Andreas Schadschneider

Physik II

Version: 21. Juli 2005

Sommersemester 2005

Vorbemerkungen

Das vorliegende Skript zum theoretischen Teil der Vorlesung *Physik II* ersetzt nicht den regelmässigen Besuch der Vorlesungen. Es ist als Ergänzung gedacht, zum Nacharbeiten oder zur Vorbereitung auf Klausuren und Prüfungen. Deshalb sollten alle Formeln und Aussagen immer kritisch betrachtet werden, es könnten noch Druckfehler enthalten sein!
Wesentlicher Bestandteil der Vorlesung *Physik II* sind die Übungen. Gerade in den ersten Semestern ist es unbedingt erforderlich, den Stoff durch eigenständiges Bearbeiten von Übungsaufgaben zu vertiefen.
Die Vorlesung soll einen Einblick in die Arbeitsweise der theoretischen Physik geben. Ihr Aufbau orientiert sich dabei an physikalischen Fragestellungen. Wenn dies zur Beschreibung der Phänomene notwendig ist, wird in den entsprechenden Abschnitten zunächst eine Einführung in die notwendigen mathematischen Techniken gegeben.

Für Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar. Sie können auch per email an mich (`as@thp.uni-koeln.de`) geschickt werden. Die jeweils aktuellste Version des Skripts ist im Internet über meine Homepage

`http://www.thp.uni-koeln.de/~as/as.html`

verfügbar.

Andreas Schadschneider

Literaturempfehlungen

Im folgenden finden Sie eine kommentierte Auswahl der populärsten Lehrbücher. Die Vorlesung orientiert sich nicht speziell an einem Buch. Ich empfehle Ihnen deshalb, sich vor einem eventuellen Kauf zunächst die einzelnen Werke gründlich anzusehen. Die meisten sind in der Studentenbibliothek vorhanden.

- S. Großmann: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (Teubner-Verlag)

  Sehr empfehlenswerte, preiswerte Einführung in die wichtigsten mathematischen Techniken, von einem Physiker für Physiker geschrieben. Kann während des gesamten Studiums verwendet werden, insbesondere als Nachschlagewerk.

- R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynman Vorlesungen über Physik* (Oldenbourg)

  Ein eher ungewöhnliches Lehrbuch! Sehr empfehlenswert als Ergänzung zur Vorlesung, um einen alternativen Zugang kennenzulernen, insbesondere in der zweisprachigen (deutsch-englisch) Ausgabe.

- W. Nolting: *Grundkurs: Theoretische Physik, Band 3: Elektrodynamik* (Verlag Zimmermann-Neufang)

  Sehr gut strukturiertes Lehrbuch mit einer guten Einführung auch in die mathematischen Techniken. Enthält zahlreiche Aufgaben und Kontrollfragen.

- C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, A.C. Helmholz, B.J. Moyer: *Berkeley Physik Kurs 2: Elektrizität und Magnetismus* (Vieweg)

  Sehr übersichtliches Buch, das den Stoff der Vorlesung weitgehend abdeckt. Die Themen werden ausführlich und auf relativ einfachem Niveau diskutiert.

- W. Greiner: *Theoretische Physik, Band 3: Klassische Elektrodynamik* (Harri Deutsch)

  Der dritte Band einer sehr populären Reihe, enthält zahlreiche Aufgaben mit Lösungen!

Die hier vorgestellten Bücher gehören i.a. zu Lehrbuchreihen, die ich bereits als Begleitmaterial zur Vorlesung *Physik I* empfohlen habe. Wenn Sie sich bereits für eine Reihe entschieden haben und gut damit zurechtkommen, dann empfehle ich Ihnen auch den Elektrodynamik-Band dieser Reihe, da dieser i.a. auf dem Mechanik-Teil aufbaut.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Rückblick

Im Mittelpunkt der Vorlesung *Physik II* steht die *Elektrodynamik*. Sie umfaßt die Untersuchung und Beschreibung von *Elektrizität* und *Magnetismus*. Wir werden später sehen, daß diese beiden Phänomene eng miteinander verknüpft sind. Tatsächlich ist die Elektrodynamik so etwas wie die erste "vereinheitlichte Feldtheorie" in der Physik. Heutzutage versucht man sie mit den anderen drei bekannten elementaren Kräften zusammenzuführen, auf die wir weiter unten noch zu sprechen kommen.
In der Vorlesung *Physik I* haben wir uns mit der *Mechanik* beschäftigt. Deren Grundlage ist das *Newtonsche Gesetz*

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r}, t).$$

Untersuchungen in der Mechanik können zwei verschiedene Ziele haben:

1. Die Bestimmung der möglichen *Kinematik* unter dem Einfluß von *vorgegebenen* Kräften $\underline{F}(\underline{r}, t)$.
2. Die Bestimmung der in der Natur existierenden Kräfte und deren Beschreibung.

Im 1. Fall nimmt man also die rechte Seite der Newtonschen Gleichung als gegeben an und versucht, hiermit die Bewegungsgleichung zu lösen. Im 2. Fall hat man es gerade mit dem umgekehrten Problem zu tun. Man beobachtet die Bewegung (Bahnkurve) eines Körpers unter dem Einfluß einer (unbekannten) Kraft und versucht hieraus das Kraftgesetz zu bestimmen.
In allen Fällen spielen also *Kräfte* und *Kraftfelder* eine entscheidende Rolle. Als wichtiges Beispiel hatten wir die Gravitationskraft kennengelernt, die z.B. für die Planetenbewegung verantwortlich ist. Aus dem Alltag sind uns außerdem elektrische und magnetische Kräfte geläufig. Deren Gesetzmäßigkeiten wollen wir in dieser Vorlesung untersuchen.

Die Physik kennt heutzutage vier verschiedene *elementare Kräfte*, die in der folgenden Tabelle mit ihren wesentlichen Eigenschaften zusammengestellt sind.

Kraft	Stärke	Reichweite	Auftreten
Gravitation	sehr schwach	unendlich	Planetenbewegung, Kosmologie
Elektromagnetismus	mittel	unendlich	Aufbau der Atome, Festkörper,...
schwache Wechselwirkung	schwach	kurz	in Atomkernen (Radioaktivität)
starke Wechselwirkung	stark	kurz	in Atomkernen (Quarks etc.)

Zum Vergleich sei angemerkt, daß der typische Radius eines Atomkerns etwa $10^{-14}\ m$ beträgt. Die Reichweite der schwachen bzw. starken Wechselwirkung sind dagegen etwa $10^{-17}\ m$ bzw. $10^{-15}\ m$.

In der Vorlesung Physik I haben wir uns ausführlich mit der Gravitation und ihrer Beschreibung beschäftigt. Die andere Kraft, die uns aus dem alltäglichen Leben vertraut ist, die *elektromagnetische Wechselwirkung*, steht im Mittelpunkt dieser Vorlesung. Viele der Kräfte, die wir in Physik

I kennengelernt haben, sind nicht elementar, sondern lassen sich auf den Elektromagnetismus zurückführen. Dazu zählen z.B. die Reibungskräfte.

Den Grund, warum uns gerade diese beiden Kräfte so geläufig sind, entnimmt man der Tabelle. Es sind die Kräfte mit einer unendlichen Reichweite. Die Reichweiten der schwachen und starken Wechselwirkung sind so kurz, daß sie sich nur im Atomkern bemerkbar machen. Etwas überraschend ist vielleicht die Tatsache, daß die Gravitation - im Vergleich zu den anderen Kräften - sehr schwach ist. Daß wir sie dennoch am deutlichsten spüren, hat zum einen etwas mit der Reichweite zu tun. Daß man sie auch deutlicher spürt als den Elektromagnetismus hängt damit zusammen, daß die elektromagnetische Wechselwirkung mit geladenen Körpern verbunden ist. Makroskopische Körper haben aber eine starke Tendenz zur Ladungsneutralität.

Die gravitative Wechselwirkung zweier Massen ist immer attraktiv. Im Gegensatz dazu kann die elektromagnetische Wechselwirkung attraktiv oder repulsiv sein, da es zwei Arten von Ladungen (positiv, negativ) gibt. Dies ist ein wichtiger Faktor, da es so z.B. zu Abschirmungseffekten kommen kann. Eine positive Ladung zieht negative Ladungen an, die sie dann umgeben und so nach außen hin abschirmen.

Die starke und schwache Wechselwirkung sind nur in der mikroskopischen Welt von Bedeutung[1]. Sie erfordern daher notwendigerweise eine quantenmechanische Beschreibung. Gravitation und Magnetismus dagegen können in ihren makroskopischen Auswirkungen sehr gut durch klassische Theorien (d.h. ohne Quanteneffekte) beschrieben werden. Tatsächlich gibt es für die Gravitation noch gar keine allgemein akzeptierte quantenmechanische Theorie. Die quantenmechanische Version der Elektrodynamik ist die sog. *Quantenelektrodynamik (QED)*. Dies ist die "erfolgreichste" physikalische Theorie was die Übereinstimmung von theoretischen Vorhersagen und Experimenten betrifft.

1.1 Vektoranalyis

Wie in der Mechanik spielt auch in der Elektrodynamik die Vektoranalysis eine wichtige Rolle bei der Beschreibung der Phänomene. Wir wollen daher im folgenden noch einmal kurz die wichtigsten Begriffe und Aussagen wiederholen[2].

1.1.1 Vektoren und deren Multiplikation

Vektoren sind gerichtete Größen. Formal sind sie als Elemente eines Vektorraumes definiert. Damit hat man zwei Verknüpfungen, nämlich die Addition zweier Vektoren und die Multiplikation mit einem Skalar (in unserem Fall wird dies i.a. eine reelle Zahl sein).
Neben der Multiplikation mit einem Skalar haben wir weitere Arten der Multiplikation kennengelernt, bei denen zwei Vektoren miteinander verknüpft werden:

[1] Obwohl wir natürlich einige ihrer Auswirkungen spüren, z.B. die Radioaktivität.

[2] Details finden Sie in meinem Skript zur Vorlesung *Physik I*.

Definition 1.1 (Multiplikation von Vektoren).
Für zwei Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$ kann man folgende Multiplikationen definieren:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad \text{(Skalarprodukt)}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Kreuzprodukt)}$$

Das Skalarprodukt läßt sich in offensichtlicher Weise auf Räume $\mathbb{R}^n$ beliebiger Dimension n verallgemeinern. Das Kreuzprodukt ist nur für $n = 3$ definiert.

1.1.2 Skalar- und Vektorfelder

Abbildungen $f(\underline{r}) = f(x, y, z)$, die jedem Raumpunkt $\underline{r} = (x, y, z)$ einen Skalar (reelle Zahl) $f(x, y, z)$ zuordnen, bezeichnet man als *Skalarfeld*. Beispiele hierfür haben wir bereits kennengelernt, z.B. das *Potential*.
Abbildungen $\underline{F}(\underline{r}) = \underline{F}(x, y, z)$, die jedem Raumpunkt $\underline{r} = (x, y, z)$ einen Vektor $\underline{F}(x, y, z)$ zuordnen, werden als *Vektorfelder* bezeichnet. Ein wichtiges Beispiel sind natürlich *Kraftfelder*.

1.1.3 Differentialoperationen

Im folgenden fassen wir noch einmal kurz die Definitionen der drei wesentlichen Differentialoperationen zusammen, die für Skalar- bzw. Vektorfelder definiert werden können.

Definition 1.2 (Gradient).
Der *Gradient* eines skalaren Feldes $f(x, y, z)$ ist definiert als

$$\text{grad} f := \underline{\nabla} f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix},$$

wobei der Nabla-Operator $\underline{\nabla}$ definiert ist durch

$$\underline{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Der Gradient eines Skalarfeldes ist also ein Vektorfeld.

Ein wichtiges Beispiel für das Auftreten des Gradienten hatten wir bereits kennengelernt. Ein konservatives Kraftfeld $\underline{F}$ läßt sich nämlich darstellen als

$$\underline{F} = -\text{grad}\, V(\underline{r}) = -\nabla V$$

mit dem *Potential* $V(\underline{r})$.

Definition 1.3 (Rotation)**.**
In 3 Dimensionen können wir die Rotation eines Vektorfeldes $\underline{F}(\underline{r})$ durch

$$\text{rot}\,\underline{F} = \underline{\nabla} \times \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

definieren. Formal ergibt sie sich also aus dem Kreuzprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld. Die Rotation eines Vektorfeldes ist also wieder ein Vektorfeld.

Eine wichtige Anwendung der Rotation liefert ein Kriterium für die Existenz eines Potentials:

$$\underline{F} = -\text{grad}\,V(\underline{r}) \Longleftrightarrow \text{rot}\,\underline{F} = 0.$$

Dabei ist zu beachten, daß dieses Kriterium nur dann gilt, wenn der Definitionsbereich von $\underline{F}$ einfach-zusammenhängend ist.
Schließlich gibt es noch eine dritte Operation, die aber bisher in der Mechanik keine große Rolle gespielt hat.

Definition 1.4 (Divergenz)**.**
Die Divergenz eines Vektorfeldes $\underline{F}(\underline{r})$ ist definiert als

$$\text{div}\,\underline{F} := \underline{\nabla} \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x}(\underline{r}) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(\underline{r}) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(\underline{r}).$$

Man erhält also div $\underline{F}$ indem man formal das Skalarprodukt des Nabla-Vektors mit dem Vektorfeld bildet! Die Divergenz eines Vektorfeldes ist also ein Skalarfeld.

Die Divergenz wird uns in der Elektrodynamik noch ausführlich beschäftigen.

Wir werden später auf die Vektoroperationen zurückkommen. Insbesondere werden wir uns dann auch mit ihrer anschaulichen Bedeutung vertraut machen.

2 Elektrische Ladung und elektrische Kräfte

Wir gehen von drei empirisch abgesicherten Grundtatsachen aus, die wir in den folgenden Abschnitten kurz diskutieren werden.

2.1 Atomistische (Teilchen-)Struktur der Materie

Die uns umgebene Materie setzt sich aus elementaren Teilchen (Elektronen, Protonen etc.) zusammen. Das impliziert die Existenz von kleinsten Ladungen, den sogenannten *Elementarladungen*. Die Elementarladung e ist definiert als Betrag der Ladung eines Elektrons (negative Ladung

$-e$) bzw. Protons (positive Ladung $+e$)[3]:

$$e = \pm 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb.}$$

Sie wissen sicher, daß die sog. Quarks, aus denen z.B. Protonen und Neutronen aufgebaut sind, Ladungen $\pm\frac{1}{3}$ bzw. $\pm\frac{2}{3}$ haben. Da man Quarks aber nicht frei beobachten kann, sind bisher auch keine Bruchteile der Elementarladung e gemessen worden.

Es gibt also eine kleinste Ladung e. Diese ist jedoch so klein, daß man für makroskopische Zwecke annehmen kann, daß die Ladung q jeden Wert annehmen kann, nicht nur Werte $q = ne$ mit $n \in \mathbb{N}$.
Wir führen daher die *Ladungsdichte* $\rho(\underline{r})$ analog zur Massendichte ein durch den Grenzwert

$$\rho(\underline{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

wobei Δq die Gesamtladung im Volumenelement $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ um $\underline{r} = (x, y, z)$ ist.

Sehr wichtig ist der folgende Erhaltungssatz:

$$\boxed{\textit{Elektrische Ladungen sind erhalten.}}$$

Genauer gesagt, betrifft diese Aussage die Summe der elektrischen Ladungen vor und nach einem Wechselwirkungsprozeß. Insbesondere kann man effektiv keine elektrischen Ladungen erzeugen. Immer wenn eine positive Ladung neu erzeugt wird, muß gleichzeitig eine gleich große negative Ladung entstehen.

2.2 Coulombkraft zwischen zwei Punktladungen

Wir betrachten zwei Punktladungen[4] q_1 und q_2. Zwischen diesen Teilchen wirkt dann die *Coulombkraft*

$$\boxed{\underline{F}_{1\to 2} = \alpha \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^2} \cdot \frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|}.}$$

$\frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|}$ ist dabei der Einheitsvektor von $\underline{r}_1$ nach $\underline{r}_2$ (siehe Abb. 2.1). Die Konstante α hängt vom gewählten Einheitensystem ab. Wir werden sie gleich genauer diskutieren.
Der Betrag der Coulombkraft zweier Punktladungen im Abstand $r = |\underline{r}_2 - \underline{r}_1|$ ist also

$$F_{12} = |\underline{F}_{1\to 2}| = \alpha \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

[3] Manchmal wird die Elementarladung e aber auch als die Ladung des Elektrons definiert. Dann hat das Proton die Ladung $-e$.

[4] d.h. idealisierte Ladungen ohne räumliche Ausdehnung, analog zu den Punktmassen aus Physik I.

