r}}_1 &= \frac{m_2}{M}\ddot{\underline{r}} \\ \underline{r}_2 &= \underline{R} - \frac{m_1}{M}\underline{r} & \curvearrowright \qquad \ddot{\underline{r}}_2 &= -\frac{m_1}{M}\ddot{\underline{r}} \end{aligned}$$

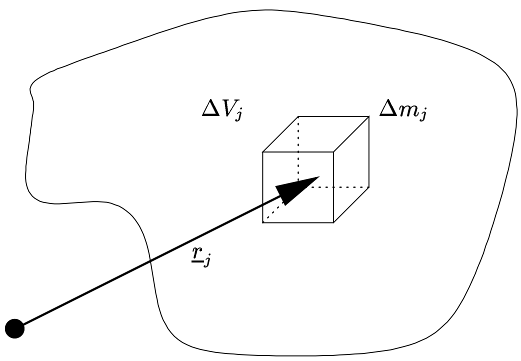
folgt

$$(*) = \frac{m_1 m_2}{M}\ddot{\underline{r}} + \frac{m_2 m_1}{M}\ddot{\underline{r}} = 2\mu\ddot{\underline{r}}$$

und somit

$$\mu\ddot{\underline{r}} = \underline{F}.$$

Die Bewegungsgleichung in Relativkoordinaten $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$ hat die also Form der Newton-Gleichung mit reduzierter Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ und der inneren Kraft $\underline{F} = \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$. Für die kinetische Energie gilt $T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$.



Man kann die obige Problematik auf den Fall ausgedehnter Körper verallgemeinern, indem man diese als Ansammlung von Massenpunkten auffaßt und den Grenzübergang macht:

$$\begin{aligned} M\underline{R} &= \sum_j \Delta m_j \underline{r}_j \overset{\Delta m_j \to 0}{\longrightarrow} \int \underline{r}\, dm \\ &= \int\limits_{K\ddot{o}rpervolumen} \underline{r} \cdot \rho(\underline{r})\, dV \end{aligned}$$

wobei $dm = \rho\, dV$ mit der Dichte

$$\rho(\underline{r}) = \frac{dm}{dV} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

6.3 Integration in allgemeinen Koordinaten, Volumenintegrale

Definition 6.2 (Volumenintegral)**.**
Mehrdimensionale Volumenintegrale sind durch den Grenzübergang zu infinitesimalen Volumenelementen definiert:

$$\int\limits_{\text{Volumen}} f(\underline{r})\, \mathrm{d}V = \lim_{\Delta V_k \to 0} \sum_k f(\underline{r}_k) \cdot \Delta V_k.$$

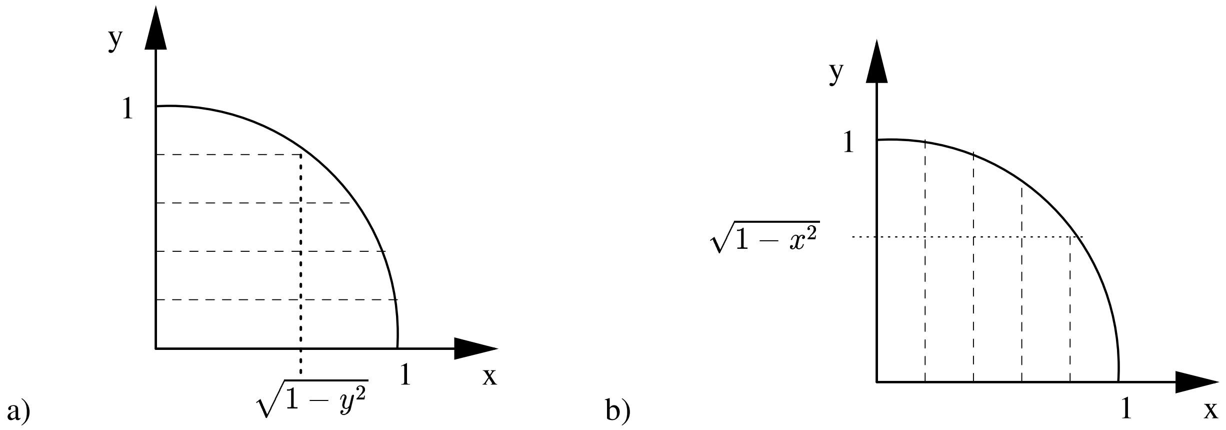


Abbildung 6.1: Veranschaulichung der Integration über einen Viertelkreis für verschiedene Integrationsreihenfolgen. a) Erst $x-$Integration, dann $y-$Integration; b) erst $y-$Integration, dann $x-$Integration

Analog dazu definiert man *Flächenintegrale*

$$\int\limits_{\text{Fläche}} f(\underline{r})\;\mathrm{d}F.$$

In kartesischen Koordinaten schreibt man Volumenintegrale ausführlicher als

$$\iiint\limits_{\text{Volumen}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_{z_0}^{z_1} \left[\int\limits_{y_0(z)}^{y_1(z)} \left\{ \int\limits_{x_0(y,z)}^{x_1(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z$$

Man beachte, daß die Integrationsgrenzen noch von den Koordinaten abhängen können, über die noch nicht integriert wurde. Die Reihenfolge der Integrationen ist dabei i.a. unwichtig. Man hat aber zu beachten, daß sich die Integrationsgrenzen natürlich ändern können, wenn man die Reihenfolge vertauscht (siehe das folgende Beispiel).

Beispiel 6.2 (Viertelkreis in 2 Dimensionen)**.**
Als Beispiel wollen wir das Integral der Funktion $f(x,y) = x$ über einen Viertelkreis integrieren. Dabei wollen wir verschiedene Integrationsreihenfolgen betrachten.

a) Zuerst soll y von 0 bis 1 laufen und x dementsprechend gewählt werden. Zu festem y läuft dann die $x-$Integration bis $\sqrt{1-y^2}$ (siehe Abb. 6.1).

$$\begin{aligned} \int\limits_{\text{Viertelkreis}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} \right] \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(y - \frac{1}{3}y^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

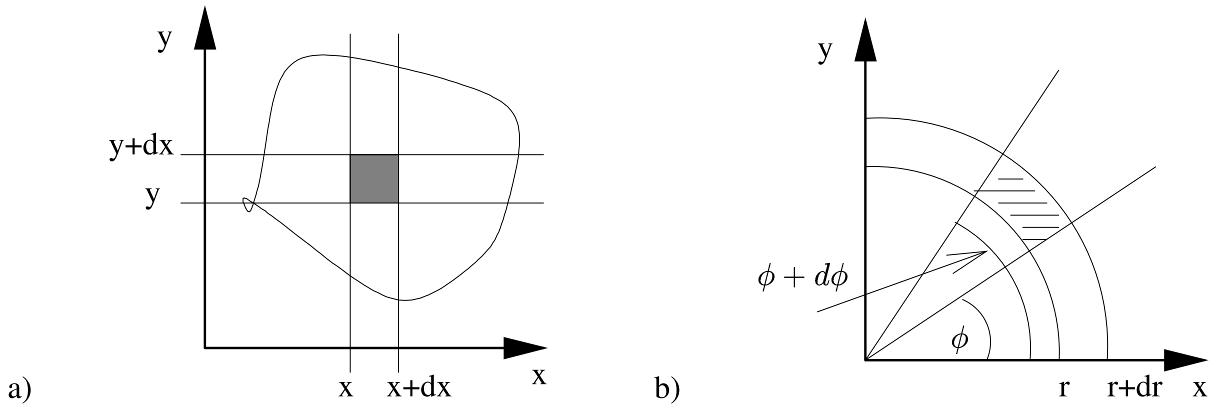


Abbildung 6.2: Flächenzerlegung in a) kartesischen Koordinaten bzw. b) ebenen Polarkoordinaten.

b) Mit der umgekehrten Reihenfolge der Integrationen (erst $y-$, dann $x-$Integration) ergibt sich analog:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\text{Viertelkreis}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x\cdot y\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Die allgemeine Vorgehensweise für die Berechnung von Flächen- (und Volumen-) integralen ist in Abb. 6.2a) dargestellt. In kartesischen Koordinaten findet eine Zerlegung der Fläche in infinitesimale Quadrate der Fläche $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ statt. Diese erält man, indem man die beiden Koordinaten x und y infinitesimal variiert, aus der eingeschlossenen Fläche (siehe Abb. 6.2a)).
Bei der Integration in kartesischen Koordinten ergeben sich i.a. Probleme mit der Wahl der Integrationsgrenzen, wenn der Körper nicht rechteckig ist. Durch passende Wahl des Koordinatensystemes läßt sich dieses Problem in vielen Fällen umgehen, z. B. mit Polarkoordinaten:

$$\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int f(r\cos\phi, r\sin\phi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

Wir wollen dies an unserem Beispiel etwas genauer untersuchen.

Beispiel 6.3 (Viertelkreis in Polarkoordinaten)**.**
Ideal geeignet für die Integration über den Viertelkreis sind Polarkoordinaten. Wir wollen wieder $\int\limits_{\text{Viertelkreis}} x\,\mathrm{d}F$ berechnen, wobei in Polarkoordinaten $x = r\cos\phi$ ist. Durch eine analoge Konstruktion[19] wie bei der Bestimmung des Flächenelements $\mathrm{d}F = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ in kartesischen Koordinaten erkennt man, daß in Polarkoordinaten gilt (siehe Abb. 6.2b))

$$\mathrm{d}F = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

[19] d.h. durch infinitesimale Variation von r und ϕ erhält man wieder dF als eingeschlossen Fläche, siehe Abb. 6.2

Um einen Viertelkreis vom Radius 1 zu beschreiben, muß r zwischen 0 und 1 variieren und ϕ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Man beachte dabei, daß für jedes r der Winkel ϕ über das volle Intervall variieren muß (und umgekehrt), d.h. die Integrationsgrenzen sind unabhängig von r und ϕ. Damit ergibt sich:

$$\int\limits_{VK} r\cos\phi\, r\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^2 \cos\phi\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}r = \int_0^1 r^2 \sin\phi\Big|_0^{\pi/2} \mathrm{d}r = \frac{1}{3} r^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Das Ergebnis stimmt natürlich mit dem in kartesischen Koordinaten überein. Der große Vorteil bei der obigen Integration ist natürlich, daß das zweidimensionale Integral in zwei eindimensionale Integrale faktorisiert, da die Integrationsgrenzen unabhängig von den Integrationsvariablen sind:

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} r^2 \cos\phi\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}r \underset{\text{Grenzen fest}}{=} \left[\int_0^1 r^2\, \mathrm{d}r\right] \left[\int_0^{\pi/2} \cos\phi\, \mathrm{d}\phi\right].$$

Das gilt natürlich nicht allgemein, siehe z.B. die entsprechende Integration in kartesischen Koordinaten.