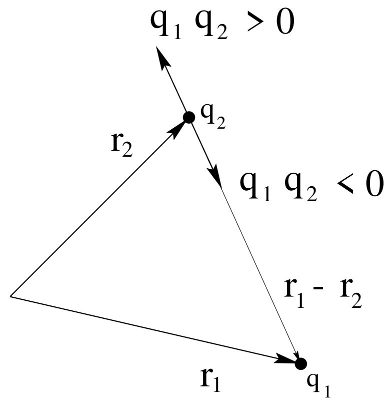

Abbildung 2.1: Coulombkraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2.

wie bei der Gravitationskraft. Der wesentliche Unterschied ist aber, daß die Coulombwechselwirkung sowohl attraktiv (für $q_1 q_2 < 0$, d.h. für Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen) als auch repulsiv (für $q_1 q_2 > 0$, d.h. für gleichnamige Ladungen) sein kann (siehe Abb. 2.1).
Wie schon erwähnt hängt der Koeffizient α hängt vom gewählten Einheitensystem ab. Im SI-System gibt es für Ladungen eine eigene Einheit, das *Coulomb (C)*. In diesem Fall ist

$$\alpha_{SI} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \qquad \text{mit} \qquad \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\, \frac{C^2}{Nm^2}.$$

Im cgs-System gibt es dagegen keine eigene Einheit für Ladungen. Man setzt daher

$$\alpha_{cgs} = 1$$

und definiert die Ladungseinheit über das Coulombgesetz ($q_1 q_2 = F_{12} r^2$). Als Einheit ergibt sich dann $\frac{g^{1/2} cm^{3/2}}{s}$.
Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir die von der Theorie bevorzugte cgs-Variante mit $\alpha = 1$ wählen! Es sei schon jetzt darauf hingewiesen, daß sich viele der Gleichungen, die uns begegnen werden, von denen im SI-System um den Faktor α_{SI} unterscheiden[5].

Wir betrachten nun die Ladung q bei $\underline{r} = 0$ und eine zweite Ladung q' bei $\underline{r}$. Auf q' wirkt dann die Kraft

$$\underline{F} = \frac{qq'}{r^2}\hat{r}.$$

Man sagt auch: Die Ladung q' spürt ein Feld, das von q erzeugt wird. Zur Charakterisierung dieses (Kraft-)Feldes ist offensichtlich die Größe q' der Testladung unerheblich. Man setzt daher $q' = 1$.

[5] In der Mechanik gab es aber keine Unterschiede zwischen den Gleichungen im cgs- und SI-System!

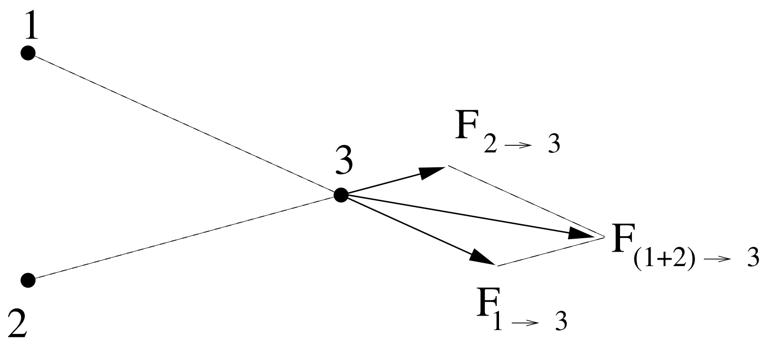

Abbildung 2.2: Superposition von Kräften.

Definition 2.1 (Elektrisches Feld)**.**
Eine Punktladung q am Ursprung $\underline{r} = 0$ erzeugt am Ort $\underline{r}$ das elektrische Feld

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{r^2}\hat{r} = \frac{q}{r^3}\underline{r}.$$

Eine Testladung q' am Ort $\underline{r}$ spürt daher die Coulombkraft

$$\underline{F} = q'\underline{E}.$$

Man sagt, daß die Ladung q ein elektrisches Feld $\underline{E} = (E_x, E_y, E_z)$ erzeugt (mit $E_j = E_j(x, y, z)$). Es gibt die Kraft an, die auf eine Testladung der Größe 1 ausgeübt wird. $\underline{E}$ ist ein Vektorfeld.

2.3 Superposition der Kräfte

Bisher haben wir nun die Kräfte zwischen zwei Ladungen betrachtet. I.a. werden aber mehr als zwei Ladungen vorhanden sein. In diesem Fall ist die Gesamtkraft auf eine Ladung die Vektorsumme aller Einzelkräfte, die auf die Ladung wirken.
Haben wir es z.B. mit drei Ladungen q_1, q_2 und q_3 zu tun (Abb. 2.2), so gilt

$$\underline{F}_{(1+2)\to 3} = \underline{F}_{1\to 3} + \underline{F}_{2\to 3}.$$

3 Potentielle Energie und Potential

Aus der *Physik I* wissen wir, daß

$$\underline{F} = \frac{\alpha}{r^2}\hat{r} = \frac{\alpha}{r^3}\underline{r}$$

als Zentralkraft konservativ ist. Es existiert daher ein Potential (potentielle Energie) $V(r)$ mit $\underline{F} = -\text{grad}\, V$, nämlich

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}.$$

Das dies wirklich das Potential ist, prüft man leicht nach. Für Funktionen $f(r)$, die nur von $r = |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängen, gilt nämlich allgemein

$$\text{grad } f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \text{grad } r = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \hat{r}$$

da grad $r = \hat{r}$ ist.

Für die Coulombwechselwirkung ist $\alpha = qq'$, wobei q' eine Probeladung sei. Wir setzen nun $V(r) = q'\varphi(r)$ mit dem *(elektrischen) Potential einer Punktladung q*

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}.$$

$\varphi(r)$ ist ein Skalarfeld, aus dem man das elektrische Feld durch

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi$$

erhält.

Wie in der Mechanik definieren wir *Äquipotentialflächen* durch $\varphi(\underline{r}) = const$. Dies ist also gerade die Fläche im $\mathbb{R}^3$, auf der alle Punkte den gleichen Potentialwert annehmen. Im Falle einer Punktladung ist $\varphi = \frac{q}{r}$ und die Äquipotentialflächen sind Kugelschalen.

Allgemein gilt, daß das elektrische Feld $\underline{E}(\underline{r})$ senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht. Dies gilt sogar allgemein für den Gradienten eines Skalarfeldes $\varphi(\underline{r})$. Um dies einzusehen, betrachten wir zuerst die Taylor-Entwicklung des Feldes:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{r} + \underline{h}) &= \varphi(x + h_x, y + h_y, z + h_z) = \varphi(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} h_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} h_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} h_z + O(h^2) \\ &= \varphi(\underline{r}) + \underline{h} \cdot \nabla\varphi + O(h^2). \end{aligned}$$

Betrachtet man nun Nachbarpunkte $\underline{r}$ und $\underline{r} + \underline{h}$ gleichen Potentials, d.h. $\varphi(\underline{r}) = \varphi(\underline{r} + \underline{h})$, so folgt

$$\underline{h} \cdot \nabla\varphi = 0 \qquad \text{d.h.} \qquad \nabla\varphi \perp \underline{h}.$$

Da der Vektor $\underline{h}$ in der Äquipotentialfläche liegt, so erhält man die obige Behauptung.

Ein allgemeines Feld, das durch viele Ladungen erzeugt wird, erhalten wir durch Superposition. Wir betrachten Ladungen $q_1, q_2, \ldots$ an den Orten $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots$. Diese erzeugen am Ort $\underline{r}$ das elektrische Feld

$$\underline{E}(\underline{r}) = \sum_j \frac{q_j}{|\underline{r} - \underline{r}_j|^3} \left(\underline{r} - \underline{r}_j\right)$$

mit dem zugehörigen Potential

$$\varphi(\underline{r}) = \sum_j \frac{q_j}{|\underline{r} - \underline{r}_j|}.$$

Auf ein Teilchen der Ladung q' am Ort $\underline{r}$ wirkt dann die Gesamtkraft

$$\underline{F}(\underline{r}) = q'\underline{E}(\underline{r}).$$

Wir wollen jetzt zu Ladungsdichten übergehen. Dazu betrachten wir Ladungen q_j, die sehr dicht liegen, so daß man sie sehr gut durch eine kontinuierliche Ladungsverteilung approximieren kann. Die Ladung in einem Volumenelement $\Delta V' = \Delta x'\Delta y'\Delta z'$ um den Punkt $\underline{r}'$ herum sei $\Delta q' = \rho(\underline{r}')\Delta V'$. Dann haben wir

$$\varphi(\underline{r}) = \sum_j \frac{q_j}{|\underline{r} - \underline{r}_j|} = \sum_{\underline{r}'} \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\Delta V' \to \int_V \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV'.$$

Dabei ist das infinitesimale Volumenelement dV' in kartesischen Koordinaten durch $dV' = dx'dy'dz'$ gegeben. Häufig schreibt man statt dV' auch d^3r'. Das Volumenintegral erstreckt sich über den ganzen Raum V, im dem die Ladungen verteilt sind.
Entsprechend gilt für das elektrische Feld wegen $\underline{E} = -\nabla\varphi$:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int_V \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}')\, dV'.$$

Wir wollen nun die Energieverhältnisse in der Elektrostatik betrachten. Ein Teilchen der Masse m und Ladung q im elektrischen Feld hat die Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2}v^2 + U$$

mit der *potentiellen Energie*

$$U = q\varphi.$$

Wie in der Mechanik ist vor allem der Potentialunterschied

$$U(A) - U(B) = q(\varphi(A) - \varphi(B))$$

wichtig. Die *Potentialdifferenz* $\varphi(A) - \varphi(B)$ bezeichnet man auch als *Spannung*.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Aufgabe der *Elektrostatik* vor allem darin besteht, das Potential

$$\boxed{\varphi(\underline{r}) = \int_V \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV'}$$

zu berechnen, das von einer vorgegebenen Ladungsverteilung $\rho(\underline{r}')$ am Ort $\underline{r}$ erzeugt wird. Hieraus bestimmt man dann über $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\varphi(\underline{r})$ das elektrische Feld. Dies ist i.a. einfacher als die direkte Berechung des Feldes über

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \int_V \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}')\, dV'.}$$

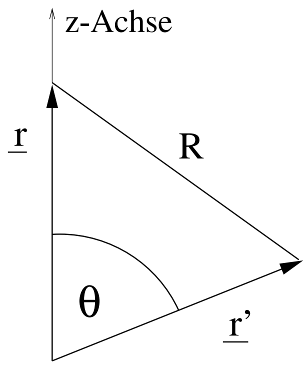

Abbildung 3.1: Wahl des Koordinatensystems bei der Integration von kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen.

3.1 Potential einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

Wir betrachten nun ein kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\underline{r}) = \rho(r)$, bei der die Ladungsdichte nur vom Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vom Ursprung abhängt. Es ist daher zweckmässig, von den kartesischen Koordinaten (x, y, z) zu Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) überzugehen. Zur Erinnerung:

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& r\sin\theta\cos\phi \\ y &=& r\sin\theta\sin\phi \\ z &=& r\cos\theta \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcl} r &=& \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\underline{r}| \\ \tan\phi &=& \frac{y}{x} \\ \tan\theta &=& \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{array}\right.$$

$\theta \in [0, \pi]$ ist der Winkel zwischen dem Vektor $\underline{r}$ und der $z-$Achse und $\phi \in [0, 2\pi]$ der Winkel, der von der Projektion $\underline{\tilde{r}} = (x, y, 0)$ von $\underline{r}$ in die $x - y$-Ebene und der $x-$Achse eingeschlossen wird. Für das Volumenelement ergibt sich daher $dV' = d^3r' = r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi$.

Wir wählen das Koordinatensystem so, daß der Vektor $\underline{r}$ in Richtung der $z-$Achse zeigt. θ ist dann der Winkel zwischen $\underline{r}$ und $\underline{r}'$ (siehe Abb. 3.1). Für diese Wahl des Koordinatensystems gilt dann:

$$R := |\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{(\underline{r} - \underline{r}') \cdot (\underline{r} - \underline{r}')} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\underline{r} \cdot \underline{r}'} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}.$$

Somit erhält man für das Potential

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \varphi(\underline{r}) = \int_V \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} dV' = \int_V \frac{\rho(r')r'^2 \sin\theta}{|\underline{r}-\underline{r}'|} dr' d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr' \ \rho(r')r'^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}} d\theta \\
&= 2\pi \int_0^\infty dr' \ \rho(r')r'^2 \frac{1}{rr'} \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
&= 2\pi \int_0^\infty dr' \ \rho(r')r'^2 \frac{1}{rr'} \left(\sqrt{r^2+r'^2+2rr'} - \sqrt{r^2+r'^2-2rr'}\right) \\
&= 2\pi \int_0^\infty dr' \ \rho(r')r'^2 \frac{1}{rr'} \left(r+r'-|r-r'|\right) \\
&= 4\pi \left(\frac{1}{r}\int_0^r r'^2 \rho(r')dr' + \int_r^\infty r'\rho(r')dr'\right)
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile ausgenutzt haben, daß $r + r' - |r - r'| = 2r'$ für $r > r'$ und $r + r' - |r - r'| = 2r$, für $r < r'$.

Sei $Q(r)$ die Gesamtladung innerhalb einer Kugel vom Radius r, d.h.

$$Q(r) = \int_{r'<r} \rho(r')d^3 = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r')dr'. \qquad (*)$$

Dann kann man das Potential einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung darstellen als

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{Q(r)}{r} + 4\pi \int_r^\infty r'\rho(r')dr'.}$$

Hieraus läßt sich das elektrische Feld leicht bestimmen.

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = -\frac{Q(r)}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{dQ(r)}{dr} - 4\pi r\rho(r) = -\frac{Q(r)}{r^2} + 4\pi r\rho(r) - 4\pi r\rho(r) = -\frac{Q(r)}{r^2},$$

wobei wir im 2. Schritt Gleichung $(*)$ benutzt haben. Insgesamt erhalten wir also für das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung:

$$\boxed{\underline{E}(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr}\hat{r} = \frac{Q(r)}{r^2}\hat{r}.}$$

Wir können also folgendes feststellen: Auf eine Testladung am Ort $\underline{r}$ wirkt eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung genauso wie ein Ladung Q im Koordinatenursprung. Dabei ist $Q = Q(r)$ die Ladung innerhalb der Kugel mit dem Radius $r = |\underline{r}|$.
Die Ladungsdichte außerhalb der Kugel mit dem Radius r erzeugt kein elektrisches Feld auf ein

Teilchen am Ort $\underline{r}$. Die Ladung innerhalb der Kugel wirkt so, als ob sie im Zentrum konzentriert sei!

Beispiel 3.1. Hohlkugel
Speziell betrachten wir zunächst den Fall $\rho(r) = 0$ für $0 \leq r \leq R$, d.h. eine Hohlkugel vom Radius R. Für alle Punkte $\underline{r}$ im Hohlraum gilt dann

$$\underline{E}(r) = 0 \qquad\qquad \text{im Inneren } (r \leq R) \text{ der Kugel.}$$

Beispiel 3.2.
Als nächsten untersuchen wir den Fall einer *homogenen Ladungsdichte*

$$\rho(r') = \begin{cases} \rho & \text{falls } r' \leq R \\ 0 & \text{falls } r' > R. \end{cases}$$

Hierfür ergibt aus den obigen Ergebnisse für das Potential

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{4\pi\rho}{r} \int_0^r r'^2 dr' + 4\pi\rho \int_r^R r' dr' = 2\pi\rho \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2\right) & (r \leq R), \\ \frac{4\pi\rho}{r} \int_0^R r'^2 dr' = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 \frac{1}{r} & (r > R), \end{cases}$$

bzw. mit der Gesamtladung $Q = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{3}{2}Q \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{3}\frac{r^2}{R^3}\right) & (r \leq R), \\ \frac{Q}{r} & (r > R). \end{cases}$$

Wir sehen, daß $\varphi(r)$ stetig bei $r = R$ ist und im Ursprung den Wert $\varphi_0 = \varphi(r = 0) = \frac{3Q}{2R} = \frac{3}{2}\varphi(R)$ annimmt (siehe Abb. 3.2). Für das elektrische Feld (bzw. dessen Betrag) ergibt sich

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr} = \begin{cases} \frac{Q}{R^3}r & (r' \leq R), \\ \frac{Q}{r^2} & (r' > R). \end{cases}$$

Die Ableitung $\frac{dE}{dr}$ ist also unstetig bei $r = R$.

Wir halten fest: Wenn für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(r)$ gilt: $\rho(r) = 0$ für $r > R$, dann folgt

$$\varphi(r) = \frac{Q}{r} \qquad\qquad \text{für } r > R,$$

wobei Q die Gesamtladung innerhalb der Kugel vom Radius R ist, und

$$\underline{E}(r) = \frac{Q}{r^2}\hat{r},$$

d.h. eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung wirkt nach außen ($r > R$) so wie eine Punktladung im Zentrum der Kugel. Die Punktladung ist dabei so groß wie die Gesamtladung in der Kugel!

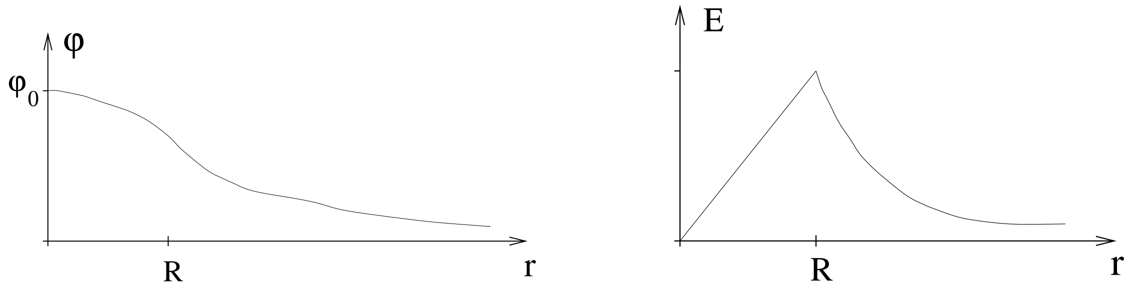

Abbildung 3.2: .

3.2 Elektrischer Dipol

Der *elektrische Dipol* ist neben der Punktladung das wichtigste elektrische Gebilde.

Definition 3.1 (Elektrischer Dipol)**.**
Ein *elektrischer Dipol* besteht aus zwei Ladungen q und $-q$ im Abstand $\underline{a}$ (siehe Abb. 3.3a). Dabei macht man i.a. folgende Idealisierung: Der Abstand a der Ladungen geht gegen Null ($a = |\underline{a}| \to 0$) und die Ladung $q \to \infty$ so, daß

$$\lim_{|\underline{a}| \to 0} q\underline{a} = \underline{p}$$

endlich bleibt. $\underline{p}$ heißt *elektrisches Dipolmoment*.

Wir wollen nun das Potential eines (idealisierten) elektrischen Dipols am Ort $\underline{r}$ berechnen (siehe Abb. 3.3b):

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{r}) &= = \lim_{a\to 0} q\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{a}|} - \frac{1}{r}\right) = \lim_{a\to 0} q\frac{r - |\underline{r}-\underline{a}|}{r|\underline{r}-\underline{a}|} \\ &= \lim_{a\to 0} \frac{q}{r^2}\left[\frac{1}{r}(\underline{r}\cdot\underline{a}) + O(a^2)\right] = \frac{\underline{r}\cdot\underline{p}}{r^3}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir beim Übergang zur zweiten Zeile folgende Taylorentwicklung ausgenutzt:

$$\begin{aligned} |\underline{r}-\underline{a}| &= \sqrt{(\underline{r}-\underline{a})\cdot(\underline{r}-\underline{a})} = \sqrt{r^2 + a^2 - 2\underline{r}\cdot\underline{a}} \\ &= r\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{\underline{r}\cdot\underline{a}}{r^2}} \\ &= r\left(1 - \frac{\underline{a}\cdot\underline{r}}{r^2} + O(a^2)\right), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$ verwendet wurde.
Das Dipolpotential

$$\boxed{\varphi_{\underline{p}}(\underline{r}) = \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3}}$$

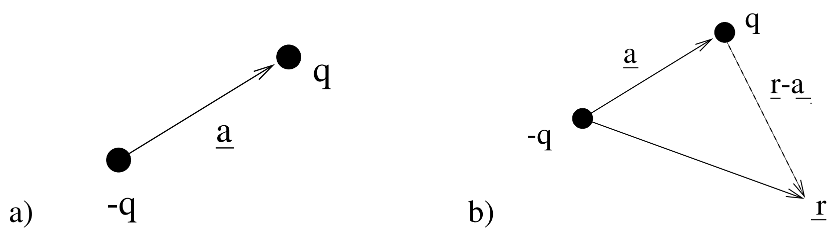

Abbildung 3.3: a) Ein elektrischer Dipol. b) Zur Berechnung des Dipolpotentials.

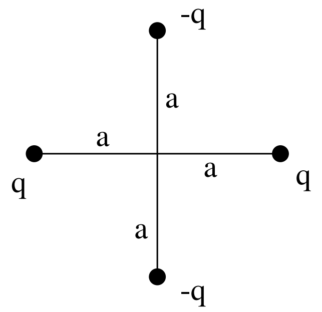

Abbildung 3.4: Ein Quadrupol.

fällt also für große Abstände ab wie $\frac{1}{r^2}$, im Gegensatz zum $\frac{1}{r}$-Verhalten von Punktladungen! Das zugehörige elektrische Dipolfeld wird in den Übungen (Aufgabe 11) berechnet. Es ist

$$\boxed{\underline{E}_{\underline{p}}(\underline{r}) = \frac{1}{r^3}\left[3(\hat{r}\cdot\underline{p})\hat{r} - \underline{p}\right] .}$$

Neben dem Dipol gibt es noch sog. höhere elektrische Momente, z.B. den sog. *Quadrupol*. Ein Beispiel finden Sie in Abb. 3.4. Das elektrische Feld eines Quadrupols fällt ab wie $\frac{1}{r^4}$.

4 Vektorfluß und Gaußsches Gesetz

Im folgenden wollen wir die im vorigen Kapitel für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen gemachte Beobachtung, daß das elektrische Feld durch die eingeschlossene Ladung bestimmt wird, verallgemeinern.

4.1 Vektorfluß

Wir betrachten eine Fläche im dreidimensionalen Raum[6], die beliebig geformt sein kann. Ihr Flächeninhalt (die Oberfläche) sei F. Wir stellen uns vor, daß die Fläche aus infinitesimalen

[6]Die meisten Überlegungen lassen sich auf beliebige Dimensionen übertragen.

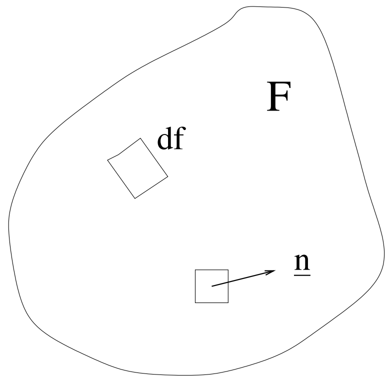

Abbildung 4.1: Eine Fläche F bestehend aus (infinitesimalen) Flächenelementen df mit Normalenvektoren $\underline{n}$.

Flächenelementen df besteht (siehe Abb. 4.1), so daß

$$F = \int df.$$

Definition 4.1 (Normale, Fächenvektor)**.**
Auf jedem infinitesimalen Flächenelement df errichten wir einen senkrecht stehenden Einheitsvektor $\underline{n}$. $\underline{n}$ heißt auch *Normale*.
$\underline{df} = \underline{n}df$ heißt *Flächenvektor*.

Bemerkung: Bisher sind für die Normale noch zwei Richtungen möglich. Für geschlossene Flächen (z.B. Kugeloberflächen) zeigt die Normale jedoch per Konvention immer nach außen.

Definition 4.2 (Vektorfluß)**.**
Seien nun ein Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$ und eine Fläche F gegeben. Dann bezeichnet man

$$\int_F \underline{A} \cdot \underline{n}df = \int_F \underline{A} \cdot \underline{df}$$

als den *Fluß von $\underline{A}$ durch F*. Dabei wird das Integral über die Oberfläche genommen.

Der Vektorfluß[7] ist eine skalare Größe, die von $\underline{A}$ und der Art und Lage der Fläche bestimmt wird (siehe Abb. 4.2).

Sei α der Winkel zwischen $\underline{A}$ und $\underline{df}$ (bzw. $\underline{n}$) (siehe Abb. 4.2). Dann ist $\underline{A} \cdot \underline{df} = |\underline{A}| \cos\alpha df$. Ist $\underline{A}$ an der betrachteten Stelle senkrecht zu $\underline{df}$, d.h. $\underline{A}$ liegt in der Fläche, so ist $\underline{A} \cdot \underline{df} = 0$. Zum Vektorfluß trägt also nur der durch die (gekrümmte) Fläche jeweils senkrecht hindurchtretende Anteil von $\underline{A}$ bei.

[7] Die Bezeichnung "Fluß" ist durch die Hydrodynamik motiviert. Man kann sich tatsächlich eine durch die Oberfläche strömende Flüssigkeit vorstellen.

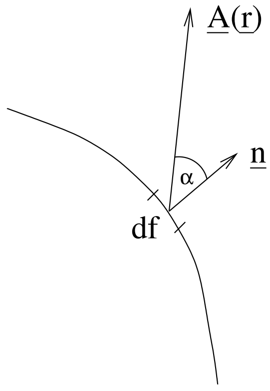

Abbildung 4.2: Fluß des Vektorfeldes $\underline{A}$ durch die Fläche F.

Satz 4.1 (Gaußsches Gesetz)**.**
Für das elektrische Feld gilt das sog. *Gaußsche Gesetz*

$$\boxed{\oint_F \underline{E} \cdot \underline{df} = 4\pi Q,}$$

d.h. der Fluß des elektrischen Feldes durch eine (beliebige) geschlossene Fäche[8] F ist 4π mal der von der Fläche eingeschlossenen Ladung Q.

Der Beweis obiger Aussage wird zeigen, daß das Gaußsche Gesetz (unter Berücksichtigung des Superpositionsprinzips) äquivalent zum Coulombgesetz ist.

4.2 Beweis des Gaußschen Gesetzes

Wir beweisen das Gaußsche Gesetz zunächst für eine Punktladung in einer geschlossenen Fläche. Da sich ein beliebiges $\underline{E}$-Feld durch Superposition aufbaut, folgt dann durch Summation (bzw. Integration) das Gesetz in oben angegebener Form.

4.2.1 Gaußgesetz für Kugelfläche um Punktladung

Zunächst betrachten wir den Fall, daß F eine Kugelschale um die Punktladung q im Ursprung ist (siehe Abb. 4.3).
Das Flächenelement in Kugelkoordinaten ist gegeben durch $\underline{df} = r^2 d\Omega\, \hat{r}$, wobei $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ das Raumwinkelelement ist. Die Flächenvektoren $\underline{df}$ (bzw. die Normalenvektoren $\underline{n}$) der Kugeloberfläche zeigen also immer radial nach außen. Da $\underline{E} = \frac{q}{r^2}\hat{r}$, ist überall $\underline{E} \parallel \underline{n}$ und somit $\underline{E} \cdot \underline{n} = \frac{q}{r^2}$.

[8] Bei Flächenintegralen über geschlossene Fläche schreibt man $\oint$ statt $\int$, ähnlich wie bei geschlossenen Wegintegralen.

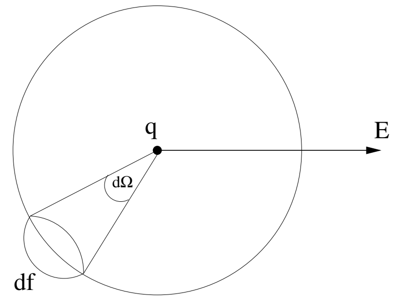

Abbildung 4.3: Fluß eines Radialfeldes durch eine Kugelschale.

Somit folgt:

$$\begin{aligned}
\oint_{\text{Kugelschale}} \underline{E} \cdot \underline{df} &= \oint_{\text{Kugelschale}} \underline{E} \cdot \underline{n} df \\
&= \oint_{\text{Kugelschale}} \frac{q}{r^2} r^2 d\Omega = q \oint_{\text{Kugelschale}} d\Omega \\
&= q \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi \\
&= 4\pi q.
\end{aligned}$$

4.2.2 Beliebige geschlossene Fläche um Punktladung

Wir verallgemeinern nun die Argumentation aus Abschnitt 4.2 auf eine beliebig geformte Fläche. Wir betrachten dazu ein infinitesimales Oberflächenelement df wie in Abb. 4.4. Der Vektor des elektrischen Feldes $\underline{E}$ bildet dort mit der Flächennormalen $\underline{n}$ von $\underline{df}$ den Winkel α. Relevant für den Beitrag $\underline{E} \cdot \underline{df}$ zum Fluß ist nur der Anteil senkrecht zu $\underline{df}$. Die entsprechende Projektion von df ist df_0. $\underline{df}_0$ ist also der Querschnitt des Kegels mit Öffnungswinkel $d\Omega$ und steht senkrecht auf $\underline{E}$. Somit gilt

$$df_0 = df \cos\alpha = r^2 d\Omega,$$

da der Winkel zwischen $\underline{df}$ und $\underline{df}_0$ gleich dem zwischen $\underline{E}$ und $\underline{n}$ ist, also gerade α. Daher folgt

$$\underline{E} \cdot \underline{df} = E df \cos\alpha = E df_0 = E r^2 d\Omega = \frac{q}{r^2} r^2 d\Omega = q d\Omega.$$

Der Abstand r des Flächenelements fällt also bei der Berechnung des Flusses heraus und es bleibt nur der Beitrag vom Raumwinkelelement $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ übrig. Hierbei geht entscheidend ein, daß $E(r) \propto r^{-2}$. Würde E mit einer anderen Potenz von r abfallen, so würde das Gaußsche Gesetz nicht mehr gelten!
Insgesamt erhalten wir dann

$$\oint_{F \text{ beliebig}} \underline{E} \cdot \underline{df} = \oint_{F \text{ beliebig}} q d\Omega = 4\pi q.$$

Somit gilt das Gaußsche Gesetz für beliebig geformte Flächen um eine Punktladung.

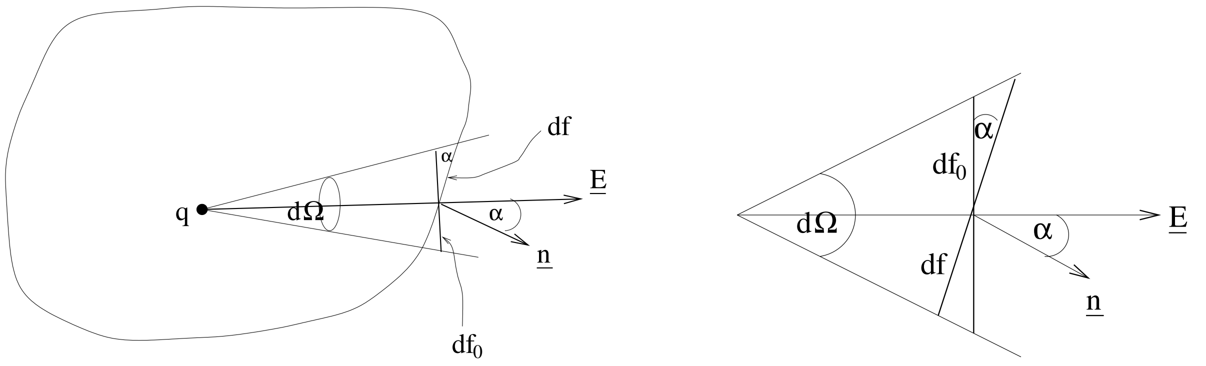

Abbildung 4.4: Fluß eines Radialfeldes durch eine beliebige Fläche (rechts: Ausschnitt zur Illustration der Projektion).

4.2.3 Gaußsche Gesetz für beliebige Ladungsverteilungen

Abschließend wollen wir noch das Gaußsche Gesetz auf beliebige Ladungsverteilungen verallgemeinern. Dazu betrachten wir Ladungen q_j $(j = 1, 2, \ldots)$. Diese erzeugen nach dem Superpositionsprinzip am Ort $\underline{r}$ ein Gesamtfeld $\underline{E}(\underline{r}) = \sum_j \underline{E}_j(\underline{r})$. Somit gilt

$$\oint_{\text{Fläche um alle } q_j} \underline{E} \cdot \underline{df} = \sum_j \oint \underline{E}_j \cdot \underline{df} = \sum_j 4\pi q_j = 4\pi Q$$

wobei $Q = \sum_j q_j$ die Gesamtladung ist.
Den Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen macht man dann ihn ähnlicher Weise, wie wir dies schon früher gesehen haben.

4.2.4 Spezialfall: Ladungsfreie Bereiche

Sei F eine geschlossene Fläche, in der sich keine Ladung befindet. Dann folgt aus dem Gaußschem Gesetz

$$\oint_F \underline{E} \cdot \underline{df} = 0.$$

Anschaulich bedeutet dies, daß alles, was an Fluß an “einer Seite” eintritt, auf der “anderen Seite” wieder hinausfließt.
Man kann dies auch folgendermaßen formulieren:
Ausgangspunkt von Fluß sind immer Ladungen.

4.2.5 Gaußsches Gesetz → Coulombgesetz

Wir hatten schon bei der Ableitung in Abschnitt 4.2.2 betont, daß die r^{-2}-Abhängigkeit des elektrischen Feldes eine wesentliche Rolle spielt. Es ist daher nicht überraschend, daß sich das Coulombgesetz aus dem Gaußschen Gesetz ableiten läßt[9].

[9]Die beiden Gesetze sind also äquivalent!

Dazu betrachten wir eine Kugelfläche F_r vom Radius r um eine Punktladung q. Auf Grund der Symmetrie des Problems steht $\underline{E}$ senkrecht auf der Kugelfläche und ist dort konstant (d.h. hängt nur vom Abstand $r = |\underline{r}|$ ab). Somit folgt:

$$4\pi q = \oint_{F_r} \underline{E} \cdot \underline{df} = \oint_{F_r} E df = E(r) \oint_{F_r} df = E(r) 4\pi r^2.$$

Dabei haben wir bei der zweiten Umformung ausgenutzt, daß hier $\underline{E}$ und $\underline{df}$ parallel sind, und in der dritten Umformung, daß E auf der Kugelschale konstant ist.
Hieraus folgt dann sofort das Coulombgesetz

$$\underline{E} = \frac{q}{r^2}\hat{r}.$$

4.3 Anwendungen des Gaußschen Gesetzes

Im folgenden wollen wir an zwei einfachen Beispielen demonstrieren, wie sich das Gaußsche Gesetz gewinnbringend in praktischen Anwendungen verwenden läßt. Ein wesentlicher Punkt dabei sind Symmetrieüberlegungen, mit denen sich ohne Rechnung gewisse Eigenschaften (z.B. die Richtung) der elektrischen Feldstärke bestimmen lassen.