Satz 6.2 (Transformationssatz)**.** Eine Verallgemeinerung der Substitutionsregel für eindimensionale Integrale auf mehrdimensionale Integtale ist der Transformationssatz. Gegeben sei eine Koordinatentransformation

$$(x, y, z) \to (u, v, w) \quad \text{mit} \quad x = x(u, v, w) \quad \text{etc.}$$

Dann transformiert sich ein Volumenintegral entsprechend

$$\int\limits_V f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int\limits_{\tilde{V}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot \left|\det\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right)\right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w$$

mit der Funktionaldeterminante

$$\det\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right) := \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Wie bei der bekannten Substitutionsregel ändert sich natürlich der Bereich, über den zu integrieren ist (hier von V nach $\tilde{V}$). In einer Dimension ändert sich i.a. nur die Länge des Integrationsintervalls, in höheren Dimensionen ändert sich darüber hinaus i.a. die Form des Volumens. Da bei der Substitutionsregel auch die Ableitung der substituierten Funktion auftritt ist es nicht überraschend, daß dies hier auch passiert. Da wir es mit Funktionen mehrerer Variablen zu tun haben, treten natürlich alle partiellen Ableitung auf. Warum diese gerade in einer speziellen Kombination, nämlich der Funktionaldeterminante, auftreten, soll hier nicht diskutiert werden.

Definition 6.3 (Determinante)**.** An dieser Stelle seien zwei- und dreidimensionale Determinanten definiert, später wird der allgemeine Fall folgen.

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &:= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &:= a_{11}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&- a_{12}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir haben hier dreidimensionale Determinanten rekursiv auf zweidimensionale zurückgeführt. Man kann dies natürlich auch explizit ausschreiben, was eine Summe mit 6 Summanden ergibt. Die Rekursionsregel kann man sich relativ leicht merken. Man nimmt jedes Element a_{1j} der ersten Zeile und streicht die erste Zeile und $j-$te Spalte. Von den vier übrigbleibenden Elementen hat man dann die (zweidimensionale) Determinante zu bilden. Dies macht man für alle drei Elemente a_{1j} und addiert die Beiträge dann mit dem korrekten Vorzeichen. Dieses erhält man durch Addition der Indizes von a_{1j}: Ist $1 + j$ gerade, so ist das Vorzeichen '+' zu wählen, ist $1 + j$ ungerade, so wählt man '$-$'.

Beispiel 6.4 (Ebene Polarkoordinaten)**.** Wir wollen uns am Beispiel der ebenen Polarkoordinaten davon überzeugen, daß das transformierte Flächenelement tatächlich genau die Form hat, die wir vorher schon anschaulich aus Abb. 6.2 abgeleitet haben. Mit $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ folgt für die Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned}
\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}\right) &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \\
&= r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r
\end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{d}F = \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

Die Determinante $\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right)$ beschreibt die Verzerrung des infinitesimalen Volumenelementes unter der Koordinatentransformation. Speziell für die bereits bekannten Koordinatensysteme

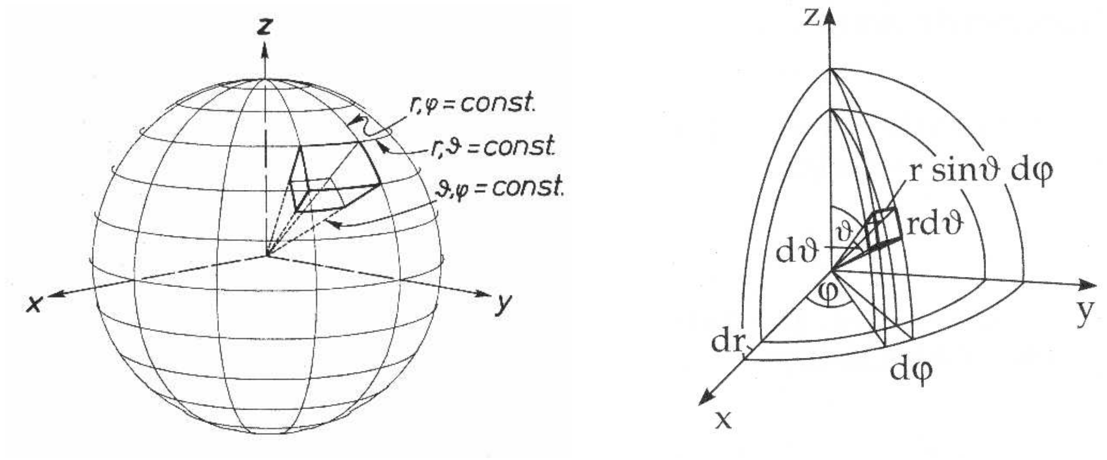


Abbildung 6.3: Infinitesimales Volumenelement in Kugelkoordinaten.

ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} \text{Kartesisch:} & \mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \curvearrowright \int f(x,y,z)\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \text{Ebene Polarkoordinaten:} & \mathrm{d}F = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi & \curvearrowright \int f(r\cos\phi, r\sin\phi)\; r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\ \text{Zylinderkoordinaten:} & \mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z & \curvearrowright \int f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)\; r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\ \text{Kugelkoordinaten:} & \mathrm{d}V = r^2\sin\theta\;\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta & \curvearrowright \int \tilde{f}(r,\phi,\theta)\; r^2\;\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \end{array}$$

wobei $\tilde{f}(r,\phi,\theta) = f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)$.
Die Form des infinitesimalen Volumenelements in Zylinderkoordinaten kann man sich leicht vorstellen, z.B. durch (kartesische) Fortsetzung des Flächenelements in ebenen Polarkoordinaten (Abb. 6.2b). Es ähnelt einem Tortenstück, von dem man die Spitze abgeschnitten hat. Das infinitesimale Volumenelement in Kugelkoordinaten ist schwerer vorzustellen. Es ist in Abb. 6.3 dargestellt[20].

7 Rotationsbewegung und starre Körper

7.1 Rotationsdynamik

Wir zerlegen den Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}$ in eine radiale Komponente $\underline{v}_r$ (Radialgeschwindigkeit) parallel zum Ortsvektor $\underline{r}$ und eine tangentiale Komponente $\underline{v}_t$ (Tangentialgeschwindigkeit)

[20]Im Druck gibt es verschiedene Darstellungen für die griechischen (Klein-)Buchstaben phi ($\phi = \varphi$) und theta ($\theta = \vartheta$).

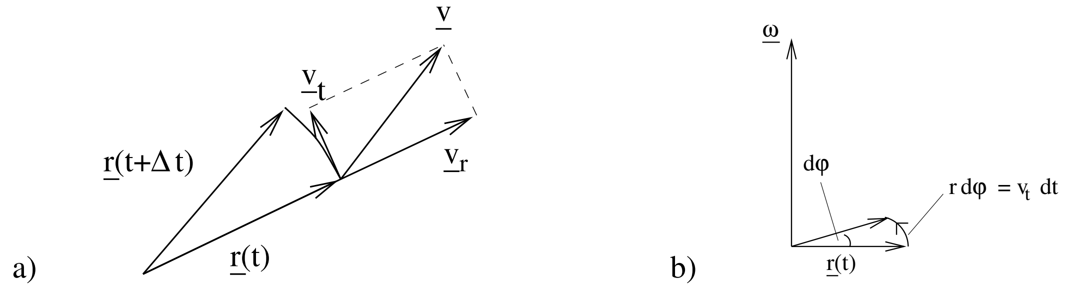


Abbildung 7.1: a) Zerlegung der Geschwindigkeit in einen radialen und einen tangentialen Anteil; b) Zur Definition der Winkelgeschwindigkeit.

senkrecht zu $\underline{r}$ (siehe Abb. 7.1a). Die Bewegung tangential zum Radius läßt sich als Rotation um eine Drehachse durch den Ursprung und senkrecht zur aus $\underline{r}$ und $\underline{v}$ aufgespannten Ebene auffassen. Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit ist gegeben durch $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$. Aus Abb. 7.1b entnimmt man, daß $v_t = r\frac{d\varphi}{dt}$ ist und somit

$$\omega = \frac{v_t}{r}.$$

Definition 7.1 (Vektor der Winkelgeschwindigkeit)**.**
Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ hat den Betrag $\omega = |\underline{\omega}| = \dot{\varphi}$. Seine Richtung bestimmt sich folgendermassen: Erfolgt die Winkelbewegung gegen den Uhrzeigersinn, dann steht $\underline{\omega}$ senkrecht auf der Bewegungsebene und zeigt nach oben (rechte-Hand-Regel[21]).
Daraus folgt

$$\underline{v}_t = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

womit offensichtlich $\underline{v}_t \cdot \underline{r} = \underline{0}$ und die rechte-Hand-Regel erfüllt sind.

Definition 7.2 (Drehimpuls)**.**
Der *Drehimpuls* $\underline{L}$ eines Teilchens mit Impuls $\underline{p}$ am Ort $\underline{r}$ ist definiert als

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} = m\, \underline{r} \times \underline{v}.$$

Der Drehimpulsvektor steht also senkrecht auf der Ebene, die durch $\underline{r}$ und $\underline{v}$ aufgespannt wird. Man beachte, daß der Drehimpuls abhängig vom Bezugspunkt ist! Genauer muß man daher vom Drehimpuls um einen Punkt sprechen.

Als Beispiel für die Abhängigkeit des Drehimpulses vom Bezugspunkt betrachten wir die Situation in Abb. 7.2. Im linken Bild ist $\underline{L} = 0$, da $\underline{r} \parallel \underline{v}$, im rechten $L = amv \neq 0$.

Definition 7.3 (Drehmoment)**.**
Auf ein Teilchen, das am Ort $\underline{r}$ die Kraft $\underline{F}$ spürt, wirkt ein *Drehmoment* [22]

$$\underline{N} = \underline{r} \times \underline{F}.$$

[21] Der abgespreizte Daumen zeigt in Richtung von $\underline{\omega}$, wenn die anderen Finger in Bewegungsrichtung zeigen.