4.3.1 Kugelsymmetrische Ladungsverteilungen

Zunächst betrachten wir wieder kugelsymmetrische Ladungsverteilungen $\rho(\underline{r}) = \rho(r)$, bei denen die Ladungsdichte nur vom Abstand vom Ursprung abhängt und nicht von der Richtung (siehe Kap. 3.1).
Wir betrachten am zweckmaässigsten eine Kugelfläche im Abstand r. Aus Symmetriegründen muß das elektrische Feld folgende Form haben:

$$\underline{E}(\underline{r}) = E(r)\hat{r}.$$

Das elektrische Feld hat die gleichen Symmetrien wie die Ladungsdichte, von der es erzeugt wird. Insbesondere sollte es sich unter Rotationen nicht ändern. Somit bleibt nur obige Form übrig.
Wir wenden nun das Gaußsche Gesetz auf eine Kugelschale vom Radius r an:

$$4\pi Q(r) = \oint_{r \text{ fest}} \underline{E} \cdot \underline{df} = \oint_{r \text{ fest}} E(r) df = E(r) \oint_{r \text{ fest}} df = E(r) 4\pi r^2.$$

Hieraus folgt das bekannte Ergebnis

$$E(r) = \frac{Q(r)}{r^2}$$

mit der gesamten eingeschlossenen Ladung

$$Q(r) = \int_{r' \leq r} \rho(r') d^3r' = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

Im Vergleich zur aufwendigeren Ableitung dieses Resultats in Kap. 3.1 erkennt man deutlich den praktischen Nutzen des Gaußschen Gesetzes.

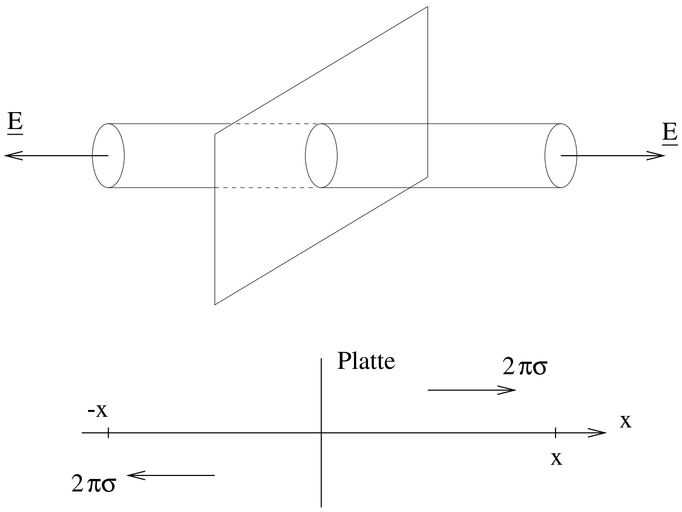

Abbildung 4.5: Zur Anwendung des Gaußschen Gesetzes auf die geladene Ebene.

4.3.2 Homogen geladene Ebene

Als zweites Beispiel betrachten wir eine homogen geladene Ebene, z.B. eine dünne metallische Platte. Diese soll unendlich ausgedehnt sein und in der $y-z-$Ebene liegen. Die Oberflächenladungsdichte σ, d.h. die Ladung pro Flächeneinheit, sei konstant.
Auf Grund der Symmetrie des Problems ist die elektrische Feldstärke parallel zur $x-$Achse. Da das Problem symmetrisch unter Spiegelung an der $y-z-$Ebene ist, sollte auch das elektrische Feld diese Symmetrie aufweisen. Es zeigt daher für $x>0$ in $+x$-Richtung und für $x<0$ in $-x$-Richtung, also von der Platte weg. Somit hat $\underline{E}$ die Form $\underline{E}=E\underline{e}_x$, wobei $\underline{e}_x$ der Einheitsvektor in $x-$Richtung ist. Wir erwarten außerdem, das der Betrag E nicht von y und z abhängt, d.h. $E=E(x)$.
Nach diesen Symmetrievorüberlegungen müssen wir nun eine geeignete Fläche F finden, auf die wir den Gaußschen Satz anwenden. Es ist sinnvoll, F als Oberfläche eines Zylinders der Länge $2x$ und vom Radius r zu wählen, der parallel zur $x-$Achse liegt, und zwar symmetrisch bzgl. der $y-z-$Ebene (siehe Abb. 4.5).
Der Fluß durch die Oberfläche F des Zylinders läßt sich nun folgendermaßen bestimmen:

$$\oint_F \underline{E}\cdot\underline{df} = \int_{\text{Wand}} \underline{E}\cdot\underline{df} + \int_{\text{Deckel}} \underline{E}\cdot\underline{df} = \int_{\text{Deckel}} \underline{E}\cdot\underline{df} = \int_{\text{Deckel}} E(x)df = (E(x)-E(-x))\pi r^2.$$

Hierbei haben wir zunächst ausgenutzt, daß es keinen Fluß durch die Seitenwand des Zylinders gibt, da dort auf Grund unserer Symmetrieüberlegung $\underline{df}\perp\underline{E}$ ist. Auf den beiden Deckeln ist das elektrische Feld konstant (und zwar mit dem Wert $E(x)$ bzw. $E(-x)$). Der Fluß ist daher einfach das Produkt aus Feldstärke und Deckelfläche. Zu beachten ist, daß am linken Ende der Normalenvektor in Richtung $-\underline{e}_x$ zeigt, da per Konvention die Normalenvektoren geschlossener Flächen nach außen zeigen. Auf Grund der Symmetrie können wir auch schließen, daß $E(-x)=$

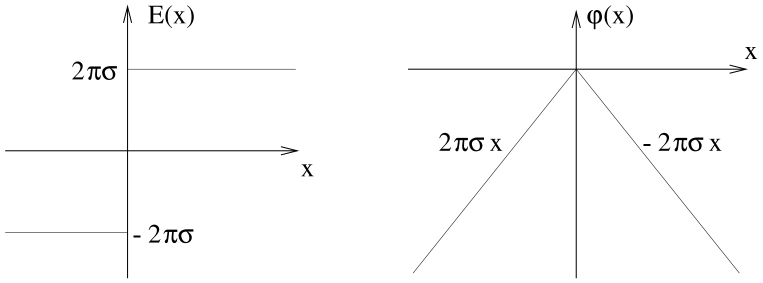

Abbildung 4.6: Elektrisches Feld (links) und Potential (rechts) der homogen geladenen Ebene.

$-E(x)$ ist, denn wir haben ja schon weiter oben argumentiert, daß das Feld immer von der Platte weg zeigt.
Aus dem Gaußschen Gesetz folgt:

$$\oint_F \underline{E} \cdot \underline{df} = 4\pi Q = 4\pi(\pi r^2 \sigma).$$

Dabei haben wir benutzt, daß die eingeschlossene Ladung Q auf der Schnittfläche des Zylinders mit der Ebene sitzt. Die Ladungsmenge auf dieser Kreisscheibe vom Radius r beträgt daher $\pi r^2 \sigma$.
Kombinieren wir nun obige Ergebnisse für den Fluß und das Gaußsche Gesetz, So erhalten wir für das elektrische Feld einer homogen geladenen Ebene

$$\boxed{E = 2\pi\sigma.}$$

Der Betrag des Feldes ist also konstant. An der Platte (bei $x = 0$) macht es einen Sprung der Größe $4\pi\sigma$ (siehe Abb. 4.6).
Wir können auch das zugehörige elektrische Potential φ bestimmen. Es ist gegeben durch

$$\varphi(x) = -2\pi\sigma|x|.$$

5 Gaußscher Satz

Im vorigen Kapitel haben wir das *Gaußsche Gesetz* kennengelernt. Hierbei handelt es sich um eine physikalische Aussage. Wie wir gesehen haben, ist das Gaußsche Gesetz nämlich äquivalent zum Coulomb-Gesetz. In diesem Kapitel steht der *Gaußsche Satz* im Mittelpunkt. Hierbei handelt es sich um eine rein mathematische Aussage[10]. Man spricht genauer auch vom *Gaußschem Integralsatz*.

[10] Die natürlich Anwendungen in der Physik hat!

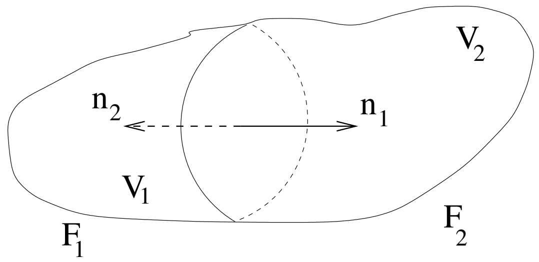

Abbildung 5.1: Zum Gaußschen Satz: Unterteilung des Volumens V in zwei Teilvolumina V_1 und V_2. $\underline{n}_1$, $\underline{n}_2$ sind die Normalenvektoren auf der Trennfläche.

5.1 Herleitung des Gaußschen Satzes

Ziel des Gaußschen Integralsatzes ist es, eine andere Darstellung für ein Flußintegral der Form $\oint \underline{A} \cdot \underline{df}$ anzugeben. Im folgenden sei daher ein Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$ und eine geschlossene Fläche F, die ein Volumen V einschließt, gegeben.

Wir teilen zunächst das Volumen V in zwei (beliebige) Teilvolumina V_1 und V_2 (siehe Abb. 5.1). Die neue Oberfläche der beiden Teilvolumina bezeichnen wir mit F_1 bzw. F_2. Man beachte, daß eine gemeinsame Trennfläche zwischen den beiden Teilvolumina entsteht. Da die Normalen jeweils aus dem Volumen herauszeigen, ist auf der gemeinsamen Trennfläche $\underline{n}_1 = -\underline{n}_2$ (siehe Abb. 5.1) und somit

$$\oint_F \underline{A} \cdot \underline{df} = \oint_{F_1} \underline{A} \cdot \underline{df} + \oint_{F_2} \underline{A} \cdot \underline{df},$$

da sich die Beiträge auf der Trennfläche wegheben.

Wir setzen nun diese Teilungsprozedur immer weiter fort und erhalten so eine Einteilung in viele kleine Volumina ΔV_n mit Oberfläche F_n:

$$\begin{aligned}\oint_F \underline{A} \cdot \underline{df} \quad &= \quad \sum_{n=1}^{N} \oint_{F_n} \underline{A} \cdot \underline{df} = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{\Delta V_n} \oint_{F_n} \underline{A} \cdot \underline{df} \right] \Delta V_n \\ &\underset{\Delta V \to 0}{\to} \int_V \left(\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{F(\Delta V)} \underline{A} \cdot \underline{df} \right) dV\end{aligned}$$

wobei $F(\Delta V)$ die Oberfläche des Würfels ΔV um den Punkt $\underline{r}$ ist.

Wir betrachten nun den Fluß durch die Oberfläche eines Würfels mit den Kantenlängen dx, dy und dz um $\underline{r} = (x, y, z)$ (siehe Abb. 5.2). Auf der Vorderseite F_1 zeige der Normalenvektor $\underline{n}$ in

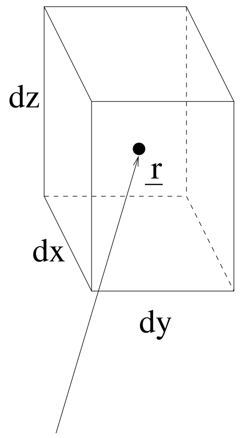

Abbildung 5.2: Zum Gaußschen Satz: Fluß durch einen infinitesimalen Würfel. Das Zentrum des Würfels befindet sich bei $\underline{r} = (x, y, z)$.

x-Richtung, auf der Rückseite F_2 in $-x$-Richtung. Die Flüsse durch F_1 und F_2 sind dann

$$\begin{aligned} \text{Fluß durch } F_1 &= A_x(x + \frac{1}{2}dx, y, z)dydz, \\ \text{Fluß durch } F_2 &= A_x(x - \frac{1}{2}dx, y, z)dydz \end{aligned}$$

wobei $A_x(\underline{r}) = A_x(x, y, z)$ die x-Komponente des Vektorfeldes am Ort $\underline{r}$, dem Zentrum des Würfels, bezeichnet. Wir haben hier angenommen, daß das Vektorpotential auf den Flächen als konstant angesehen werden kann, wobei der Wert durch den Wert in der Mitte gegeben ist.
Somit erhält man für den Fluß durch die beiden Flächen F_1 und F_2:

$$\begin{aligned} \int_{F_1+F_2} \underline{A} \cdot \underline{df} &= \left[A_x(x + \frac{1}{2}dx, y, z) - A_x(x - \frac{1}{2}dx, y, z) \right] dydz \\ &= \left[\left(A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \, \frac{1}{2}dx \right) - \left(A_x(x, y, z) - \frac{\partial A_x}{\partial x} \, \frac{1}{2}dx \right) \right] dydz \\ &= \frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial x} \, dxdydz. \end{aligned}$$

Dabei haben wir beim Übergang zur zweiten Zeile ausgenutzt, daß der Würfel infinitesimal ist und wir deshalb die Feldwerte durch eine Taylor-Entwicklung erster Ordnung approximieren können.
Analog erhalten wir dann für den Fluß in y- und z-Richtung:

$$\begin{aligned} y - \text{Richtung:} &\qquad \int_{F_3+F_4} \underline{A} \cdot \underline{df} = \frac{\partial A_y(\underline{r})}{\partial y} \, dxdydz, \\ z - \text{Richtung:} &\qquad \int_{F_5+F_6} \underline{A} \cdot \underline{df} = \frac{\partial A_z(\underline{r})}{\partial z} \, dxdydz. \end{aligned}$$

Wir fassen nun diese Ergebnisse zusammen und erhalten

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{F(\Delta V)} \underline{A} \cdot \underline{df} = \frac{\partial A_x(\underline{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\underline{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\underline{r})}{\partial z} = \text{div } \underline{A} = \underline{\nabla} \cdot \underline{A}.$$

Der Fluß wird also durch die Divergenz des Vektorfeldes bestimmt. Setzen wir dies in die obigen Ergebnisse ein, so erhalten wir den Gaußschen Satz.

Satz 5.1 (Gaußscher Satz)**.**
Sei $\underline{A}(\underline{r})$ ein Vektorfeld und F eine beliebige geschlossene Fläche, die ein Volumen V umschließt. Dann gilt:

$$\boxed{\oint_F \underline{A} \cdot \underline{df} = \int_V \text{div } \underline{A} \, dV.}$$

Der Gaußsche Satz erlaubt also die Umwandlung eines Flußintegrals in ein Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes.

5.2 Anwendung des Gaußschen Satzes

Als eine Anwendung wollen wir nun den Gaußschen Satz mit dem Gaußschen Gesetz kombinieren. Dann folgt, da $Q = \int_V \rho(\underline{r}) dV$ die Ladung im Volumen V ist:

$$\int_V \text{div } \underline{E} dV = 4\pi \int_V \rho(\underline{r}) dV.$$

Da dies für beliebige Volumina V gilt, müssen die Integranden gleich sein:

$$\boxed{\text{div } \underline{E} = 4\pi\rho.}$$

Dies ist das *Gaußsche Gesetz in differentieller Form* und gleichzeitig die *1. Maxwell-Gleichung*.
Die Gleichung hat folgende anschauliche Interpretation: Ladungen sind die "Quellen" des elektrischen Feldes.

Mit $\underline{E} = -\text{grad } \varphi = -\underline{\nabla}\varphi$ erhalten wir eine Gleichung für das elektrische Potential φ:

$$\text{div } \underline{E} = -\text{div } (\text{grad } \varphi) = -\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}\varphi = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = -\triangle\varphi$$

wobei wir den *Laplace-Operator*

$$\triangle = \text{div grad } = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

eingeführt haben.
Wir erhalten so die *Poisson-Gleichung*

$$\boxed{\triangle\varphi = -4\pi\rho.}$$

Im ladungsfreien Raum (d.h. $\rho(\underline{r}) = 0$) gilt die *Laplace-Gleichung*

$$\boxed{\triangle\varphi = 0,}$$

die natürlich ein Spezialfall der Poisson-Gleichung ist.

Die Poisson-Gleichung ist eine partielle DGL 2. Ordnung. Wir kennen ihre Lösung bereits, denn wir haben das zugrundeliegende physikalische Problem ja schon in Kap. 3 allgemein gelöst:

$$\varphi(\underline{r}) = \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\, d^3r'.$$

In Aufgabe 25 der Übungen sollen Sie noch einmal explizit nachrechnen, daß dies tatsächlich eine Lösung der Poisson-Gleichung ist.

Es stellt sich nun die Frage, wozu die Poisson-Gleichung nützlich ist, wo wir doch ihre allgemeine Lösung schon kennen! Dazu muß man sagen, daß bei vielen physikalischen Problemen die Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$ nicht im ganzen Raum bekannt ist. Man kann daher das Integral in obiger Formel nicht auswerten. Statt der vollständigen Ladungsverteilung sind oft noch Randbedingungen für das Potential φ auf gewissen Flächen im Raum vorgegeben (z.B. den Oberflächen von Metallen, siehe unten). Dann untersucht man die Poisson-Gleichung mit den entsprechenden Randbedingungen.

Beispiel 5.1.
Wir betrachten zwei homogen geladene Platten bei x_1 bzw. x_2 mit jeweils konstantem Potential φ_1 bzw. φ_2 (siehe Abb. 5.3). Die Spannung $\varphi_2 - \varphi_1$ zwischen den Platten ist also konstant. Auf Grund der Symmetrie des Problems erwarten wir, daß φ nur von x abhängt[11]. Da sich zwischen den Platten keine Ladung befindet, gilt dort die Laplace-Gleichung

$$0 = \triangle\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} \qquad \text{(für } x_1 < x < x_2\text{)}.$$

Der eindimensionale Laplace-Operator entspricht also gerade der 2. Ableitung. Wir können die Gleichung sofort integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \text{const.} = -E, \\ \varphi(x) &= C - Ex, \end{aligned}$$

mit den beiden Integrationskonstanten E und C. E können wir natürlich sofort mit dem elektrischen Feld identifizieren, da es die negative Ableitung des Potentials ist.

[11] Wir vernachlässigen hier Randeffekte. Diese führen dazu, daß φ auch von y und z abhängt.

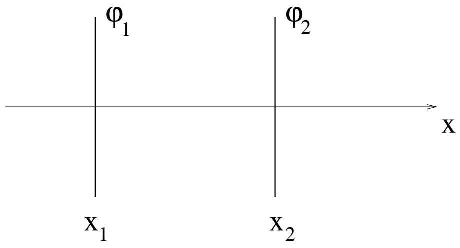

Abbildung 5.3: Zwei homogen geladene Platten mit jeweils konstantem Potential φ_1 bzw. φ_2.

Wir müssen nun diese allgemeine Lösung an die Randbedingungen anpassen. Dies fixiert dann die beiden Integrationskonstanten[12]:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi(x_1) = C - Ex_1, \\ \varphi_2 &= \varphi(x_2) = C - Ex_2. \end{aligned}$$

Durch eine einfache Umformung erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{x_2 - x_1} = -\frac{\text{Spannung}}{\text{Abstand}}, \\ \varphi(x) &= \varphi_1 - E(x - x_1). \end{aligned}$$

Wir sehen, daß das elektrische Feld E zwischen den Platten konstant ist.

6 Elektrostatik in Anwesenheit von Leitern (Metallen), Kondensatoren

In diesem Abschnitt wollen wir uns die Elektrostatik bei Anwesenheit von Leitern etwas genauer ansehen. Im vorigen Abschnitt haben wir schon ein erstes Beispiel für die Problematik kennengelernt. Bevor wir dies vertiefen, müssen wir uns die charakteristischen Eigenschaften von Leitern, die für die Elektrostatik von Bedeutung sind, genauer anschauen.

6.1 Charakteristische Eigenschaften von Leitern

Es stellt sich heraus, daß sich alles Wesentliche aus einem einzigen Charakteristikum ableiten läßt.

Definition 6.1 (Leiter)**.**
In einem *Leiter* sind Ladungen frei verschiebbar.

[12] Insbesondere wird so das elektrische Feld durch die vorgegebenen Potentiale bestimmt.

Aus dieser simplen Beobachtung lassen sich nun zahlreiche Folgerungen ziehen. Zunächst einmal folgt, daß sich die Ladungen solange verschieben, bis im Leiter $\underline{E} = 0$ erreicht ist. Ist nämlich $\underline{E} \neq 0$, so wirkt auf die Ladungen noch eine Kraft $\underline{F} = q\underline{E}$, die die Ladungen verschiebt. Dies passiert so lange, bis das "Gleichgewicht" $\underline{E} = 0$ erreicht ist.

Da $\underline{E} = 0$ im Leiter, muß dort auch $\varphi = \text{const}$ sein. Insbesondere sind somit die Oberflächen von Leitern Äquipotentialflächen. Da allgemein das elektrische Feld orthogonal auf den Äquipotentialflächen steht (siehe Kap. 3), folgt, daß das elektrische Feld senkrecht auf den Leiteroberflächen steht.

Eine weitere wichtige Erkenntnis über die Elektrostatik von Leitern können wir aus dem Gaußschen Gesetz gewinnen. Für jedes Teilvolumen V ganz im Inneren des Leiters gilt nämlich

$$4\pi Q = \oint_V \underline{E} \cdot \underline{df} = 0$$

da im Inneren $\underline{E}$ ist. Also verschwindet die im Volumen V eingeschlossene Ladung: $Q = 0$. Wir können also folgern:
In einem Leiter sitzen die Ladungen (falls vorhanden) auf der Oberfläche!

Das typische Problem, mit dem man es in der Elektrostatik zu tun hat, sieht also folgendermaßen aus: Im $\mathbb{R}^3$ sind Ladungsverteilungen $\rho(\underline{r})$ und Position von Leitern vorgegeben. Dann löst man die Poisson-Gleichung $\triangle\varphi = -4\pi\rho$ unter der Randbedingung, daß $\varphi = \text{const}$ auf den Leiterooberflächen. Zusätzlich gibt es i.a. noch die äußere Randbedingung $\varphi = 0$ für $\underline{r} \to \infty$. Diese Bedingung ist allerdings nur sinnvoll, wenn die Ladungsverteilung beschränkt ist und nicht bis ins Unendliche reicht.

6.2 Kondensatoren

Im folgenden wollen wir uns mit einem Gebilde befassen, daß eine große technische Bedeutung hat.

Definition 6.2 (Kondensator, Kapazität)**.**
Ein System aus zwei Leitern mit entgegengesetzten Ladungen Q und $-Q$ bezeichnet man als *Kondensator*. Die Potentialdifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ ist gerade die Spannung V.
Als *Kapazität des Kondensators* definiert man

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}.}$$

Die Kapazität ist ein Maß für die Speicherfähigkeit des Kondensators. Das Ziel bei technischen Anwendungen ist ein möglichst große gespeicherte Ladungsmenge bei möglichst kleiner Spannung.

Man kann auch den zweiten Leiter ins Unendliche verschieben. Dann wird $\varphi_2 = \varphi(\infty) = 0$ gesetzt.

Beispiel 6.1.

a) Kapazität einer Metallkugel vom Radius a:
Die Ladung Q sei homogen auf der Kugeloberfläche[13] verteilt. Für das elektrische Feld und Potential ergibt sich dann aus unseren alten Ergebnissen für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen:

$$E = \frac{Q}{r^2}, \qquad \varphi = \frac{Q}{r} \qquad (\text{für } r \geq a).$$

Das Potential der Kugel ist also

$$\varphi_1 = \varphi(a) = \frac{Q}{a}$$

woraus sich mit $\varphi_2 = 0$ für die Kapazität ergibt

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{Q/a} = a.$$

Wir sehen hier, daß im cgs-System die Kapazität die Dimension einer Länge hat!

b) Plattenkondensator:
Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen Platten der Fläche F, auf die die Ladung Q bzw. $-Q$ homogen aufgebracht wurde (siehe Abb. 6.1). Die Flächenladungsdichte ist daher $\pm\sigma = \pm\frac{Q}{F}$. Wir wollen annehmen, daß die Platten so groß sind, daß Randeffekte vernachlässigt werden. Wir können daher die Ergebnisse für das elektrische Feld aus dem Beispiel in Kap. 5.2 anwenden. Das Feld der negativ geladenen Platte ist überall betraglich gleich groß wie das der positiven, zeigt aber immer in die entgegengesetzte Richtung (vgl. Abb. 4.6). Zwischen den Platten addieren sich die beiden Felder zum Gesamtfeld $E = 2\pi\sigma$. Außerhalb des Zwischenraums verschwindet die Summe der Felder. Das zugehörige Potential ist dann $\varphi(x) = -4\pi\sigma|x|$. Hieraus ergibt sich die Spannung zwischen den Platten, die den Abstand d voneinander haben sollen, zu $V = \varphi(0) - \varphi(d) = 4\pi\sigma d$. Damit folgt für die Kapazität des Plattenkondensators

$$C = \frac{F}{4\pi d}.$$

Wieder sehen wir, daß C die Dimension "Länge" hat.

[13] Hier haben wir schon ausgenutzt, daß die Kugel aus Metall ist und sich die Ladungen nur auf der Oberfläche befinden.

Abbildung 6.1: a) Plattenkondensator und b) Kugelkondensator.

c) Kugelkondensator:
Ein Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrisch angeordneten Kugelschalen mit Radien $r_1 < r_2$ (siehe Abb. 6.1). Die Kapazität eines solchen Kondensators ist

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Alle Beispiele zeigen, daß die Kapazität eines Kondensators im wesentlichen durch geometrische Größen bestimmt wird.

7 Energie in der Elektrostatik

Die potentielle Energie eines Systems aus zwei Ladungen q_1 und q_2 an den Orten $\underline{r}_1$ und $\underline{r}_2$ beträgt

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}.$$

Dies entspricht der Arbeit, die man aufwenden muß, um die Ladung q_2 aus unendlicher Entfernung gegen die Kraft (bzw. das elektrische Feld) der ersten Ladung (am Ort $\underline{r}_1$) an den Ort $\underline{r}_2$ zu bringen.
Diese Überlegung läßt sich sofort auf drei Ladungen ausdehnen. In diesem Fall gilt

$$U_{123} = U_{12} + U_{13} + U_{23},$$

wobei die Terme auf der rechten Seite analog zum Fall zweier Ladungen definiert sind. Allgemein gilt dann für ein System aus beliebig vielen Ladungen

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}.$$

Die Summe läuft dabei über i und j, lediglich der Term mit $i = j$ wird ausgelassen. Der Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigt, daß bei dieser Art der Summation jeder Term wegen $U_{ij} = U_{ji}$ doppelt gezählt wird.

Der allgemeine Ausdruck ist also die gesamte Arbeit, die aufgewendet wird, um die Ladungen gegen ihre elektrischen Kräfte aus dem Unendlichen an ihre Positionen $\underline{r}_i$ zu bringen. Man sagt daher auch, daß U die im elektrischen Feld der Ladungen gespeicherte Energie ist.

Um dies zu verdeutlichen, wollen wir nun U durch das elektrische Feld $\underline{E}$ ausdrücken. Dazu betrachten wir zunächst das elektrische Potential

$$\varphi(\underline{r}_i) = \sum_{j\ (j\neq i)} \frac{q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|},$$

am Ort $\underline{r}_i$ hervorgerufen durch die anderen Ladungen $j \neq i$. Hier ist zu beachten, daß nun nur über j summiert wird, wobei der Term $j = i$ auszulassen ist. Die elektrische Feldenergie schreibt sich damit nun in der Form

$$U = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi(\underline{r}_i).$$

Wir gehen nun zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung über, d.h. wir führen die Ladungsdichte ρ ein und ersetzen $q_i \to \Delta q_i = \rho(\underline{r}_i)\Delta V_i$ und erhalten somit

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \rho(\underline{r}_i)\varphi(\underline{r}_i)\Delta V_i \qquad \to \qquad \frac{1}{2}\int \rho(\underline{r})\varphi(\underline{r})d^3r$$

wobei sich der Integrationsbereich über den gesamten Raum erstreckt. Die diskrete Version erhält man zurück, wenn man für die Ladungsdichte $\rho(\underline{r}) = \sum_j q_j\delta(\underline{r} - \underline{r}_j)$ einsetzt.

Mit der Poisson-Gleichung $\triangle\varphi = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\varphi) = -4\pi\rho$ folgt:

$$U = -\frac{1}{8\pi}\int d^3r\ \varphi(\underline{r})\left[\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\varphi(\underline{r}))\right].$$

Bevor wir diesen Ausdruck vereinfachen, ist eine kleine mathematische Zwischenbetrachtung nötig. Dazu definieren wir das Vektorfeld $\underline{A} := \varphi\underline{\nabla}\varphi$.
Wenn alle Ladungen in einem endlichen Bereich des Raumes versammelt sind (d.h. $\rho(\underline{r}) = 0$ für $r > r_0$), dann folgt

$$\varphi(\underline{r}) \propto \frac{1}{r} \qquad \text{und} \qquad \underline{\nabla}\varphi(\underline{r}) \propto \frac{1}{r^2} \qquad\qquad \text{für } r \to \infty,$$

und somit

$$A(\underline{r}) \propto \frac{1}{r^3} \qquad\qquad \text{für } r \to \infty.$$

Unser Vektorfeld $\underline{A}$ zerfällt also für große Abstände wie $1/r^3$. Dies werden wir im folgenden ausnutzen, wenn wir das Flußintegral $\oint_{F_R}\underline{A}\cdot\underline{df}$ über die Oberfläche F_R einer sehr großen Kugel mit Radius R ($R \to \infty$) analysieren. Das Flächenelement dieser Kugelschale ist $\underline{df} = R^2 d\Omega\ \hat{r}$ und somit folgt

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{F_R}\underline{A}\cdot\underline{df} \sim \lim_{R\to\infty}\oint_{F_R}\frac{1}{R^3}R^2 d\Omega = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\oint_{F_R}d\Omega = \lim_{R\to\infty}\frac{4\pi}{R} = 0.$$

Der Vektorfluß nach außen verschwindet also für sehr große Kugelschalen[14]. Mit diesem Ergebnis folgt nun

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R\to\infty} \oint_{F_R} \underline{A}\cdot \underline{df} \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{V_R} \underline{\nabla}\cdot\underline{A}\, d^3r \\ &= \int \underline{\nabla}\left[\varphi\underline{\nabla}\varphi\right] d^3r = \int \left[(\underline{\nabla})^2 + \varphi\left\{\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\varphi)\right\}\right] d^3r. \qquad (*) \end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir den Gaußschen Satz benutzt und in der dritten Zeile sind die Integrale über den gesamten Raum zu bilden.
Da $\underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi$ ergibt sich nun unter Berücksichtigung dieses Zwischenresultats

$$U = -\frac{1}{8\pi}\int d^3r\ \varphi\left[\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\varphi)\right] = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\ \left(\underline{\nabla}\varphi\right)^2 = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\ \underline{E}^2.$$

Die erste Identität hatten wir schon weiter oben abgeleitet, die zweite folgt aus $(*)$. Somit haben wir folgenden kompakten Ausdruck für die im elektrischen Feld gespeicherte Energie:

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi}\int \left(\underline{E}(\underline{r})\right)^2 d^3r,}$$

der U nun direkt durch das elektrische Feld ausdrückt.
Die Größe

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi}\left(\underline{E}(\underline{r})\right)^2$$

bezeichnet man auch als *Energiedichte des elektrischen Feldes*. Es gilt offensichtlich

$$U = \int u(\underline{r}) d^3r.$$

Beispiel 7.1. Im Kugelkondensator gespeicherte Energie

Das elektrische Feld des Kugelkondensator zeigt radial nach außen mit dem Betrag

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{r^2} & \text{für } r_1 \le r \le r_2 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei r_1 und R_2 die Radien der inneren und äußeren Kugel sind. Die Energiedichte im Kondensator ($r_1 \le r \le r_2$) ist also

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi}E^2(r) = \frac{Q^2}{8\pi r^4}$$

[14]Dieses Argument über die Asymptotik der Felder ist sehr typisch und wird in ähnlicher Form öfter auftauchen.

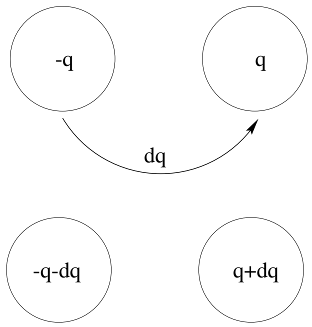

Abbildung 7.1: Schrittweises Aufladen eines Kondensators.

und die Gesamtenergie

$$U = \int u(\underline{r}) d^3r = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} u(r) r^2 dr = \frac{Q^2}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

In Beispiel 6.2c haben wir die Kapazität eines Kugelkondensators bestimmt: $C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$. Also ist $\frac{1}{C} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$ und das obige Resultat für die gespeicherte Energie läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$U = \frac{Q^2}{2C}.$$

Die gespeicherte Energie hängt also in einfacher Weise von der Ladung und der Kapazität des Kondensators ab.

Dieses Ergebnis gilt sogar ganz allgemein für beliebige Kondensatoren. Es gilt nämlich: Die in einem Kondensator mit der Kapazität C und Ladung Q gespeicherte Energie ist

$$\boxed{U = \frac{Q^2}{2C}.}$$

Um diese Aussage zu beweisen, stellen wir uns vor, das wir ausgehend von einem ungeladenen Kondensator stückweise (infinitesimale) Ladungen dq von einem Leiter auf den anderen bringen (siehe Abb. 7.1). Ist der Kondensator so bis zur Ladung q aufgeladen, dann ist $v = \frac{q}{C}$ die momentane Potentialdifferenz zwischen den beiden Leitern. Im nächsten Schritt, in dem wieder die Ladung dq von einem Leiter auf den anderen übertragen wird, gewinnt diese Ladung daher die potentielle Energie $dU = vdq = \frac{q}{C}dq$. Somit gilt für den gesamten Vorgang

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

Mit der Beziehung $C = U/V$ läßt sich die Feldenergie im Kondensator auch schreiben als

$$\boxed{U = \frac{1}{2}CV^2.}$$

In dieser Form läßt sie sich auch leicht merken auf Grund der Analogie zur kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv^2$.

8 Strom und Ladungserhaltung

Bisher haben wir nur ruhende Ladungen betrachtet. Im folgenden werden wir intensiv mit der Untersuchung und Beschreibung der Effekte von bewegten Ladungen befassen.

8.1 Elektrischer Strom und Stromdichte

Definition 8.1 (Elektrischer Strom, Stromdichte)**.**
Bewegte Ladungen bezeichnet man auch als *(elektrischen) Strom*. Quantitiv gilt:

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}.}$$

Der Strom ist also gegeben als Änderung der Ladung pro Zeiteinheit.

Häufig ist es zweckmäßiger, den Strom lokal zu charakterisieren. Dazu definiert man den Vektor der *Stromdichte*

$$\boxed{\underline{j}(\underline{r}) = \rho(\underline{r})\underline{v}(\underline{r}),}$$

wobei $\rho(\underline{r})$ die Ladungsdichte am Ort $\underline{r}$ ist und $\underline{v}(\underline{r})$ die Geschwindigkeit, mit der sich die Ladung $\Delta Q = \rho(\underline{r})\Delta V$ im Volumenelement ΔV um $\underline{r}$ herum momentan bewegt.