[22] Im Englischen heißt das Drehmoment *torque*, der Drehimpuls *angular momentum*. Hier muß man also vorsichtig sein, da es sonst schnell zu Verwechslungen kommen kann.

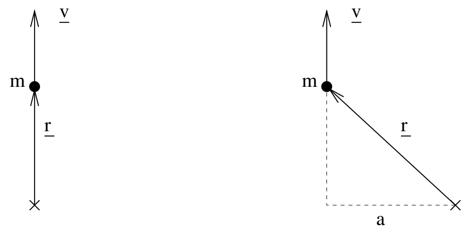


Abbildung 7.2: Der Drehimpuls ist abhängig vom Bezugspunkt.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{L}} &= \dot{\underline{r}} \times \underline{p} + \underline{r} \times \dot{\underline{p}} \\ &= m\,\underline{v} \times \underline{v} + \underline{r} \times \underline{F} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{N}\end{aligned}$$

Diese Gleichung steht in Analogie zu $\dot{\underline{p}} = \underline{F}$.

Speziell für eine Zentralkraft $\underline{F} = f(r)\hat{r}$ gilt:

$$\underline{N} = \underline{r} \times \underline{F} = f(r)\,\underline{r} \times \hat{r} = 0,$$

da $\hat{r} \parallel \underline{r}$ und deshalb $\underline{r} \times \hat{r} = 0$ ist. Somit folgt die Drehimpulserhaltung in Zentralkraftfeldern:

$$\underline{L} = \text{konstanter Vektor}.$$

Diesen wichtigen Erhaltungssatz werden wir z.B. in Kap. 9 bei der Beschreibung der Planetenbewegung ausnutzen.

Wir betrachten nun wieder Systeme, die aus vielen Teilchen mit den Ortsvektoren $\underline{r}_j$ und den Impulsen $\underline{p}_j$ $(j = 1 \dots N)$ bestehen. Wir definieren den Drehimpuls des $j-$ten Teilchens durch

$$\underline{L}_j = \underline{r}_j \times \underline{p}_j.$$

Dann definiert man den Gesamtdrehimpuls $\underline{L} = \sum_{j=1}^{N} \underline{L}_j$ und das Gesamtdrehmoment: $\underline{N} = \sum_{j=1}^{N} \underline{N}_j$ mit

$$\underline{N}_j = \underline{r}_j \times \underline{F}_j^{(ges)} = \underline{r}_j \times \left[\underline{F}_j^{(ext)} + \sum_{l(\neq j)} \underline{F}_{jl} \right].$$

Wir nehmen nun an (diese Annahme ist i. a. erfüllt), daß die inneren Kräfte $\underline{F}_{jl}$ Zentralkräfte sind:

$$\underline{F}_{jl} = f(r_{jl})(\underline{r}_j - \underline{r}_l),$$

wobei $r_{jl} = |\underline{r}_j - \underline{r}_l|$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_j \underline{r}_j \times \sum_{l(\neq j)} \underline{F}_{jl} &= \sum_j \sum_{l(\neq j)} \underline{r}_j \times (\underline{r}_j - \underline{r}_l) f(r_{jl}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_j \sum_{l(\neq j)} f(r_{jl}) \left[\underline{r}_j \times (\underline{r}_j - \underline{r}_l) + \underline{r}_l \times (\underline{r}_l - \underline{r}_j)\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt, da der Term in eckigen Klammern gleich $(\underline{r}_j - \underline{r}_l) \times (\underline{r}_j - \underline{r}_l) = 0$ ist.

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, daß wir in der Doppelsumme die Summationsindizes umbenennen können, und zwar speziell $j \leftrightarrow l$. Deshalb ist

$$\sum_j \sum_{l(\neq j)} \underline{r}_j \times (\underline{r}_j - \underline{r}_l) f(r_{jl}) = \sum_l \sum_{j(\neq l)} \underline{r}_l \times (\underline{r}_l - \underline{r}_j) f(r_{lj}) = \sum_{l,j\ (j\neq l)} \underline{r}_l \times (\underline{r}_l - \underline{r}_j) f(r_{jl}),$$

wobei wir $r_{jl} = r_{lj}$ ausgenutzt haben.
Sind die inneren Kräfte Zentralkräfte, so tragen sie nicht zum Gesamtdrehmoment bei. Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist dann

$$\dot{\underline{L}} = \sum_j \dot{\underline{L}}_j = \sum_j \underline{N}_j = \sum_j \underline{r}_j \times \underline{F}_j^{(ext)} =: \underline{N}^{(ext)},$$

wobei $\underline{N}^{(ext)}$ das gesamte äußere Drehmoment (analog zu $\dot{\underline{P}} = \underline{F}^{(ext)}$) ist.
Speziell für den Fall, daß das gesamte äußere Drehmoment verschwindet ($\underline{N}^{(ext)} = 0$) folgt also:

$$\underline{L} = \text{konstant},$$

also die Drehimpulserhaltung.

7.2 Bewegung eines starren Körpers

Im folgenden wollen wir die Bewegung eines Systems aus Massenpunkten genauer betrachten. Speziell interessieren wir uns für sog. starre Körper.

Definition 7.4 (starrer Körper)**.**
Ein starrer Körper ist ein System aus Massenpunkten, bei denen die Positionen der Teilchen relativ zueinander fixiert sind, d.h. alle Abstände zwischen den Teilchen sind konstant. Der Körper ist starr und kann sich nur als Ganzes bewegen.

Definition 7.5 (Freiheitsgrade)**.**
Unter der Zahl der *Freiheitsgrade* versteht man die Zahl der Koordinaten, die notwendig sind, um die Position eines System aus einem oder mehreren Massepunkten zu beschreiben.

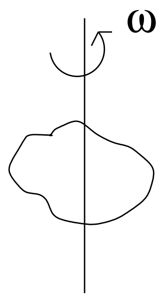


Abbildung 7.3: Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse.

Beispiel 7.1. (Freiheitsgrade)
1 Massenpunkt: Die Lage des Massenpunktes ist durch den Ortsvektor $\underline{r} = (x, y, z)$ vollständig bestimmt. Ein einzelner Massenpunkt hat daher drei Freiheitsgrade.
N Massenpunkte: Die N Ortsvektoren $\underline{r}_j$ $(j = 1, \dots, N)$ bestimmen die Lage des Systems vollständig, d.h. ein System aus N Massenpunkten hat $3N$ Freiheitsgrade.

Ein starrer Körper, der aus N Massenpunkten besteht, hat weniger als $3N$ Freiheitsgrade, da die Bewegungen der Teilchen relativ zueinander nicht möglich sind. Tatsächlich hat er 6 Freiheitsgrade (vgl. Aufg. 46). Die erlaubten Bewegungen sind nämlich Translationen des gesamten Systems (3 Freiheitsgrade, z.B. die Lage des Schwerpunktes) und Rotationen des gesamten Systems (3 Freiheitsgrade, z.B. Lage der Drehachse). M.a.W.: Durch die Angabe von 6 Größen läßt sich die Lage eines jeden Massenpunktes, aus denen sich der starre Körper zusammensetzt, bestimmen. Die restlichen $3N - 6$ Freiheitsgrade, die ein beliebiges (nicht starres) System aus N Teilchen hätte, bezeichnet man auch als innere Freiheitsgrade. Sie entsprechen z.B. Schwingungen und spielen in der Molekül- und Festkörperphysik eine wichtige Rolle.

Die allgemeine Beschreibung der Bewegung von starren Körpern (z.B. die Kreiselbewegung) ist schwierig und wird in der theoretischen Mechanik behandelt. Wir betrachten im folgenden nur zwei wichtige Spezialfälle.

7.2.1 Rotation um eine feste Achse

Wir betrachten den Fall, in dem eine feste Achse existiert, um die sich der Körper bewegt (Abb. 7.3). Die Rotation ist also eindimensional und kann durch $\omega = \omega(t)$ charakterisiert werden. Da der Körper starr ist, bewegen sich alle Punkte mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit.
Im Folgenden nehmen wir o. B. d. A. an, daß die feste Drehachse in z-Richtung liegt. Für jeden Punkt gilt dann $\underline{v}_j = (v_{jx}, v_{jy}, 0)$, da er sich nur in der $x - y$-Ebene bewegt, und $\underline{v}_{j,tang} = \underline{v}_j$, $\underline{v}_j$ ist rein tangential. Somit

$$v_{j,tang} = \omega r_{j,\perp}$$

wobei $r_{j,\perp} = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}$ der Abstand des Punktes j von der Achse ist. Man beachte, daß i.a. $r_{j,\perp} \neq |\underline{r}_j|$ ist. Auf Grund der Starrheit ist $r_{j,\perp} = \text{const}$ und unabhängig von t.

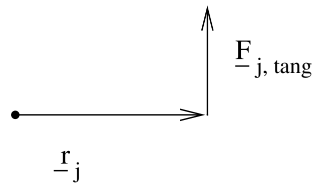


Abbildung 7.4: Tangentialkraft

Damit lautet die Newton-Gleichung in tangentialer Richtung

$$\begin{aligned} F_{j,tang} &= m_j \frac{dv_{j,tang}}{dt} \\ &= m_j \, \dot{\omega} \, r_{j,\perp} \end{aligned}$$

und somit wegen $\underline{N} = \underline{r} \times \underline{F}$

$$m_j \, r_{j,\perp}^2 \, \dot{\omega} = N_{j,tang}$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß $\underline{F}_{j,tang}$ senkrecht auf $\underline{r}_j$ steht (Abb. 7.4). $N_{j,tang}$ ist das tangentiale Drehmoment.
Dies ergibt für den gesamten starren Körper

$$N_{tang}^{(ext)} = \sum_j N_{j,tang} = \left(\sum_j m_j r_{j,\perp}^2 \right) \dot{\omega} = I \dot{\omega}$$

Dabei ist das Trägheitsmoment I wie folgt definiert:

Definition 7.6 (Trägheitsmoment)**.**
Ein System aus Massenpunkten der Masse m_j mit Abstand $r_{j,\perp}$ von der Drehachse hat das *Trägheitsmoment*

$$I = \sum_j m_j \; r_{j,\perp}^2.$$

Wie üblich kann man hier wieder zu einer kontinierlichen Massenverteilung der Dichte $\rho(\underline{r})$ übergehen:

$$I = \int r_\perp^2 dm = \int r_\perp^2 \rho(\underline{r}) dV.$$

Speziell für den Fall, daß die Drehachse gleich der z-Achse ist, ergibt sich dann:

$$I_z = \int (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV.$$

Trägheitsmomente lassen sich i.a. dann besonders leicht berechnen, wenn die Drehachse mit einer Symmetrieachse des Körpers zusammenfällt. Folgender Satz macht eine Aussage über den Zusammenhang zwischen dem Trägheitsmoment bzgl. einer Achse durch den Schwerpunkt und einer beliebigen dazu parallelen Achse:

Satz 7.1 (Steinerscher Satz)**.**
Das Trägheitsmoment I_A bzgl. einer Achse A hängt folgendermaßen mit dem Trägheitsmoment I_{AS} bzgl. einer zu ihr parallelen Achse durch den Schwerpunkt zusammen:

$$I_A = I_{AS} + Md^2$$

wobei M die Masse des Körpers ist und d der Abstand der Achse A von der Schwerpunktsachse.
Beweis: Übung

Wir wollen noch die Rotationsenergie bzgl. einer festen Drehachse bestimmen. In diesem Fall gilt für die kinetische Energie eines Systems aus Massenpunkten m_j:

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_{j,t}^2 = \sum_j \frac{m_j}{2} r_{j,\perp}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

wobei $v_{j,t}$ die Tangentialgeschwindigkeit von Teilchen j ist, das den (festen) Abstand $r_{j,\perp}$ von der Drehachse hat. In diesem Fall steckt also die gesamte kinetische Energie in der Rotation, weshalb man auch von rotationskinetischer Energie spricht.

Für einen rollenden Zylinder setzt sich die Bewegung aus einer Rotation bzgl. einer Achse und einer Translationsbewegung der Achse selbst zusammen. In diesem Fall ist die gesamte kinetische Energie gegeben durch

$$T = T_{Transl} + T_{Rot} = \frac{M}{2} V_S^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2 .$$

Dabei ist V_S die Schwerpunktsgeschwindigkeit und I_S das Trägheitsmoment bzgl. der Schwerpunktsachse.

8 Rotierende Bezugssysteme

8.1 Koordinatentransformationen, Drehungen

Im folgenden wollen wir untersuchen, was bei Koordinatentransformationen, insbesondere durch *Drehungen der Basisvektoren*, geschieht. Wir betrachten daher den Basiswechsel

$$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \quad \longrightarrow \quad \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3,$$

wobei die neuen Basisvektoren $\underline{e}'_j$ z.B. durch eine Drehung um eine Achse aus den alten Vektoren $\underline{e}_j$ hervorgehen. Bei solchen Basistransformationen bleibt ein Vektor $\underline{r}$ unverändert, aber seine Koordinaten x_j ändern sich natürlich (in x'_j):

$$\underline{r} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 = x'_1 \underline{e}'_1 + x'_2 \underline{e}'_2 + x'_3 \underline{e}'_3$$

Wir betrachten nun speziell die Komponentendarstellung der neuen Einheitsvektoren $\underline{e}'_j$ im alten System $\underline{e}_j$:

$$\underline{e}'_j = d_{j1}\underline{e}_1 + d_{j2}\underline{e}_2 + d_{j3}\underline{e}_3 \qquad (j = 1, 2, 3)$$

Die 3×3 Zahlen d_{jl} $(j, l = 1, 2, 3)$ kennzeichnen das neue System quantitativ. Man schreibt auch kompakt

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = (d_{lj})_{\substack{j=1,2,3 \\ l=1,2,3}} .$$

$\underline{\underline{D}}$ bezeichnet man auch als *Transformationsmatrix*. Bevor wir uns weiter mit Koordinatentransformationen beschäftigen, wollen wir die wichtigsten Regeln für das *Rechnen mit Matrizen* zusammenstellen.

Definition 8.1 (Rechnen mit Matrizen)**.**
Seien

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\tilde{A}}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$-Matrizen und

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

eine $n \times p$-Matrix[23]. Dann definiert man die Addition zweier Matrizen elementweise durch

$$\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{\tilde{A}}} := \begin{pmatrix} a_{11} + \tilde{a}_{11} & \cdots & a_{1n} + \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + \tilde{a}_{m1} & \cdots & a_{mn} + \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} = (a_{jl} + \tilde{a}_{jl})_{jl}$$

und die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ durch

$$\lambda\underline{\underline{A}} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{jl})_{jl} .$$

Man beachte, daß die Summe also nur für Matrizen der gleichen Größe definiert ist !

Das Matrixprodukt $\underline{\underline{C}} := \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ ist eine $m \times p$-Matrix mit den Elementen

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} .$$

Damit man zwei Matrizen multiplizieren kann, muß die Zeilenzahl der zweiten Matrix gleich der Zahl der Spalten der ersten Matrix sein !

[23]Die Menge aller $m \times n$-Matrizen bezeichnen wir im folgenden auch mit $\mathcal{M}(m, n)$.

Bemerkung. Im allgemeinen ist

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}.$$

Z.B. ist das rechte Produkt für $m \neq p$ überhaupt nicht definiert.

Wichtiger Spezialfall: $n \times 1$-Matrizen, also Matrizen mit nur einer Spalte, identifiziert man mit Vektoren. Die Multiplikation eines Vektors $\underline{b} \in \mathcal{M}(n,1)$ mit einer Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathcal{M}(n,n)$ ist dann gegeben durch[24]

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

Im folgenden wollen wir einige wichtige Matrixtypen definieren.

Definition 8.2.
Die $n \times n$-Einheitsmatrix ist definiert durch

$$\underline{\underline{E}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{jl})_{j,l=1,\ldots,n} =: \mathbb{1} =: \underline{\underline{I}}$$

mit dem sog. *Kronecker-Symbol*

$$\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Einheitsmatrix ist eine spezielle *Diagonalmatrix*, bei denen nur die Elemente a_{jj} auf der Diagonalen von Null verschieden sein können.
Man überlegt sich leicht, daß für eine beliebige Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathcal{M}(n,n)$ gilt:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}.$$

Die *transponierte Matrix* $\underline{\underline{A}}^t$ einer Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathcal{M}(m,n)$ ist die $n \times m$-Matrix

$$\underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad \text{d.h.} \quad a^t_{jl} = a_{lj},$$

die aus $\underline{\underline{A}}$ durch Spiegelung an der Diagonalen, d.h. durch Vertauschung von Zeilen und Spalten, hervorgeht.

[24] $\underline{b}$ kann natürlich allgemeiner mit einer Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathcal{M}(m,n)$ multipliziert werden. Der Spezialfall $m = n$ ist aber für die Praxis der wichtigste, z.B. für die Koordinatentransformationen.

Inverse Matrix: Sei $\underline{\underline{A}}$ eine $n \times n$-Matrix. Existiert eine Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mit

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}},$$

so bezeichnet man diese als zu $\underline{\underline{A}}$ inverse Matrix.

An dieser Stelle wollen wir noch kurz auf die sog. *Einsteinsche Summenkonvention* hinweisen, die in manchen Büchern[25] verwendet wird. Hierbei läßt man das Summenzeichen $\sum$ weg und vereinbart, daß über alle Indizes, die mehrmals auftauchen, summiert wird. $a_{il}b_{lj}$ bedeutet also $\sum_l a_{il}b_{lj}$. Der Wertebereich des Summationsindex (hier l) ist dabei i.a. aus dem Zusammenhang zu erschließen. Diese Konvention hat ihren Ursprung in der allgemeinen Relativitätstheorie, wo sehr viele Größen mit zwei (d.h. Matrizen) oder gar mehr (sog. Tensoren) Indizes auftauchen und die Formeln durch viele Summenzeichen noch unübersichtlicher werden.

Anwendung auf Basiswechsel

Wir wollen nun zu unserer ursprünglichen Fragestellung zurückkommen und die oben zusammengestellten Definitionen und Operationen von Matrizen auf die Beschreibung von Basiswechseln $\underline{e}_j \longrightarrow \underline{e}'_j$ mit

$$\underline{e}'_j = \sum_{l=1}^{3} d_{jl}\underline{e}_l \qquad (*)$$

anwenden.
Zunächst stellt sich die Frage, welche Eigenschaften eine Transformationsmatrix $\underline{\underline{D}} = (d_{jl})$ hat. Seien daher $\underline{e}_1$,$\underline{e}_2$,$\underline{e}_3$ und $\underline{e}'_1$,$\underline{e}'_2$,$\underline{e}'_3$ Orthonormalbasen, d.h.

$$\underline{e}_j \cdot \underline{e}_l = \delta_{jl} \qquad \text{und} \qquad \underline{e}'_j \cdot \underline{e}'_l = \delta_{jl}$$

Hier haben wir das oben eingeführte Kronecker-Symbol benutzt, ob die Orthonormalität der Basen in kompakter Form auszudrücken. Für $j = l$ ist nämlich $\underline{e}_j \cdot \underline{e}_j = 1$, was die Normiertheit der Vektoren zeigt, und für $j \neq l$ ist $\underline{e}_j \cdot \underline{e}_l = 0$ auf Grund der Orthogonalität. Im folgenden wollen wir nun die wichtigsten Eigenschaften der Transformationsmatrix herleiten.

1) Wir betrachten zunächst das Skalarprodukt zwischen einem alten Basisvektor $\underline{e}_i$ und einem neuen Basisvektor $\underline{e}'_j$:

$$\underline{e}'_j \cdot \underline{e}_i \overset{(*)}{=} \sum_l d_{jl}\underline{e}_l \cdot \underline{e}_i = \sum_l d_{jl}\delta_{il} = d_{ji}.$$

Es entspricht also gerade dem Element d_{ji} der Transformationsmatrix! Eine anschauliche Interpretation folgt aus[26]

$$\underline{e}'_j \cdot \underline{e}_i = \cos\varphi_{ji},$$

[25] z.B. dem von Großmann aus den Literaturempfehlungen
[26] Denn nach den bekannten Eigenschaften des Skalarprodukts ist $\underline{e}'_j \cdot \underline{e}_i = |\underline{e}'_j| \cdot |\underline{e}_i| \cos\varphi_{ji}$ mit $|\underline{e}'_j| = |\underline{e}_i| = 1$.

wobei φ_{ji} der Winkel zwischen alter i-Richtung und neuer j-Richtung ist. Hieraus folgert man sofort

$$|d_{ji}| = |\cos\varphi_{ji}| \leq 1,$$

d.h. alle Matrixelemente der Transformationsmatrix sind betraglich kleiner oder gleich Eins.