Um den Zusammenhang mit dem globalen Strom genauer zu verstehen, betrachten wir eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, die nicht geschlossenen sein muß. Der Gesamtstrom I_F durch diese Fläche ist dann gegeben durch das Flächenintegral

$$I_F = \int_F \underline{j} \cdot \underline{df} = \int_F \underline{j} \cdot \underline{n} df.$$

Ist die Stromdichte konstant, so ist gilt Strom=Stromdichte$\times$Fläche.

Beispiel 8.1. Draht vom Querschnitt A

Wir betrachten einen Draht mit konstantem Querschnitt A. Zu jedem Zeitpunkt sei die Ladung

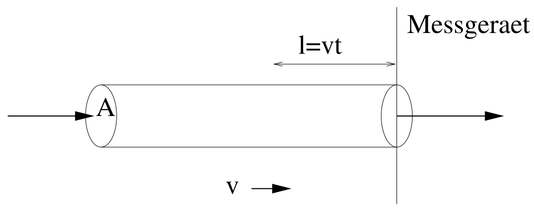

Abbildung 8.1: Strom durch einen Draht.

homogen im Draht verteilt. Wir nehmen ferner an, daß sich alle Ladungen mit der gleichen (konstanten) Geschwindigkeit $\underline{v}$ bewegen. Man kann sich vorstellen, daß es sich bei den Ladungsträgern um Elektronen handelt, die sich frei im Draht bewegen können.
Am Ende des Drahtes befindet sich ein Meßgerät, das den Gesamtstrom mißt (siehe Abb. 8.1). Dabei wird die Anzahl der Ladungen gezählt, die pro Zeiteinheit durch das Meßgerät fließen. Der Gesamtstrom bei einer Meßdauer t ist daher

$$I = \frac{Q}{t}.$$

Offensichtlich gelangen in der Zeit t alle die Ladungen bis zum Meßgerät, die höchstens den Abstand $l = vt$ von diesem haben (siehe Abb. 8.1), sich also in einem Zylinder der Länge l und des Querschnitts A befinden. Somit gilt, da die Ladungsdichte ρ konstant ist,

$$Q = V\rho = lA\rho,$$

und für den Strom

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{lA\rho}{l/v} = \rho v A = jA$$

mit der konstanten Stromdichte $j = \rho v$.

8.2 Ladungserhaltung

Als nächsten wollen wir uns mit den Konsequenzen der Ladungserhaltung beschäftigen. Die Ladungserhaltung ist einer der wichtigsten Erhaltungssätze der Physik (siehe Kap. 2). Wie wir gleich sehen werden, impliziert sie einen tiefen Zusammenhang zwischen der Strom- und Ladungsdichte.

Wir betrachten wieder das von einer geschlossenen Oberfläche F eingeschlossene Volumen V. Der Stromfluß (von innen nach außen) durch die Fläche F ist daher gegeben durch

$$I = \oint_F \underline{j} \cdot \underline{df}.$$

Dies entspricht der Ladung Q, die pro Zeiteinheit aus dem Volumen V heraus fließt. Somit erhalten wir

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = -\oint_F \underline{j} \cdot \underline{df},}$$

wobei das Minuszeichen berücksichtigt, daß die Ladung abnimmt ($\frac{dQ}{dt} < 0$), wenn $\underline{j} \cdot \underline{df}$ bzw. I positiv sind. Obige Gleichung ist das *Gesetz der Ladungserhaltung* in integraler Form.

Wir wollen nun das Gesetz der Ladungserhaltung in differentieller Form ableiten. Dazu beachten wir, daß wegen $Q(t) = \int_V \rho(\underline{r}, t) dV$ gilt:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\underline{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Außerdem gilt auf Grund des Gaußschen Satzes

$$\oint_F \underline{j} \cdot \underline{df} = \int_V \operatorname{div} \underline{j} dV.$$

Kombinieren wir nun diese beiden Gleichungen, so erhalten wir zunächst

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} \right) dV = 0$$

und hieraus, da V beliebig ist und der Integrand deshalb verschwinden muß, das *Gesetz der Ladungserhaltung in differentieller Form:*

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0.}$$

Diese Gleichung bezeichnet man auch als *Kontinuitätsgleichung*. Sie taucht in dieser Form in der Physik immer wieder auf, z.B. in der Hydrodynamik. Ihre Form ist charakteristisch für ein lokales (d.h. von $\underline{r}$ abhängiges) Erhaltungsgesetz.

9 Magnetfeld und Lorentzkraft

Magnetismus und die Wirkung von Magneten sind uns aus dem Alltag bekannt. In diesem Kapitel kommt es uns auf den Zusammenhang zwischen dem Magnetfeld und elektrischen Ladungen an. Empirisch stellt man fest, daß bewegte elektrische Ladungen ein Magnetfeld erzeugen. Andererseits üben Magnetfelder Kräfte auf bewegte elektrische Ladungen aus. Diese Zusammenhänge sollen im folgenden genauer beleuchtet werden.

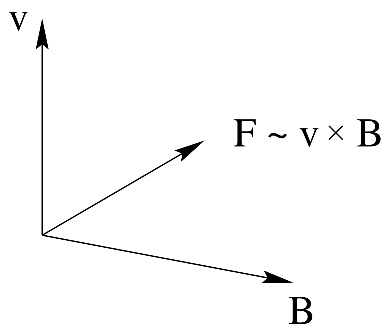

Abbildung 9.1: Die Lorentzkraft.

9.1 Magnetfeld und Kraft auf bewegte Ladungen

Das *Magnetfeld* $\underline{B}(\underline{r})$ ist ein Vektorfeld. Genauer bezeichnet $\underline{B}(\underline{r})$ die *magnetische Induktion*, wobei diese Bezeichnung historische Gründe hat.
Die Einheit des Magnetfeldes ist 1 Gauß (im cgs-System) bzw. 1 Tesla= 10^4 Gauß (im SI-System).

Auf eine mit der Geschwindigkeit $\underline{v}$ bewegte Testladung q wirkt dann die sogenannte *Lorentzkraft*

$$\boxed{\underline{F} = q\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\,\underline{v} \times \underline{B}\right).}$$

Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit ($c \approx 3 \cdot 10^{10} cm/sec$).

Wir betrachten zunächst den Fall $\underline{B} = 0$. Dann ist $\underline{F} = q\underline{E}$, d.h. die Lorentzkraft reduziert sich auf den bereits bekannten Ausdruck für die Kraftwirkung des elektrischen Feldes. Dieser Coulomb-Anteil wirkt sowohl auf ruhende als auch auf bewegte Ladungen.

Für ein verschwindendes elektrisches Feld $\underline{E} = 0$ ist $\underline{F} = \frac{q}{c}\,\underline{v} \times \underline{B}$. In diesem Fall steht also die Lorentz-Kraft senkrecht auf der durch $\underline{v}$ und $\underline{B}$ aufgespannten Ebene (siehe Abb. 9.1).

Beispiel 9.1. Bewegung im homogenen Feld

Um die Wirkung der Lorentz-Kraft genauer zu verstehen, untersuchen wir einen wichtigen Spezialfall[15]. Wir betrachten ein homogenes Feld $\underline{B} = (0, 0, B)$, das konstant in z-Richtung ist. Damit lautet die Newton-Gleichung

$$m\dot{\underline{v}} = \frac{q}{c}\,\underline{v} \times \underline{B}$$

[15]Dieses Problem haben wir schon in Aufgabe 36 der Physik I betrachtet.

bzw.

$$\underline{\dot{v}} = \frac{q}{mc}\,\underline{v} \times \underline{B} = \frac{qB}{mc}\begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der sogenannten *Zyklotronfrequenz*[16]

$$\omega_c = \frac{qB}{mc}$$

lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega_c v_y, \\ \dot{v}_y &= -\omega_c v_x, \\ \dot{v}_z &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist also v_z =konstant und es liegt in $z-$Richtung eine freie Bewegung vor.
Um die Bewegung in der $x-y$-Ebene zu beschreiben ist es zweckmäßig, zu einer Beschreibung mit komplexen Zahlen überzugehen. Dazu führen wir die neue Größe $w := v_x + iv_y$ ein, also $v_x = \text{Re } w$ und $v_y = \text{Im } w$. Hiermit läßt sich die Bewegungsgleichung in der $x-y$-Ebene schreiben als

$$\dot{w} = \dot{v}_x + i\dot{v}_y = \omega_c\,(v_y - iv_x) = -i\omega_c w.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung kennen wir natürlich schon:

$$w(t) = w_0 e^{-i\omega_c t}$$

mit der Integrationskonstanten w_0. $w(t)$ bewegt sich also auf einem Kreis mit Radius w_0 (siehe Abb. 9.2). Somit ist

$$|w| = |w_0| \cdot \left|e^{i\omega_c t}\right| = |w_0| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist also konstant.

Insgesamt sehen wir also, daß ein Teilchen in einem Magnetfeld in $z-$Richtung eine Kreisbewegung in der $x-y$-Ebene ausführt. Diese ist mit einer gleichförmigen Bewegung in $z-$Richtung überlagert, was insgesamt zu einer schraubenförmigen Bewegung führt.

Allgemein ist bei Magnetfeldern zu beachten, daß sie keine Arbeit leisten. Wegen $\underline{F} = \frac{q}{c}\,\underline{v} \times \underline{B}$ ist $\underline{v}$ senkrecht zu $\underline{F}$ und damit gilt für die (infinitesimale) geleistete Arbeit

$$dA = \underline{F} \cdot d\underline{r} = \underline{F} \cdot \underline{v}\,dt = 0.$$

Ist nur ein Magnetfeld vorhanden, so ist also die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2$ konstant.

Um die Gesamtkraft auf beliebig geformte Körper in nicht-konstanten Magnetfeldern berechnen zu können, ist es zweckmäßig, die *Lorentz-Kraftdichte*

[16] Der Name stammt von einer speziellen Sorte Teilchenbeschleuniger, dem Zyklotron.

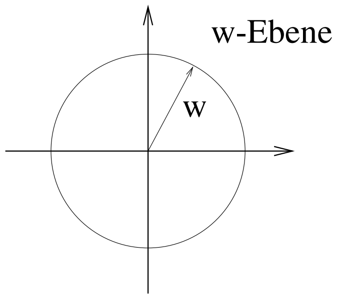

Abbildung 9.2: Die Hilfsgröße $w := v_x + iv_y$ in der komplexen Ebene.

$$\boxed{\underline{f}(\underline{r}) = \rho\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\,\underline{v} \times \underline{B}\right) = \rho\underline{E} + \frac{1}{c}\,\underline{j} \times \underline{B}}$$

einzuführen. Die Kraft auf die (infinitesimale) Ladung im Volumenelement d^3r um $\underline{r}$ herum ist dann gegeben durch $\underline{f}(\underline{r})d^3r$ und die Gesamtkraft auf die Ladungen und Ströme im Volumen V

$$\underline{F} = \int_V \underline{f}(\underline{r})d^3r.$$

Als Anwendung betrachten wir einen stromdurchflossenen Draht in einem Magnetfeld $\underline{B}$. Hat der Draht die konstante Querschnittsfläche A, so ist der Strom I gegeben durch $I = jA$, wobei $j =$ konstant die Stromdichte ist. Die Kraft auf ein Volumenelement $dV = Adl$ mit dem Längenelement dl (siehe Abb. 9.3) ist dann gegeben durch

$$d\underline{F} = \underline{f}dV = \frac{1}{c}\left(\underline{j} \times \underline{B}\right)dV = \frac{I}{c}d\underline{l} \times \underline{B}.$$

Die Gesamtkraft $\underline{F}$ auf ein endliches Drahtstück von $\underline{a}$ nach $\underline{b}$ (siehe Abb. 9.3) läßt sich dann als Linienintegral

$$\underline{F} = \frac{I}{c}\int_{\underline{a}}^{\underline{b}} d\underline{l} \times \underline{B}$$

berechnen.

Beispiel 9.2. Gerader Draht im Magnetfeld

Wir betrachten einen geraden Draht der Länge L in einem homogenen Magnetfeld $\underline{B}$ (siehe Abb. 9.4). In diesem Fall ist überall $\underline{B} \perp d\underline{l}$. Die Kraft ist betraglich konstant und wirkt nach oben (in $z-$Richtung). Ihr Betrag ist gegeben durch

$$F = \frac{I}{c}\int_0^L dlB = \frac{IBL}{c}.$$

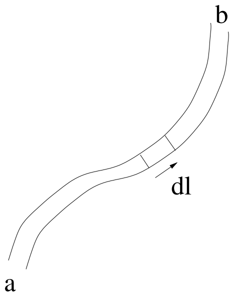

Abbildung 9.3: Längenelement $\underline{dl}$ eines gekrümmten stromdurchflossenen Drahtes.

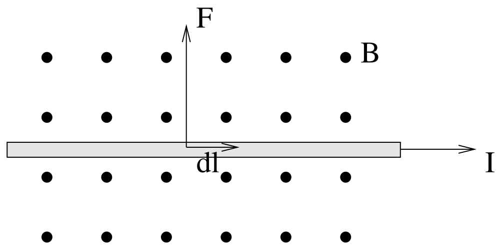

Abbildung 9.4: Gerader stromdurchflossener Draht im Magnetfeld. $\underline{B}$ zeigt dabei nach hinten.

9.2 Ampère-Gesetz

Zum Schluß dieses Abschnittes geben wir noch die gesetzmäßige Fassung der Aussage, daß bewegte elektrische Ladungen (also Ströme) ein Magnetfeld erzeugen, an. Es handelt sich hierbei um das *Ampère-Gesetz* in differentieller Form:

$$\boxed{\text{rot } \underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{j}.}$$

Eine Stromdichte $\underline{j}(\underline{r})$ am Ort $\underline{r}$ erzeugt dort also die Rotation des Magnetfeldes $\underline{B}$.

Das Ampère-Gesetz ist ebenso fundamental wie das Coulomb-Gesetz bzw. das Gauß-Gesetz div $\underline{E} = 4\pi\rho$. Es ist gleichzeitig eine weitere Maxwell-Gleichung. Wir werden sie aber später noch modifizieren müssen, um die Anwesenheit zeitabhängiger elektrischer Felder zu berücksichtigen.

10 Stokesscher Integralsatz

Wir gehen bei der Untersuchung magnetischer Felder umgekehrt vor im Vergleich zur Untersuchung elektrischer Felder. Dort hatten wir zunächst das Gaußsche Gesetz in integraler Form angegeben und dann mittels eines Integralsatzes (Satz von Gauß) auf die differentielle Form geschlossen. Mittels eines weiteren Integralsatzes (Satz von Stokes) wollen wir nun die integrale

Form des Ampère-Gesetzes ableiten, die für praktische Zwecke sehr nützlich ist. Dies gilt wie bei der integralen Form des Gaußschen Gesetzes besonders dann, wenn Symmetrien vorliegen.

10.1 Herleitung des Stokesschen Integralsatzes

Es sei $\underline{A}(\underline{r})$ ein beliebiges Vektorfeld. Aus Physik I wissen wir, daß gilt (falls der Definitionsbereich von $\underline{A}$ einfach-zusammenhängend ist):

$$\underline{A} = -\text{grad}\,\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rot}\,\underline{A} = 0.$$

Wenn $\underline{A} = -\text{grad}\,\varphi$, d.h. es existiert ein Potential, dann ist das Wegintegral $\int_B^C \underline{A} \cdot d\underline{r}$ unabhängig vom speziellen Weg, der den Punkt B mit C verbindet. Hieraus folgt[17]

$$\text{rot}\,\underline{A} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \oint_{\mathcal{L}} \underline{A} \cdot d\underline{r} = 0,$$

wobei die rechte Seite für alle geschlossenen Wege $\mathcal{L}$ gelten soll.

Was passiert für rot $\underline{A} \neq 0$? Man erwartet, daß dann i.a. auch $\oint_{\mathcal{L}} \underline{A} \cdot d\underline{r} \neq 0$ sein wird. Dies bringt der Integralsatz von Stokes zum Ausdruck.

Satz 10.1 (Stokesscher Integralsatz)**.**
Sei F eine beliebige (gekrümmte) Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit Rand $\mathcal{L}$, d.h. der Rand ist eine geschlossene Kurve (siehe Abb. 10.1a). Dann gilt:

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \underline{A} \cdot d\underline{r} = \int_F \text{rot}\,\underline{A} \cdot d\underline{f}.}$$

Dabei ist das infinitesimale Flächenelement $d\underline{f} = \underline{n}df$ gemäß einer rechten-Hand-Regel (siehe Abb. 10.1b) orientiert.
Der Satz von Stokes besagt also, daß das Wegintegral von $\underline{A}$ längs des geschlossenen Weges $\mathcal{L}$ gleich dem Fluß von rot $\underline{A}$ durch die von $\mathcal{L}$ berandete Fläche F ist.

Beim Beweis gehen wir ähnlich vor wie beim Gaußschen Satz. Zunächst unterteilen wir die Fläche F in zwei Teile F_1 und F_2. Diese Teile werden von den geschlossenen Kurven $\mathcal{L}_\infty$ und $\mathcal{L}_\in$ berandet (Abb. 10.2a). Dann gilt:

$$\oint_{\mathcal{L}} \underline{A} \cdot d\underline{r} = \oint_{\mathcal{L}_1} \underline{A} \cdot d\underline{r} + \oint_{\mathcal{L}_2} \underline{A} \cdot d\underline{r}.$$

[17] indem man zwei verschiedene Wege nimmt und in einem die Richtung (und damit das Vorzeichen) umkehrt, so daß der zusammengesetzte Weg geschlossen ist

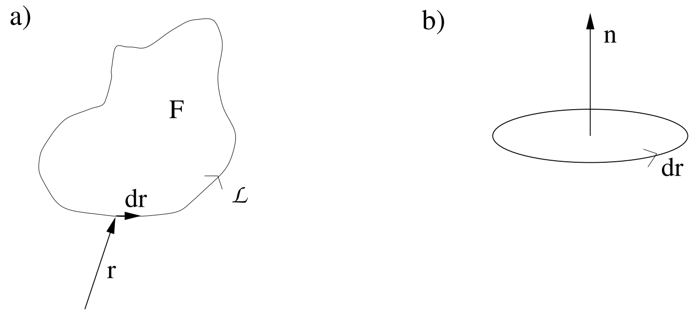

Abbildung 10.1: Zum Satz von Stokes. a) Fläche F mit Rand $\mathcal{L}$. b) Orientierung der Flächennormalen.

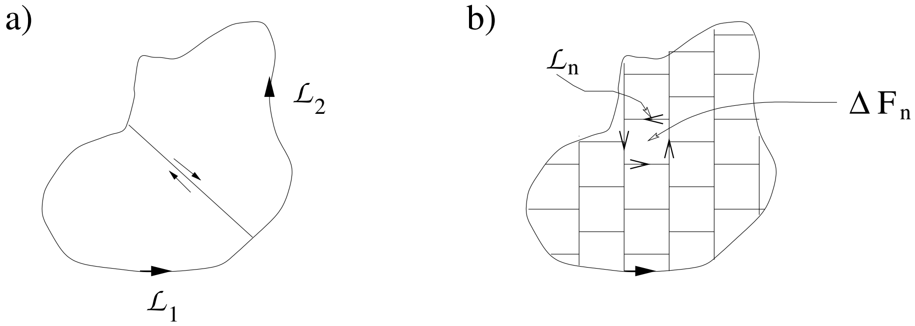

Abbildung 10.2: Zum Beweis des Stokesschen Integralsatzes.

Dabei haben wir schon ausgenutzt, daß die Schnittfläche von $\mathcal{L}_\infty$ und $\mathcal{L}_\in$ in unterschiedlichen Richtungen durchlaufen wird und sich die entsprechenden Beiträge deshalb wegheben.
Die obigen Teilungsprozedur setzen wir nun immer weiter fort (Abb. 10.2b). Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}} \underline{A} \cdot d\underline{r} &= \sum_n \oint_{\mathcal{L}_n} \underline{A} \cdot d\underline{r} = \sum_n \left[\frac{1}{\Delta F_n} \oint_{\mathcal{L}_n} \underline{A} \cdot d\underline{r} \right] \Delta F_n \\ &\to \int_F \mathrm{rot}\ \underline{A} \cdot \underline{n} df \end{aligned}$$

wobei wir beim Übergang zur zweiten Zeile die Summe wieder als Zwischensumme eines Integrals interpretiert und die Beziehung

$$\underline{n} \cdot \mathrm{rot}\ \underline{A} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta \mathcal{L}} \underline{A} \cdot d\underline{r} \qquad (**)$$

benutzt haben. Diese Aussage müssen wir im folgenden noch beweisen. Dazu betrachten wir o.B.d.A. ein infinitesimales rechteckiges Flächenelement (Abb. 10.3) in der $y - z$-Ebene. Das

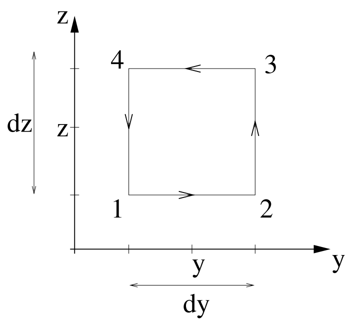

Abbildung 10.3: Zum Beweis von Gleichung $(**)$.

Wegintegral längs des Weges $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ läßt sich dann folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{L}} \underline{A} \cdot d\underline{r} &= A_y(x, y, z - \frac{1}{2}dz)dy + A_z(x, y + \frac{1}{2}dy, z)dz \\
&- A_y(x, y, z + \frac{1}{2}dz)dy - A_z(x, y - \frac{1}{2}dy, z)dz \\
&= \frac{\partial A_z(\underline{r})}{\partial y}dydz - \frac{\partial A_y(\underline{r})}{\partial z}dydz \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Delta F = (\text{rot }\underline{A})_x \, \Delta F.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir angenommen, daß die Kantenlängen dy und dz infinitesimal sind und deshalb der Wert das Vektorfeldes auf einer Kante konstant ist. Hierbei haben wir den Funktionswert in der Kantenmitte gewählt. Für die Kante $1 \to 2$ sind die x- und z-Koordinaten konstant (nämlich x und $z - \frac{1}{2}dz$) und die y-Koordinate variiert von $y - \frac{1}{2}dy$ nach $y + \frac{1}{2}dy$. Die Kantenmitte ist also bei $(x, y, z - \frac{1}{2}dz)$ und deshalb ist $A_y(x, y, z - \frac{1}{2}dz)$ zu wählen[18]. Beim Übergang zur dritten Zeile sind wir analog vorgegangen wie beim Beweis des Satzes von Gauß. Hier wurden die auftretenden Beiträge Taylor-entwickelt, wobei sich die konstanten Terme wegheben.

Somit haben wir für $\underline{n} = \hat{x}$ gezeigt

$$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta \mathcal{L}} \underline{A} \cdot d\underline{r} = (\text{rot }\underline{A})_x = \underline{n} \cdot \text{rot }\underline{A}.$$

Mit einem analogen Argument läßt sich diese Aussage auch für die $y-$ und $z-$Komponenten beweisen, womit $(**)$ gezeigt wäre, und damit der Stokessche Integralsatz.

[18]Es trägt nur die y-Komponente des Feldes bei, da sich auf dem Weg nur die y-Koordinate ändert und deshalb $\underline{A} \cdot d\underline{r} = A_y dy$ ist.

10.2 Anwendung des Stokesschen Satzes

Wir wenden nun den Integralsatz von Stokes auf die differentielle Form des Ampère-Gesetzes an. Die Rolle des Vektorfeldes $\underline{A}$ in der Formulierung des Stokesschen Satzes wird dabei vom Magnetfeld $\underline{B}$ übernommen. Somit ergibt sich wegen rot $\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{j}$ in integraler Form

$$\boxed{\oint_{\mathcal{L}} \underline{B} \cdot d\underline{r} = \frac{4\pi}{c} \int_F \underline{j} \cdot \underline{df} = \frac{4\pi}{c} I_F,}$$

wobei $I_F = \int_F \underline{j} \cdot \underline{df}$ der Gesamtstrom durch die Fläche F ist. Anschaulich besagt die integrale Form des Ampère-Gesetzes also, daß das Wegintegral des Magnetfeldes längs eines geschlossen Weges $\mathcal{L}$ gleich $\frac{4\pi}{c}$ mal dem Gesamtstrom durch die von $\mathcal{L}$ umschlossene Fläche ist.

Beispiel 10.1. Magnetfeld um einen stromdurchflossenen geraden Draht

Wir betrachten einen unendlich langen Draht mit einem Durchmesser r_0, d.h. einer Querschnittsfläche $F_0 = \pi r_0^2$. Da der Draht unendlich lang ist, können wir Randeffekte vernachlässigen. Dies erleichtert die Ausnutzung der Symmetrien des Problems. Der Strom fließe in positive $z-$Richtung, d.h. die Stromdichte ist $\underline{j} = (0, 0, j)$ im Draht und $\underline{j} = 0$ außerhalb (mit j =konstant). Die Stromstärke ist daher $I = jF_0$.
Auf Grund der Symmetrie des Problems erwarten wir, daß das Magnetfeld keine Komponente in $z-$Richtung hat, d.h. $B_z = 0$. Aus dem Ampère-Gesetz in differentieller Form folgt (da $j_x = j_y = 0$) $(\text{rot}\ \underline{B})_x = (\text{rot}\ \underline{B})_y = 0$. Hieraus können wir nun folgern, daß B_x und B_y unabhängig von z sind.
Wir wenden nun das Ampère-Gesetz in integraler Form auf einen Kreis $\mathcal{L}$ vom Radius $r > r_0$ an (siehe Abb. 9.4), der die Kreisscheibe F berandet. Dann gilt:

$$\frac{4\pi}{c} \int_F \underline{j} \cdot \underline{df} = \frac{4\pi}{c} \int_{F_0} j_z df = \frac{4\pi}{c} I.$$

Andererseits folgt aus dem Ampèreschen Gesetz:

$$\frac{4\pi}{c} \int_F \underline{j} \cdot \underline{df} = \oint_{\mathcal{L}} \underline{B} \cdot d\underline{r} = \oint B_t dr = B_t 2\pi r$$

wobei B_t die tangentielle Komponente des Magnetfeldes bezeichnet[19]. Da auf Grund der Symmetrie die radiale Komponente (parallel zu $\underline{r}$, vgl. Abb. 10.4) verschwindet, gilt für den Betrag des Feldes $B = B_t$.
Zusammengefaßt erhalten wir also für den Betrag des Feldes eines stromdurchflossenen Drahtes

$$\boxed{B = B_t = \frac{2I}{cr}.}$$

Das Feld zeigt also tangential zum Draht gerichtet (Abb. 10.4) und fällt wie $1/r$ ab.

[19] d.h. die Komponente senkrecht zum Radiusvektor $\underline{r}$

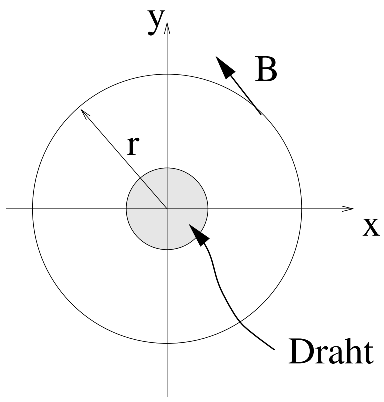

Abbildung 10.4: Magnetfeld eines geraden Drahtes.

11 Integrale Form des Ampère-Gesetzes

Eine andere integrale Form des Ampère-Gesetzes, die historisch sogar älter ist, lautet

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} d^3r',}$$

als Volumenintegral über die Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}')$. Diese Form ist in Analogie zur Integralformel für das elektrische Feld zu sehen, bei der über die gesamte Ladungsdichte $\rho(\underline{r}')$ zu integrieren ist (siehe Kap. 3). Später (in Kap. 12) werden wir beweisen, daß obige Darstellung äquivalent zu rot $\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{j}$ ist. Die neue Form ist immer dann besonders zweckmäßig, wenn die Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}')$ vorgegeben ist.

Für ein Magnetfeld, das durch einen stromdurchflossenen Draht erzeugt wird, läßt sich obige Gleichung noch etwas umschreiben. Wir betrachten dazu einen beliebig gekrümmten Draht mit dem Querschnitt F'. Das Volumenelement $dV' = d^3r'$ am Ort $\underline{r}'$ hat dann die Form $d^3r' = F'dl'$, wobei $d\underline{l}'$ das in Richtung des Drahtes gerichtete (infinitesimale) Längenelement ist (siehe Abb. 9.3). Dann gilt für den Gesamtstrom I:

$$Id\underline{l}' = \underline{j}(\underline{r}')F'dl' = \underline{j}(\underline{r}')d^3r',$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß $\underline{j}$ und $d\underline{l}'$ immer parallel sind. Setzen wir dies in die obige Integraldarstellung ein, so erhalten wir das sogenannte *Biot-Savart-Gesetz*

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{I}{c}\int_{\text{längs Draht}} \frac{d\underline{l}' \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}.}$$

Diese Integral ist wie üblich eine Kurzschreibweise für drei einzelne Integrale für die drei Komponenten von $\underline{B}$. Diese erhält man, wenn man das Kreuzprodukt im Integranden explizit ausrechnet.

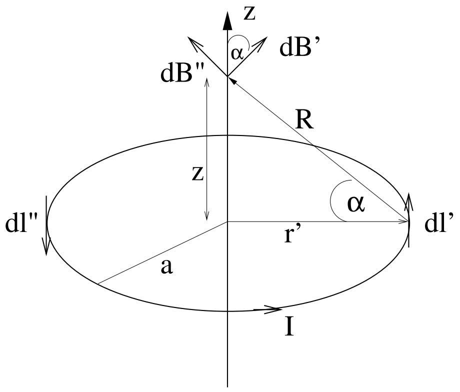

Abbildung 11.1: Magnetfeld eines Ringleiters.

Beispiel 11.1. Magnetfeld auf der Achse eines Ringleiters

Wir betrachten einen kreisförmigen Draht, der von einem Strom I durchflossen wird (Abb. 11.1). Der Ring hat den Durchmesser a. Um das Magnetfeld an einem Punkt $\underline{r} = (0, 0, z)$ der $z-$Achse auszurechnen, betrachten wir zunächst die Beiträge $d\underline{B}'$ und $d\underline{B}''$ von zwei diametral gegenüberliegenden Ringelementen $d\underline{l}'$ (bei $\underline{r}'$) und $d\underline{l}''$. Aus dem Biot-Savart-Gesetz können wir folgern, daß sich die Beiträge senkrecht zur $z-$Achse kompensieren. Damit zeigt das Feld in $z-$Richtung. Der Beitrag von $d\underline{l}'$ ist gegeben durch

$$dB = dB_z = |dB'| \cos\alpha = |dB'| \frac{a}{R}$$

mit $\underline{R} = \underline{r} - \underline{r}'$. Das Biot-Savart-Gesetz ergibt, da $d\underline{l}'$ senkrecht auf $\underline{R} = \underline{r} - \underline{r}'$ steht:

$$|dB'| = \frac{I}{c} \frac{dl'}{R^2}.$$

Integration längs des Kreises liefert, da für fixiertes z auch R konstant ist:

$$B(z) = \frac{a}{R} \int_{\text{Kreis}} |dB'| = \frac{I}{c} \frac{a}{R^3} 2\pi a = \frac{2\pi I a^2}{c(z^2 + a^2)^{3/2}},$$

wobei wir $R^2 = a^2 + z^2$ benutzt haben.
Wir führen den Vektor $\underline{M} = (0, 0, M)$ ein mit

$$M = \frac{\pi a^2}{c} I,$$

d.h. bis auf den Faktor $1/c$ ist M das Produkt aus Stromstärke und umströmter Fläche. $\underline{M}$ bezeichnet man als *magnetisches Moment* des Kreisstromes. Auf der Achse gilt dann für das Magnetfeld

$$\underline{B} = \frac{2\underline{M}}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

a) b)

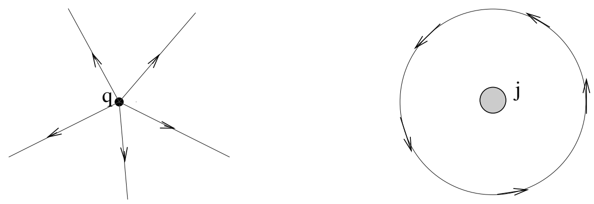

Abbildung 12.1: Typisches Verhalten der Feldlinien von a) elektrischen Feldern und b) magnetischen Feldern in der Nähe von Ladungen bzw. Strömen.

Speziell für den Fall $|z| \gg a$, d.h. für Punkte, die einen Abstand viel größer als der Radius a haben, ist $\underline{B} = \frac{2\underline{M}}{z^3}$.
Ohne Beweis geben wir noch das Verhalten weg von der $z-$Achse an. Das magnetische Dipolmoment eines Kreisstromes verhält sich dann analog dem elektrischen Dipolmoment und fällt für große Abstände mit $1/R^3$ ab.

12 Maxwellsche Gleichungen

Dieses Kapitel ist wahrscheinlich das wichtigste der ganzen Vorlesung. Wir werden nun alle vier Maxwell-Gleichungen kennenlernen. Aus diesen läßt sich im Prinzip die gesamte Elektrodynamik ableiten. Lediglich zur Beschreibung der Kraftwirkung der Felder benötigen wir als Ergänzung die Lorentz-Kraft. Zunächst wollen wir die Maxwell-Gleichungen für zeitunabhängige (statische) Probleme vorstellen.

12.1 Zeitunabhängige Maxwell-Gleichungen

Zwei Maxwell-Gleichungen haben wir bereits im Laufe der Vorlesung kennengelernt. In differentieller Form lauten sie:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \underline{B} &= \frac{4\pi}{c}\underline{j}. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung bezieht sich hier auf ruhende elektrische Ladungen. Anschaulich besagt sie, daß elektrische Ladungen (also auch die Ladungsdichte $\rho(\underline{r})$) die Quellen des elektrischen Feldes sind. Dies impliziert z.B., daß Ladungen Ausgangs- bzw. Endpunkt von elektrischen Feldlinien sind (siehe Abb. 12.1). Die zweite Gleichung bezieht sich auf bewegte elektrische Ladungen, also Ströme. Anschaulich besagt sie, daß die Wirbel (Rotation) des magnetischen Feldes durch Ströme verursacht werden. Deshalb sehen magnetische Feldlinien typischerweise so aus, wie wir das z.B. schon für den Fall eines geraden Drahtes kennengelernt haben (siehe Abb. 12.1).