2) Da die neuen Basisvektoren wieder normiert sein sollen, folgt

$$1 = \underline{e}'_j \cdot \underline{e}'_j = \left(\sum_l d_{jl}\underline{e}_l\right) \cdot \left(\sum_k d_{jk}\underline{e}_k\right) = \sum_{k,l} d_{jl}d_{jk} \underbrace{\underline{e}_l \cdot \underline{e}_k}_{=\delta_{lk}} = \sum_l d_{jl}^2 = d_{j1}^2 + d_{j2}^2 + d_{j3}^2$$

Auch hieraus folgt wieder $|d_{ji}| \leq 1$. Die Bedingung ist aber sogar noch strenger, denn aus ihr folgt z.B. das in jeder Zeile höchstens ein Element gleich 1 sein kann (und dann sind die anderen sogar 0).

3) Schließlich nutzen wir noch die Orthogonalität der neuen Basisvektoren, um etwas über die Eigenschaften der Transformationsmatrix zu erfahren. Für $j \neq i$ ergibt sich

$$0 = \underline{e}'_j \cdot \underline{e}'_i = \left(\sum_l d_{jl}\underline{e}_k\right) \cdot \left(\sum_k d_{ik}\underline{e}_k\right) = \sum_{kl} d_{jl}d_{ik} \underbrace{\underline{e}_l \cdot \underline{e}_k}_{\delta_{lk}} = \sum_l d_{jl}d_{il}$$

2) und 3) lassen sich kompakt mit Hilfe des Kronecker-Symbols zusammenfassen:

$$\sum_l d_{jl} \underbrace{d_{il}}_{d_{li}^t} = \sum_l d_{jl}d_{li}^t = \delta_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Hierbei haben wir schon die Matrixelemente d_{jl}^t der transponierten Matrix $\underline{\underline{D}}^t = \left(d_{jl}^t\right)_{jl} = (d_{lj})_{jl}$ eingeführt. Dies ist nützlich, da man dann die Bedingungen 2) und 3) sehr kompakt als

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}^t = \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{D}}^t \cdot \underline{\underline{D}}$$

schreiben kann[27]. Hier folgt nun

$$\underline{\underline{D}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^t.$$

Eine Matrix, deren Inverses gleich ihrer Transponierten ist, bezeichnet man auch als *orthogonale Matrix*. Orthogonale $n \times n$-Matrizen bilden eine Gruppe, die sog. orthogonale Gruppe $O(n)$. Die zugehörige Verknüpfung ist die Matrizenmultiplikation, d.h. sind $\underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{D}}_2, \underline{\underline{D}}_3 \in O(n)$, so gilt:

1) $\underline{\underline{D}}_1 \cdot \underline{\underline{D}}_2 \in O(n)$

2) $(\underline{\underline{D}}_1 \cdot \underline{\underline{D}}_2) \cdot \underline{\underline{D}}_3 = \underline{\underline{D}}_1 \cdot (\underline{\underline{D}}_2 \cdot \underline{\underline{D}}_3)$

[27] Wobei wir hier natürlich nur das erste Gleichheitszeichen bewiesen haben!

3) $\underline{\underline{E}} \in O(n)$

4) Mit $\underline{\underline{D}}_1$ ist auch $\underline{\underline{D}}_1^{-1} \in O(n) \quad (\underline{\underline{D}}_1^{-1} = \underline{\underline{D}}_1^t)$.

Da allgemein gilt $\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = (\det \underline{\underline{A}})(\det \underline{\underline{B}})$ und $\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}}^t$, folgt aus $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}^t = \underline{\underline{E}}$ wegen $\det \underline{\underline{E}} = 1$ sofort:

$$(\det \underline{\underline{D}})^2 = 1.$$

Unter *(echten) Drehungen* geht ein rechtshändiges Koordinatensystem in ein rechtshändiges über. Dann gilt:

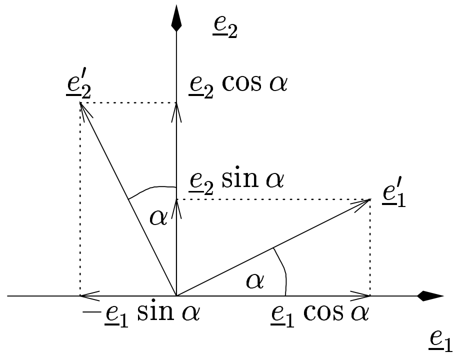
$$\det \underline{\underline{D}} = 1.$$

Die Menge aller orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 bildet ebenfalls eine Gruppe, die sog. *spezielle orthogonale Gruppe*:

$$SO(n) = \left\{ \underline{\underline{D}} \in O(n) \mid \det \underline{\underline{D}} = 1 \right\}.$$

Ist $\det \underline{\underline{D}} = -1$, so wird durch die entsprechende Transformation die Händigkeit geändert, dh. ein rechtshändiges Koordinatensystem wird in ein linkshändiges überführt.

Beispiel 8.1 (Drehung um z-Achse)**.** Wir betrachten die Drehung eines Koordinatensystem um die z-Achse. Somit sind die alte und die neue z-Achse identisch und wir haben $\underline{e}_3' = \underline{e}_3$ und somit $D_{31} = D_{32} = 0$ und $D_{33} = 1$.



$$\underline{e}_1' = \cos\alpha \underline{e}_1 + \sin\alpha \underline{e}_2$$
$$\underline{e}_2' = -\sin\alpha \underline{e}_1 + \cos\alpha \underline{e}_2$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{D}}^{(z)}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{D}}^{(z)}(\alpha)$ erfüllt die Eigenschaften 1) - 3) und

$$\det \underline{\underline{D}}^{(z)}(\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Führt man zwei Drehungen um z-Achse nacheinander aus, so entspricht dies natürlich einer einzigen Drehung. Tatsächlich gilt

$$\underline{\underline{D}}^{(z)}(\alpha) \cdot \underline{\underline{D}}^{(z)}(\beta) = \underline{\underline{D}}^{(z)}\,,(\alpha + \beta)$$

wie man leicht nachrechnet. Insbesondere ist hier die Reihenfolge, in der die Drehungen ausgeführt werden, egal. Dies gilt bei Drehungen um *verschiedene* Achsen i.a. nicht mehr!!

Abschließend wollen wir nun herleiten, wie sich die Koordinaten eines Vektors transformieren.

$$\begin{aligned}
\underline{r} = \sum_l x_l \underline{e}_l &= \sum_l x'_l \underline{e}'_l \qquad\qquad | \cdot \underline{e}'_j \\
\Rightarrow \qquad \sum_l x_l \underbrace{\underline{e}_l \cdot \underline{e}'_j}_{\stackrel{1)}{=} d_{jl}} &= \sum_l x_l \underline{e}'_l \cdot \underline{e}'_j = x'_j \\
\Rightarrow \qquad x'_j &= \sum_l d_{jl} x_l
\end{aligned}$$

Mit $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ läßt sich daher die Transformation der Koordinaten kompakt schreiben als

$$\underline{x}' = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x}.$$

Sind die Koordinaten x_j eines Vektors bekannt, so kann man seine Koordinaten in einem gedrehten System einfach mit Hilfe der Transformationsmatrix $\underline{\underline{D}}$ bestimmen. Die Umkehrung funktioniert natürlich auch, und zwar mit

$$\underline{x} = \underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \underline{x}' = \underline{\underline{D}}^t \cdot \underline{x}'.$$

Als Übung kann man sich explizit durch Betrachtung der transformierten Koordinaten $\underline{x}' = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{x}$ davon überzeugen, daß[28]

1. die Länge eines Vektors sich unter Drehungen nicht ändert, d.h. $r^2 = \sum_l x_l^2 = \sum_l x_l'^2$,
2. Skalarprodukte invariant unter Drehungen sind, d.h. $\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_l a_l b_l = \sum_l a'_l b'_l$.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß man zwischen *aktiven Drehungen*, bei denen der Vektor gedreht wird, und den hier betrachteten *passiven Drehungen*, bei denen die Basis gedreht wird, unterscheiden kann. Es ist aber anschaulich klar, daß eine aktive Drehung einer passiven Drehungen in die entgegengesetzte Richtung entspricht.

8.2 Newton-Gleichung in rotierenden Koordinatensystemen

Wir betrachten ein Koordinatensystem R, das gegenüber dem im (absoluten) Raum ruhenden Koordinatensystem F rotiert. Ein ruhender Beobachter in R mißt die zeitliche Änderung $\left.\frac{d\underline{A}}{dt}\right|_R$ einer vektoriellen Größe $\underline{A}(t)$. Diese hängt folgendermaßen mit der Änderung $\left.\frac{d\underline{A}}{dt}\right|_F$ zusammen, die ein in F ruhender Beobachter mißt:

$$\left.\frac{d\underline{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\underline{A}}{dt}\right|_R + \underline{\omega} \times \underline{A} \qquad\qquad (*)$$

[28] Die erste Aussage ist natürlich ein Spezialfall der zweiten.

Man beachte, daß R kein Inertialsystem ist[29]. $\underline{\omega}$ ist die Winkelgeschwindigkeit des bewegten Systems relativ zum raumfesten System F.
Wir wollen die Gleichung $(*)$ hier nicht im Detail beweisen. Man kann sie explizit mit Hilfe der Ergebnisse aus dem vorigen Abschnitt 8.1 nachrechnen. Der Vektor $\underline{A}$ hat im ruhenden System die Darstellung $\underline{A} = \sum_j A_j \underline{e_j}$. Im rotierenden System sind die Basisvektoren $\underline{e_j}$ zeitabhängig. Daher muß man bei der Zeitableitung in diesem System nicht nur die Koeffizienten $A_j(t)$ differenzieren, sondern auch die Einheitsvektoren. Die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten liefert den ersten Term in $(*)$. Der zweite Term folgt aus der Zeitabhängigkeit der Einheitsvektoren. Man beachte, daß aus $\underline{e}_j \cdot \underline{e}_j = 1$ folgt: $\dot{\underline{e}}_j \cdot \underline{e}_j = 0$, d.h. die Zeitableitung eines Einheitsvektors steht senkrecht auf diesem. Außerdem folgt aus $\underline{e}_j \cdot \underline{e}_l = 0$ analog: $\dot{\underline{e}}_j \cdot \underline{e}_l = -\underline{e}_j \cdot \dot{\underline{e}}_l$. Mit diesen beiden Identitäten kann man dann den zweiten Term in $(*)$ herleiten.
Für die Beschleunigungen folgt aus $(*)$:

$$\left.\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\right|_F = \left.\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\underline{\omega}}{dt}\right|_R \times \underline{r} + 2\underline{\omega} \times \left.\frac{d\underline{r}}{dt}\right|_R + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \qquad (**)$$

Denn: Seien D_F, D_R die Operatoren für die zeitliche Ableitung in F bzw. R, d.h. $D_F = \left.\frac{d}{dt}\right|_F$ und $D_R = \left.\frac{d}{dt}\right|_R$. Dann entspricht $(*)$ der Operatorgleichung

$$D_F = D_R + \underline{\omega} \times \ .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} D_F^2 \underline{r} &= D_F(D_R\, \underline{r} + \underline{\omega} \times \underline{r}) = D_F(D_R\, \underline{r}) + D_F\, (\underline{\omega} \times \underline{r}) \\ &= (D_R + \underline{\omega}\times) D_R\, \underline{r} + (D_F\, \underline{\omega}) \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (D_F\, \underline{r}) \\ &= D_R^2\, \underline{r} + \underline{\omega} \times (D_R\, \underline{r}) + (D_R\, \underline{\omega} + \underline{\omega} \times \underline{\omega}) \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (D_R\, \underline{r} + \underline{\omega} \times \underline{r}) \\ &= D_R^2\, \underline{r} + (D_R\, \underline{\omega}) \times \underline{r} + 2\underline{\omega} \times (D_R\, \underline{r}) + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \end{aligned}$$

Dies ist gerade Gleichung $(**)$. Dabei wurde bei der Umformung zur letzten Zeile $\underline{\omega} \times \underline{\omega} = \underline{0}$ verwendet. Die auftretenden Terme haben folgende Bedeutung:

$\left.\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\right|_F$ ist die Beschleunigung relativ zum raumfesten System.

$\left.\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\right|_R$ ist die Beschleunigung relativ zum rotierenden System.

$\left.\frac{d\underline{\omega}}{dt}\right|_R \times \underline{r}$ ist die *Linearbeschleunigung*.

$-2\underline{\omega} \times \left.\frac{d\underline{r}}{dt}\right|_R$ ist die *Coriolisbeschleunigung*.

$-\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$ ist die *Zentrifugalbeschleunigung*.

[29] Wir hatten ja schon in Kap. 2.2 gesehen, daß eine Kreisbewegung immer eine beschleunigte Bewegung ist.

Die letzten drei Terme ergeben sich aus der Beschleunigung des bewegten Systems relativ zum raumfesten System.

Das rotierende System ist kein Inertialsystem. Deshalb muß dort die Newton-Gleichung modifiziert werden. Mit $\underline{F} = m\frac{d^2r}{dt^2}\Big|_F$ folgt aus $(**)$ die Newton-Gleichung im rotierenden Koordinatensystem:

$$m\,\ddot{\underline{r}} = \underline{F} - m\,\dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} - 2m\,\underline{\omega} \times \underline{v} - m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

Hierbei haben wir den Index R unterdrückt.
Die letzten drei Terme auf der linken Seite der Gleichung sind neu gegenüber der Newton-Gleichung in Inertialsystemen. Sie existieren nur, da das Bezugsystem beschleunigt ist. Man bezeichnet sie deshalb auch als *Scheinkräfte*. Rotiert das System mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$, so ist $\dot{\underline{\omega}} = 0$ und es treten nur die beiden letzten Terme auf. $-2m\,\underline{\omega} \times \underline{v}$ heißt *Corioliskraft* und $-m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$ *Zentrifugalkraft* [30].
Die Corioliskraft macht sich vor allem bei großräumigen Wind- und Wasserbewegungen auf der Erde bemerkbar und beeinflußt z.B. die Richtung von Wirbeln. Die Zentrifugalkraft spüren wir auf einem schnell rotierenden Karussel. Ein außen ruhender Beobachter ßiehtßie dagegen nicht. Für ihn ist diese scheinbar wirkende Kraft nichts anderes als eine Manifestation der Newtonschen Gesetze.

9 Zweikörperproblem und Gravitation

Im folgenden wollen wir das Zweikörperproblem im Gravitationsfeld näher untersuchen. Wir stellen uns dabei vor, daß einer der Körper die Sonne ist, und der andere ein Planet.
In Kap. 6.2 haben wir das Zweikörperproblem schon in relativ allgemeiner Form untersucht. Wirken keine äußeren Kräfte, so gelten folgende Bewegungsgleichungen für die beiden Massen:

$$m_1\ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_{12}, \qquad\qquad m_2\ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_{21}$$

mit der Wechselwirkungskraft $\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} =: \underline{F}$.
Wir separieren wieder in Schwerpunkts- ($\underline{R} = \frac{1}{M}(m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2)$) und Relativbewegung ($\underline{r} := \underline{r}_1 - \underline{r}_2$):

$$\underline{r}_1 = \underline{R} + \frac{m_2}{M}\underline{r}, \qquad\qquad \underline{r}_2 = \underline{R} + \frac{m_1}{M}\underline{r}$$

mit der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$. Dann gilt (vgl. Kap. 6.2):

$$M\ddot{\underline{R}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\underline{R}} = \underline{V} = \text{const.},$$

wobei wir im folgenden annehmen, daß $\underline{V} = 0$ ist, und

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r})$$

[30] $\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$ wird auch als Zentripetalbeschleunigung und $m\,\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$ als Zentripetalkraft bezeichnet.

mit der reduzierten Masse $m = \frac{m_1 m_2}{M}$. Der zweite Körper bewegt sich also relativ zum ersten wie ein Teilchen der Masse m im Kraftfeld $\underline{F}$. Damit haben wir das Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem reduziert!
Wir betrachten nun speziell Zentralkräfte, insbesondere die Gravitationskraft

$$\underline{F}_{grav} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r},$$

d.h. $|\underline{F}_{grav}| \propto \frac{1}{r^2}$.
Für eine Zentralkraft gilt aber (vgl. Kap. 7.1) $\underline{N} = 0$ und somit für den Drehimpuls $\underline{L} = \text{const.}$ Wir nehmen nun o.B.d.A. an, daß der Drehimpuls in $z-$Richtung zeigt: $\underline{L} = (0,0,L)$. Da $\underline{L} = m\underline{r} \times \underline{v}$, d.h. $\underline{L} \perp \underline{r}, \underline{v}$ folgt, daß $\underline{r}$ und $\underline{v}$ immer in der $x-y-$Ebene liegen. Die gesamte Bewegung findet also nur in der $x-y$-Ebene statt!

Wir können also feststellen: Wechselwirken die beiden Massen über Zentralkräfte, so haben wir es mit einer ebenen Bewegung (senkrecht zum Drehimpuls) zu tun. Das Zweikörperproblem reduziert sich also auf eine zweidimensionales Problem!

Im folgenden wollen wir diese Bewegung auch quantitativ beschreiben. Zunächst erinnern wir uns darin, daß wir die Bewegung immer in einen tangentialen Anteil und einen radialen Anteil aufspalten können. Für die tangentiale Geschwindigkeit v_t gilt dann

$$v_t = \omega r \qquad \text{mit} \qquad \omega = \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}.$$

Aufgrund der Drehimpulserhaltung ist auch $\frac{L}{m}$ konstant und es folgt

$$\text{const.} = \frac{L}{m} = \frac{1}{m}|\underline{r} \times \underline{p}| = |\underline{r} \times \underline{v}| = rv_t = \omega r^2 = \dot{\phi} r^2,$$

wobei wir $|\underline{r} \times \underline{v}| = rv\sin\theta = rv_t$ benutzt haben, mit dem Winkel θ zwischen $\underline{r}$ und $\underline{v}$. Somit erhalten wir das wichtige Resultat

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}$$

bzw.

$$r^2 d\phi = \frac{L}{m}dt.$$

Hiermit können wir nun die Fläche berechnen, die der Ortsvektor[31] in der Zeit dt überstreicht (siehe Abb. 9.1). Für infinitesimale Zeiten dt kann die überstrichene Fläche df durch ein Dreieck mit den Seitenlängen r und $v_t dt$ approximiert werden:

$$df = \frac{1}{2}rv_t dt = \frac{1}{2}r^2 d\phi = \frac{L}{2m}dt,$$

[31] Den man in diesem Zusammenhang auch manchmal als *Fahrstrahl* bezeichnet.

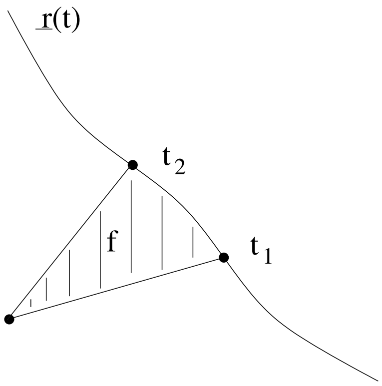


Abbildung 9.1: Die vom Ortsvektor in der Zeit von t_1 bis t_2 überstrichene Fläche.

wobei wir bereits das oben abgeleitete Ergebnis verwendet haben. Somit folgt für die pro Zeiteinheit überstrichene Fläche

$$\frac{df}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const.}$$

und nach Integration für die in der Zeit von t_1 bis t_2 überstrichene Fläche f

$$f = \int_{t_1}^{t_2} df = \frac{L}{2m} \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{L}{2m}(t_2 - t_1)$$

Diese Ergebnis fassen wir folgendermaßen im sog. *Flächensatz*, dem 2. Keplersches Gesetz, zusammen:

2. Keplersches Gesetz:
Der Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
Bem.: Diese Aussage, die man auch als *Flächensatz* bezeichnet, gilt allgemein für Zentralkräfte, nicht nur für die Gravitationskraft!

Im folgenden wollen wir die Newton-Gleichung $m\underline{\ddot{r}} = \underline{F}$ integrieren. Es handelt sich hier um drei[32] DGL 2. Ordnung. Wir benötigen also sechs Integrationskonstanten. Drei liefert die Drehimpulserhaltung, nämlich $\underline{L} = (0, 0, L)$. Der Energiesatz liefert eine weitere Konstante. Da die Gravitationskraft eine Zentralkraft ist, können wir leicht ein Potential $V(r)$ bestimmen:

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

mit

$$V(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} =: -\frac{\kappa}{r}.$$

[32] nämlich jeweils eine für die x-, y- und z-Komponente

Der Energiesatz lautet also:

$$E = \frac{m}{2}v^2 + V(r) = \text{const.}$$

Da $\frac{m}{2}v^2 \geq 0$ ist, muß $E \geq V(r)$ sein. Folgende Bewegungstypen sind möglich (siehe Abb. 9.2a):
1) $E < 0$: gebundene Bewegung
2) $E \geq 0$: ungebundene Bewegung

Wir hatten oben schon gesehen, daß es sich um eine ebene Bewegung handelt. Wir können daher in der Bewegungsebene die Koordinaten mittels ebener Polarkoordinaten beschreiben und die zugehörigen Geschwindigkeiten bestimmen:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi &\Rightarrow\quad& \dot{x} = \dot{r}\cos\phi - \dot{\phi}r\sin\phi, \\ y &= r\sin\phi &\Rightarrow\quad& \dot{y} = \dot{r}\sin\phi - \dot{\phi}r\cos\phi \end{aligned}$$

Mit $\underline{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$ folgt dann:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + r^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}$$

wobei wir wieder den Flächensatz benutzt haben, um $\dot{\phi}$ durch den Drehimpuls $\underline{L}$ auszudrücken. Damit läßt sich die Energie folgendermaßen schreiben:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

mit dem *effektiven Potential* (siehe Abb. 9.2b)

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\kappa}{r}$$

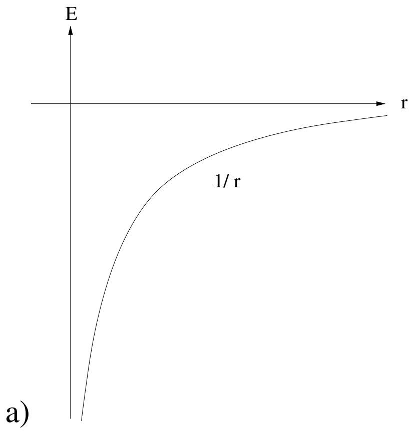
$\frac{L^2}{mr^2}$ bezeichnet man auch als *Zentrifugalpotential.*
Das effektive Potential wechselt bei $r_0 = \frac{L^2}{2m\kappa}$ das Vorzeichen. Im Gegensatz zu $V(r)$ besitzt das effektive Potential V_{eff} ein Minimum und zwar bei $r_1 = \frac{L^2}{m\kappa}$. Die zugehörige Energie ist $E_{\text{min}} = -\frac{m\kappa^2}{2L^2}$. Wir erwarten, daß in diesem Falle nur eine Kreisbahn möglich ist, da es nur einen Abstand gibt, bei dem dieser Energiewert angenommen wird (siehe Abb. 9.2). Das effektive Potential erlaubt also eine genauere qualitative Diskussion der möglichen Bahntypen als das Potential $V(r)$.

Der Energiesatz reduziert das Problem auf zwei voneinander unabhängige Integrationen. Es ist einfacher, statt $r = r(t)$ zunächst $r = r(\phi)$ zu bestimmen. Es gilt:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} =: r'\dot{\phi} = \frac{r'}{r^2}\frac{L}{m}$$

Die Energie schreibt sich dann

$$E = \frac{L}{2m}\frac{r'^2}{r^4} + V_{\text{eff}}(r)$$



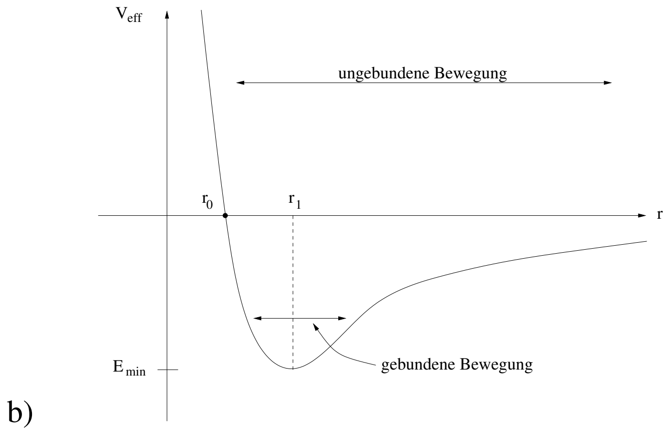


Abbildung 9.2: a) Das Gravitationspotential $V(r)$, b) das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$.

Es ist zweckmässig, eine neue Variable $u := \frac{1}{r}$ einzuführen. Deren Ableitung lautet dann $u' = -\frac{r'}{r^2}$ und wir erhalten für die Energie

$$E = \frac{L}{2m} u'^2 + V_{\text{eff}}(1/u)\,. \qquad (*)$$

Wir führen zwei Abkürzungen ein, deren physikalische Bedeutung wir später kennenlernen werden:

$$a := \frac{m\kappa}{L^2}, \qquad b := \frac{2mE}{L^2}.$$

Man sieht, daß immer $a > 0$ ist.
Mit $(*)$ folgt

$$b = u'^2 + \frac{2m}{L^2} V_{\text{eff}}(1/u) = u'^2 + u^2 - \frac{2m\kappa}{L^2} u = u'^2 + u^2 - 2au = u'^2 + (u-a)^2 - a^2$$

und somit

$$a^2 + b = u'^2 + (u-a)^2 \qquad (> 0) \qquad (**)$$

Bemerkung: Die Bedingung $a^2 + b \geq 0$ liefert im Prinzip eine Beziehung zwischen E und L.

Im folgenden betrachten wir zunächst den Spezialfall $a^2 + b = 0$. In diesem Fall ist

$$E = \frac{L^2 b}{2m} = -\frac{L^2 a^2}{2m} = -\frac{m\kappa^2}{2L^2} = E_{\text{min}}.$$

Mit $(**)$ folgt $u' = 0$ und somit $u = a = \text{const.}$ Damit ist also $r = \frac{1}{u} = \frac{1}{a} = \text{const.}$ und wir haben es mit einer Kreisbewegung mit Radius $r = \frac{1}{a} = \frac{L^2}{m\kappa}$ zu tun. Genauer gesagt ist diese Kreisbewegung sogar gleichförmig, denn

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m} a^2 = \frac{m\kappa^2}{L^3} =: \omega = \text{const.}$$

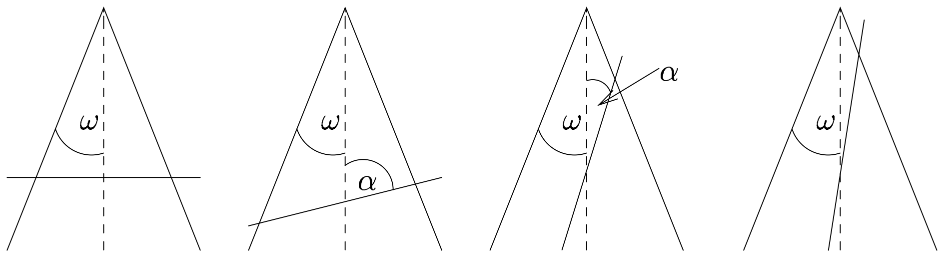


Abbildung 9.3: Die Kegelschnitte. Der Kreiskegel mit Öffnungswinkel ω ist in der Seitenansicht gezeigt.

Im allgemeinen Fall $a^2 + b \neq 0$ machen wir den Ansatz

$$u - a := \alpha \cos(\phi - \phi_0)$$

d.h. $u' = -\alpha \sin(\phi - \phi_0)$, mit zu bestimmenden Konstanten α und ϕ_0.
Da $(u-a)^2 + u'^2 = (\alpha \cos(\phi - \phi_0))^2 + (-\alpha \sin(\phi - \phi_0))^2 = \alpha^2 = a^2 + b \geq 0$, folgt

$$\alpha = \sqrt{a^2 + b}.$$

Man beachte, daß wir damit die allgemeine Lösung gefunden haben, da $(**)$ als DGL 1. Ordnung eine Integrationskonstante erfordert, und wir o.B.d.A. $\phi_0 = 0$ wählen können. Somit erhalten wir

$$u(\phi) = a + \alpha \cos \phi$$

bzw. (da $u = 1/r$)

$$r(\phi) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

mit $k = \frac{1}{a}$ und $\epsilon = \frac{\alpha}{a}$. Diese Gleichung beschreibt einen sog. Kegelschnitt in Polarkoordinaten (mit Brennpunkt $r = 0$).

Abb. 9.3 zeigt die Erzeugung der Kegelschnitte durch Schneiden eines (hohlen) Kreiskegels mit einer Ebene. Die Form der so erzeugten Schnittlinie hängt dabei vom Verhältnis des Öffnungswinkel ω des Kegels und des Schnittwinkels α ab. Ist $\alpha > \omega$, so erhält man eine Ellipse. Hierbei ist der Kreis als Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ enthalten. Ist $\alpha < \omega$, so erhält man eine Hyperbel. Der Grenzfall $\alpha = \omega$ entspricht der Parabel.

In Abb. 9.4 ist der typische Verlauf der Kegelschnitte in einem Koordinatensystem dargestellt, dessen Ursprung in einem der sog. Brennpunkte liegt. Der minimale Abstand, den die Bahnkurven vom Brennpunkt haben, ist gegeben durch

$$r_{\text{min}} = \frac{k}{1 + \epsilon} = \frac{1}{a + \alpha}.$$

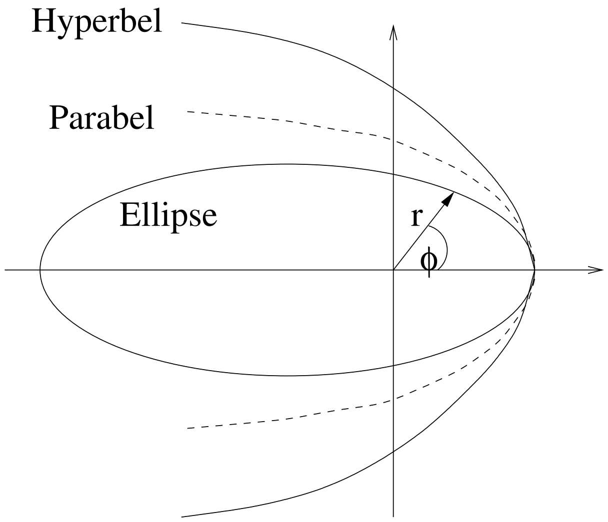


Abbildung 9.4: Die Kegelschnitte.

Der maximale Abstand r_{max} hängt nun davon ab, ob $\epsilon > 1$ oder $\epsilon \leq 1$ ist. Wir wollen diese Fälle im folgenden einzeln diskutieren.

1. Fall: $\epsilon > 1$
Dies entspricht dem Fall $\alpha > a$ und somit, da $\alpha = \sqrt{a^2 + b}$, $b > 0$. Da $b = \frac{2mE}{L^2}$ lautet die entsprechende physikalische Bedingung $E > 0$, d.h. wir haben es mit dem Fall positiver Energie zu tun. Wir hatten uns ja schon anhand des effektiven Potentials überlegt, daß wir in diesem Fall eine ungebundene Bewegung erwarten. Tatsächlich hat der Nenner der Bahnkurve eine Nullstelle $\phi_1 < \pi$ mit $1 + \epsilon \cos \phi_1 = 0$ und somit ist $r(\phi_1) = \infty$, d.h. die Bewegung ist tatsächlich ungebunden. Dies entspricht dem Fall der Hyperbel und beschreibt Kometen, die einmal ins Sonnensystem eintreten und dann nie wiederkehren.

2. Fall: $\epsilon = 1$
In diesem Fall ist $\alpha = a$ und somit $b = 0$ und deshalb auch $E = 0$. Wieder hat der Nenner der Bahnkurve eine Nullstelle, nämlich $\phi_1 = \pi$. Die zu $E = 0$ gehörige Bahnkurve ist also die Parabel.

3. Fall: $\epsilon < 1$
In diesem Fall ist $\alpha < a$, also $b < 0$ und deshalb auch $E < 0$. Der Nenner der Bahnkurve hat keine Nullstelle und somit ist $r(\phi)$ immer endlich:

$$r_{\text{min}} \leqq r \leqq r_{\text{max}} \qquad \text{mit} \qquad r_{\text{min}} = \frac{1}{a + \alpha}, \quad r_{\text{max}} = \frac{1}{a - \alpha}.$$

Den minimalen bzw. maximalen Abstand bezeichnet man auch als *Perihel* bzw. *Aphel*. Der Fall $\epsilon < 1$ entspricht der Ellipse, d.h. gebundene Bewegungen im Gravitationsfeld finden immer auf Ellipsenbahnen statt. Speziell für $\epsilon = 0$ erhält man Kreisbahnen. Der Fall der gebundenen Bewegung entspricht natürlich gerade der Bewegung von Planeten. Dies ist gerade die Aussage des 1. Keplerschen Gesetzes:

1. Keplersches Gesetz:
Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen mit der Sonne im Brennpunkt.

Genauer müßte man hier sagen, daß der Schwerpunkt des Systems Planet-Sonne mit dem Brennpunkt zusammenfällt. Da aber i.a. $m_{Sonne} \gg m_{Planet}$ folgt für die reduzierte Masse $m = \frac{m_s m_p}{m_s + m_P} \approx \frac{m_s m_p}{m_s} = m_P$, d.h. der Schwerpunkt liegt in sehr guter Näherung im Mittelpunkt der Sonne.

Typisch für die Bewegung im Gravitationsfeld (d.h. im Potential $V = -\frac{\kappa}{r}$) ist, daß alle gebundenen Bahnen auch geschlossen (d.h. periodisch) sind. Dies gilt ansonsten nur noch für das harmonische Potential $V(r) = kr^2$.

Wir kennen also jetzt die Bahnkurve $r = r(\phi)$. Wie sieht nun aber $r = r(t)$ aus? Dazu nutzen wir aus, daß gilt

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{mr^2(\phi)},$$

wobei wir im letzten Schritt im wesentlichen den Flächensatz (in quantitativer Form) ausgenutzt haben. Die obige Gleichung kann man mittels Trennung der Variablen integrieren. Man erhält zunächst $t = t(\phi)$

$$\int_{\phi_0}^{\phi} r^2(\phi) d\phi = \frac{L}{m}(t - t_0)$$

und hieraus durch Invertieren $\phi = \phi(t)$. Eingesetzt in die Bahnkurve $r(\phi)$ erhält man so $r = r(t)$.

Im folgenden wollen wir uns etwas genauer mit den Planetenbahnen beschäftigen. Abb. 9.5 zeigt eine Ellipse und die wichtigsten Größen zu ihrer Charakterisierung. Den maximalen bzw. minimalen Abstand von einem der Brennpunkte bezeichnet man mit $r_{\max}$ bzw. $r_{\min}$. Wir hatten sie schon früher durch die Parameter k und ϵ ausgedrückt:

$$r_{\min} = \frac{k}{1+\epsilon}, \qquad r_{\max} = \frac{k}{1-\epsilon}.$$

Weitere charakteristische Größen sind die große bzw. kleine Halbachse d bzw. f. Der Abstand der Brennpunkte ist $2e$, wobei man e als Exzentrizität bezeichnet[33]. Im folgenden sind einige

[33] Bei einem Kreis fallen die Brennpunkte zusammen und deshalb ist $e = 0$.

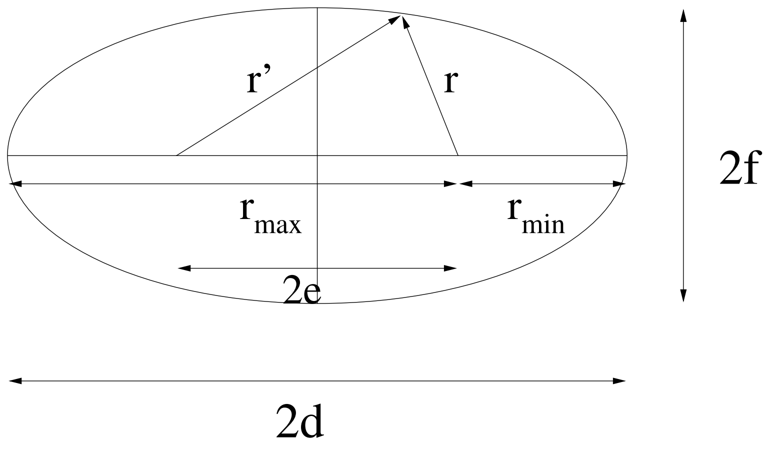


Abbildung 9.5: Die Ellipse und ihre wichtigen Kenngrößen.

wichtige Beziehungen zwischen diesen Größen zusammengestellt:

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}(r_{\text{min}} + r_{\text{max}}) = \frac{k}{1-\epsilon^2}, \\ e &= \frac{1}{2}(r_{\text{max}} - r_{\text{min}}) = \frac{k\epsilon}{1-\epsilon^2} = \epsilon d, \\ f &= \sqrt{d^2-e^2} = \frac{k}{\sqrt{1-\epsilon^2}}. \end{aligned}$$

Man beachte auch, daß man die kleine Halbachse auch durch r_{min} und r_{max} ausdrücken kann: $f^2 = d^2 - e^2 = (d-e)(d+e) = r_{\text{min}} r_{\text{max}}$.
Man kann die Ellipse auch als die Menge aller Punkte charakterisieren, für die die Summe der Abstände r und r' zu den Brennpunkten konstant ist: $r + r' = 2d$ (siehe Abb. 9.5). Dies bezeichnet man als “Gärtnerkonstruktion” [34].

Im folgenden nutzen wir den Zusammenhang $k = \frac{1}{a}$ und $\epsilon = \frac{\alpha}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b}}{a}$ zwischen den mathematischen Größen k und ϵ und den physikalischen Größen a und b (bzw. E und L), um die obigen Größen für die Ellipsenbahnen zu schreiben als

$$\begin{aligned} d &= \frac{a}{a^2-\alpha^2}, \\ e &= \frac{\alpha}{a^2-\alpha^2}, \\ f &= \frac{1}{\sqrt{a^2-\alpha^2}} = \sqrt{\frac{d}{a}}. \end{aligned}$$

[34] Man kann die Ellipse hiermit praktisch konstruieren, indem man zwei Pflöcke in den Boden schlägt (= Brennpunkte) und zwischen diesen ein Seil der Länge $2d$ spannt. Die Menge aller dann erreichbaren Punkte (ohne das Seil zu zerreissen) bilden die Ellipse.

Im folgenden wollen wir einen Zusammenhang zwischen der Zeit T, die der Planet für einen Umlauf benötigt (der sog. Umlaufzeit), und den Bahnparametern herstellen. Nach dem Flächensatz überstreicht der Bahnvektor in einem Umlauf gerade die gesamte Fläche $F_{Ellipse} = \pi f d$ der Ellipse. Andererseits hatten wir oben abgeleitet

$$F_{Ellipse} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\phi)d\phi = \frac{L}{2m}T.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{L^2T^2}{4m^2} = \pi^2 d^2 f^2 = \pi^2 d^2 \frac{d}{a} = \pi^2 d^3 \frac{L^2}{m\kappa},$$

und somit

$$\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_s + m_p)} \underset{m_s \gg m_e}{\approx} \frac{4\pi^2}{Gm_s}.$$

Wichtig hierbei ist, daß die Konstante $\frac{4\pi^2}{Gm_s}$ eine universelle Größe ist. Sie ist für alle Planeten gleich, da sie nur die Masse m_s der Sonne und Naturkonstanten enthält. Dies ist gerade die Aussage des 3. Keplerschen Gesetzes:

3. Keplersches Gesetz:
Das Verhältnis des Quadrats der Umlaufzeit T und des Kubus der großen Halbachse d ist für alle Planetenbahnen gleich:

$$\frac{T^2}{d^3} = \text{konst.}$$

Abschließend fassen wir noch einmal die drei Keplerschen Gesetze in Kurzform zusammen:

1. Planetenbahnen = Ellipsen (mit Sonne im Brennpunkt)

2. Flächensatz: Radiusvektor überstreicht in gleicher Zeit gleiche Fläche

3. $\frac{T^2}{d^3}$ ist für alle Planeten gleich.

Dabei sollte man immer im Hinterkopf behalten, daß der Flächensatz für beliebige Zentralkräfte gilt.