Zusätzlich zu diesen bereits bekannten Maxwell-Gleichungen gibt es zwei weitere, die wir folgendermaßen motivieren können. Angenommen, es existieren magnetische Ladungen ρ_{magn} und magnetische Ströme $\underline{j}_{\text{magn}}$. Dann sollten die Maxwell-Gleichungen symmetrisch in $\underline{E}$ und $\underline{B}$ sein (mit den entsprechenden Ladungen und Strömen). Wir erwarten in diesem Falle also

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{B} &= 4\pi \rho_{\text{magn}}, \\ \operatorname{rot} \underline{E} &= \frac{4\pi}{c} \underline{j}_{\text{magn}}, \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichung das Verhalten ruhender magnetischer Ladungen beschreibt während die zweite eine Aussage über den Effekt bewegter magnetischer Ladungen macht.
Nun existieren aber magnetische Ladungen und Ströme nicht. Zumindest sind sie bis heute nicht beobachtet worden, obwohl z.B. einige moderne Theorien der Elementarteilchenphysik die Existenz sogenannter magnetischer Monopole vorhersagen. Aber selbst wenn diese entdeckt würden, hätten sie für unseren Alltag kaum beobachtbare Auswirkungen[20]. Wir müssen deshalb in obigen Gleichungen ρ_{magn} und $\underline{j}_{\text{magn}}$ gleich Null setzen, um die korrekten fehlenden Maxwell-Gleichungen zu erhalten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \underline{E} &= 0. \end{aligned}$$

Auch diese Gleichungen haben - analog zu den ersten beiden Maxwell-Gleichungen - eine anschauliche Interpretation. Die erste Gleichung besagt, daß das Magnetfeld keine Quellen hat. Magnetische Feldlinien verlaufen deshalb nicht wie in Abb. 12.1a. Im Gegensatz zu elektrischen Feldlinien haben sie kein Ende, d.h. sie müssen geschlossen sein. Die zweite Gleichung besagt dagegen, daß das elektrische Feld wirbelfrei ist.

Somit kennen wir nun alle vier Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik, d.h. für den Fall, daß keine Zeitabhängigkeiten vorliegen. Alle relevanten Größen, also $\underline{E}$, $\underline{B}$, ρ und $\underline{j}$ hängen nur vom Ort $\underline{r}$ ab, nicht von der Zeit t.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{div} \underline{E} = 4\pi\rho, & \operatorname{div} \underline{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \underline{E} = 0, & \operatorname{rot} \underline{B} = \dfrac{4\pi}{c} \underline{j}. \end{array}}$$

Die Gleichungen in der ersten Zeile sind die Quellengleichungen, die in der zweiten die Wirbelgleichungen. Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, daß die Maxwell-Gleichungen für zeitabhängige Probleme noch zu modifizieren sind.

[20] Obwohl man zeigen kann, daß ein enger Zusammenhang zwischen der Quantisierung der elektrischen Ladung und der Existenz von Monopolen besteht.

12.2 Zeitabhängige Maxwell-Gleichungen

Im folgenden nehmen wir an, daß sich ρ und $\underline{j}$ zeitlich ändern, also $\rho = \rho(\underline{r}, t)$ und $\underline{j} = \underline{j}(\underline{r}, t)$. Wir wissen schon, daß diese Funktionen nicht unabhängig voneinander sind, denn sie müssen ja die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\, \underline{j} = 0$$

erfüllen. Im folgenden wollen wir für alle vier Maxwell-Gleichungen untersuchen, ob sie in Gegenwart von zeitabhängigen Ladungs- und Stromdichten zu modifizieren sind.

Die erste Maxwell-Gleichung

$$\text{div}\, \underline{E} = 4\pi\rho$$

bleibt unverändert. Wir hatten ja schon früher gesehen (z.B. bei der Betrachtung der Lorentz-Kraft), daß elektrische Ladungen ein elektrische Feld erzeugen und zwar unabhängig von ihrem Bewegungszustand. Bewegte Ladungen führen typischerweise zu zeitabhängigen Ladungsdichten. Dies kann man sich z.B. an einer Punktladung klar machen. Für eine am Ort $\underline{r}_0$ ruhende Punktladung q ist die Ladungsdichte durch $\rho(\underline{r}) = q\delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$ gegeben. Bewegt sich die Ladung mit der Geschwindigkeit $\underline{v}$ geradlinig gemäß $\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}t$, so ist $\rho(\underline{r}, t) = q\delta(\underline{r} - \underline{r}_0 - \underline{v}t)$.

Die zweite Maxwell-Gleichung, das Ampère-Gesetz, wurde durch Maxwell um einen weiteren Term ergänzt:

$$\text{rot}\, \underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

Die Ergänzung $\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$ heißt auch *Maxwellscher Verschiebungsstrom*. Sie ist notwendig, um die Konsistenz der Maxwellschen Gleichungen zu gewährleisten. Dies kann man folgendermaßen einsehen: Wir wissen, daß für beliebige Vektorfelder $\text{div}(\text{rot}\, \underline{A}) = 0$ gilt. Speziell für das Ampère-Gesetz (mit der Maxwellschen Ergänzung) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{div}\,(\text{rot}\, \underline{B}) = \text{div}\left(\frac{4\pi}{c}\underline{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{4\pi}{c}\text{div}\, \underline{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\, \underline{E}) = \frac{4\pi}{c}\left(\text{div}\, \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die erste Maxwell-Gleichung $\text{div}\, \underline{E} = 4\pi\rho$ benutzt. Im vorletzten Schritt wurde die Reihenfolge der Zeit- und Ortsableitungen vertauscht, was unter sehr allgemeinen Bedingungen erlaubt ist. Wir sehen, daß diese Gleichung erfüllt ist, da die Kontinuitätsgleichung $\text{div}\, \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ gilt[21]. Ohne den Maxwellschen Verschiebungsstrom wäre das nicht der Fall. Dann wäre die Kontinuitätsgleichung für zeitabhängige Probleme nicht erfüllt und die Maxwellschen Gleichungen somit inkonsistent.

[21] Man beachte, daß wir im Prinzip die Kontinuitätsgleichung aus den ersten beiden Maxwell-Gleichungen hergeleitet haben!

Die dritte Maxwell-Gleichung

$$\text{div}\ \underline{B} = 0$$

bleibt ebenso unverändert wie die erste. Das magnetische Feld ist quellenfrei, denn es gibt keine magnetischen Ladungen. Dies gilt unabhängig vom Bewegungszustand.

Die letzte Maxwell-Gleichung, die auch als *Faraday-Gesetz* oder *Induktionsgesetz* bezeichnet wird und schon vor Maxwell bekannt war, erfährt eine Ergänzung. Diese ist nicht ganz so naheliegend wie beim 2. Gesetz, wegen der Symmetrie zwischen $\underline{E}$ und $\underline{B}$ aber durchaus plausibel:

$$\text{rot}\ \underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}.$$

Man beachte den Vorzeichenwechsel bei der Ergänzung im Vergleich zur 2. Maxwell-Gleichung.

Damit haben wir alle vier Maxwell-Gleichung in ihrer allgemeinen Form kennengelernt. Wir stellen sie hier noch einmal kompakt zusammen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{div}\ \underline{E} = 4\pi\rho, & \text{div}\ \underline{B} = 0, \\ \text{rot}\ \underline{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \underline{B}}{\partial t}, & \text{rot}\ \underline{B} = \dfrac{4\pi}{c}\underline{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \underline{E}}{\partial t}. \end{array}}$$

Es ist zu betonen, daß diese Gesetze letzten Endes Erfahrungstatsachen sind, die nicht weiter begründet werden können.

Neben den Maxwell-Gleichungen spielen zwei weitere Gleichungen eine wichtige Rolle. Die erste ist die Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\text{div}\ \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.}$$

Diese drückt die Ladungserhaltung aus und kann aber, wie wir oben gesehen haben, aus den Maxwell-Gleichungen abgeleitet werden.

Als letzte wichtige Gleichung benötigen wir noch einen Zusammenhang mit der Newtonschen Mechanik, also eine Beziehung, die die Kraftwirkung der elektrischen und magnetischen Felder beschreibt. Diese hatte wir auch schon kennengelernt. Es handelt sich um die Lorentz-Kraftdiche

$$\boxed{\underline{f}(\underline{r}) = \rho\underline{E} + \frac{1}{c}\,\underline{j} \times \underline{B}.}$$

Abschließend soll noch kurz eine wichtige Eigenschaft der Maxwell-Gleichungen erwähnt werden. Die Newtonsche Mechanik, wie wir sie in Physik I kennengelernt haben, ist nur anwendbar, so lange die auftretenden Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c sind. Ist dies nicht der Fall, so müssen Korrekturen zur Berücksichtigung der Relativitätstheorie angebracht werden. Dies ist anders bei den Maxwell-Gleichungen. Sie sind auch bei Berücksichtigung der Relativitätstheorie korrekt. Man sagt auch, daß die Maxwell-Gleichungen *relativistisch invariant* sind.

12.3 Integrale Form der Maxwell-Gleichungen

Mit Hilfe der Integralsätze von Gauß und Stokes lassen sich die Maxwell-Gleichungen in eine integrale Form bringen. Dies hatten wir früher schon am Beispiel des Gaußschen und Ampèreschen Gesetze gesehen. Diese integralen Formen sind häufig dann besonders nützlich, wenn man Symmetrien ausnutzen will.

Bei den Quellengleichungen bietet sich wegen der auftretenden Divergenz die Anwendungen des Gaußschen Satzes an. Dazu müssen die Gleichungen jeweils über ein Volumen V integriert werden, dessen (geschlossene) Oberfläche F ist.
So folgt aus div $\underline{E} = 4\pi\rho$:

$$\oint_F \underline{E} \cdot \underline{df} = \int_V \text{div}\, \underline{E}\, dV = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi Q_F.$$

Im ersten Schritt haben wir den Gaußschen Satz benutzt, die zweite Identität ist gerade durch die Maxwell-Gleichung gegeben und Q_F ist die von der Fläche F eingeschlossene Ladungsmenge.

Ganz analog folgt aus div $\underline{B} = 0$:

$$\oint_F \underline{B} \cdot \underline{df} = \int_V \text{div}\, \underline{B}\, dV = 0.$$

In den beiden Gleichungen, in denen die Rotation der Felder auftritt, ist es zweckmäßig, über eine beliebige Fläche F zu integrieren, um den Stokesschen Satz anwenden zu können. Aus rot $\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$ folgt dann:

$$\oint_{\mathcal{L}} \underline{B} \cdot d\underline{r} = \int_F \text{rot}\, \underline{B} \cdot \underline{df} = \frac{4\pi}{c}\int_F \underline{j} \cdot \underline{df} + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_F \underline{E} \cdot \underline{df} = \frac{4\pi}{c} I_F + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_F \underline{E} \cdot \underline{df},$$

wobei $\mathcal{L}$ der Rand von F und I_F der Gesamtstrom durch F ist, und analog aus rot $\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$

$$\oint_{\mathcal{L}} \underline{E} \cdot d\underline{r} = \int_F \text{rot}\, \underline{E} \cdot \underline{df} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_F \underline{B} \cdot \underline{df}.$$

Somit lauten die Maxwell-Gleichungen in integraler Form

$$\oint_F \underline{E}\cdot \underline{df} = 4\pi Q_F, \qquad \oint_F \underline{B}\cdot \underline{df} = 0,$$
$$\oint_{\mathcal{L}} \underline{E}\cdot d\underline{r} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_F \underline{B}\cdot \underline{df}, \qquad \oint_{\mathcal{L}} \underline{B}\cdot d\underline{r} = \frac{4\pi}{c} I_F + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_F \underline{E}\cdot \underline{df}.$$

12.4 Potential und Vektorpotential

Im folgenden wollen wir noch einmal die zeitunabhängigen Maxwell-Gleichungen genauer betrachten. Sind ρ, $\underline{j}$, $\underline{E}$ und $\underline{B}$ zeitunabhängig, so entkoppeln die vier Maxwellschen Gleichungen in die Gleichungen

$$\text{div}\,\underline{E} = 4\pi\rho, \qquad \text{rot}\,\underline{E} = 0$$

der Elektrostatik und

$$\text{div}\,\underline{B} = 0, \qquad \text{rot}\,\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{j}$$

der Magnetostatik. Diese beiden Gleichungssätze sind unabhängig voneinander. Im allgemeinen Fall zeitabhängiger Felder koppeln aber alle vier Gleichungen miteinander.

Wir wollen zunächst noch einmal das elektrostatische Problem betrachten. Da $\text{rot}\,\underline{E} = 0$ ist, wissen wir, daß ein Potential φ mit

$$\underline{E} = -\text{grad}\,\varphi$$

existiert. Damit ist $\text{rot}\,\underline{E} = 0$ automatisch erfüllt, da die Rotation eines Gradienten immer gleich Null ist. Es verbleibt nur noch die erste Maxwell-Gleichung, in die wir nun unser Potential einsetzen. Wir erhalten dann die bekannte Poisson-Gleichung

$$\triangle\varphi = -4\pi\rho$$

mit der Lösung (siehe auch Aufgabe 25)

$$\varphi = \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r'.$$

Durch Einführung des Potentials konnten wir also die zwei Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik auf eine reduzieren und sogar deren allgemeine Lösung angeben.

Wir wollen nun etwas ähnliches für die beiden Gleichungen der Magnetostatik versuchen. Dazu führen wir das sogenannte *Vektorpotential* $\underline{A}(\underline{r})$ ein, das folgendermaßen mit dem Magnetfeld $\underline{B}$ zusammenhängt:

$$\boxed{\underline{B} = \text{rot}\,\underline{A}.}$$

Dies ist möglich, da auf Grund der allgemeinen Identität $\text{div}(\text{rot}\ \underline{A}) = 0$ gilt und somit durch diesen Ansatz $\text{div}\ \underline{B} = 0$ automatisch erfüllt ist. Wir setzen nun die Definition des Vektorpotentials in die verbleibende Gleichung ein und erhalten

$$\frac{4\pi}{c}\underline{j} = \text{rot}\ \underline{B} = \text{rot}(\text{rot}\ \underline{B}) = \text{grad}\ (\text{div}\ \underline{A}) - \triangle\underline{A}.$$

Bei der letzten Umformung haben wir die Identität aus Aufgabe 42 der Übungen benutzt. Man beachte, daß hierbei $\triangle\underline{A}$ komponentenweise zu bilden ist, d.h. $\triangle\underline{A} := (\triangle A_x, \triangle A_y, \triangle A_z)$.

Später[22] werden wir beweisen, daß man o.B.d.A. zusätzlich für das Vektorpotential $\text{div}\ \underline{A} = 0$ wählen kann. Dies bezeichnet man als *Coulomb-Eichung*. In diesem Falle vereinfacht sich die obige Gleichung erheblich und man erhält

$$\triangle\underline{A} = \frac{4\pi}{c}\underline{j},$$

d.h. komponentenweise

$$\triangle A_x = \frac{4\pi}{c}j_x, \qquad \text{etc.}$$

Für jede Komponente gilt also eine Poisson-Gleichung! Deren allgemeine Lösung kennen wir aber schon (s.o.). Durch Vergleich mit $\triangle\varphi = -4\pi\rho$ finden wir daher

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}d^3r'.}$$

Daraus folgt für das Magnetfeld (siehe Aufgabe 49)

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot}\ \underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}d^3r'.}$$

Das ist genau die Gleichung, die wir im vorigen Kapitel 11 (ohne Beweis) angegeben haben.

13 Energie des elektromagnetischen Feldes

Wir haben bereits in Kapitel 7 die Energie des elektrostatischen Feldes bestimmt. Dort hatten wir gezeigt, daß für die Gesamtenergie U_{el} gilt

$$U_{\text{el}} = \int u_{\text{el}}(\underline{r})d^3r \qquad \text{mit} \qquad u_{\text{el}}(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi}\underline{E}^2(\underline{r}),$$

mit der Energiedichte $u_{\text{el}}(\underline{r})$. In ähnlicher Weise erwarten wir für das Magnetfeld

$$u_{\text{mag}}(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi}\underline{B}^2(\underline{r}),$$

und somit für die Gesamtenergie des elektromagnetischen Feldes[23]

[22] In Abschnitt 15.2.

[23] Man beachte, daß im cgs-System das elektrische und magnetische Feld die gleiche Dimension haben!

$$\boxed{u_{\mathrm{em}}(\underline{r},t) = \frac{1}{8\pi}\left[\underline{E}^2 + \underline{B}^2\right]}$$

mit beliebigen elektrischen und magnetischen Feldern $\underline{E} = \underline{E}(\underline{r},t)$ und $\underline{B} = \underline{B}(\underline{r},t)$.

Wir wollen nun versuchen, aus den Maxwell-Gleichungen einen "Energiesatz" abzuleiten. Dazu betrachten wir die zeitliche Änderung der Energiedichte $u_{\mathrm{em}}(\underline{r})$:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{\mathrm{em}}(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi}\left[\underline{E}\cdot\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \underline{B}\cdot\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right].$$

Durch Multiplikation der entsprechenden Maxwell-Gleichungen mit $\underline{E}$ bzw. $\underline{B}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\underline{E}\cdot \mathrm{rot}\,\underline{B} &= \frac{4\pi}{c}\underline{j}\cdot\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{E}\cdot\frac{\partial \underline{E}}{\partial t},\\
\underline{B}\cdot \mathrm{rot}\,\underline{E} &= -\frac{1}{c}\underline{B}\cdot\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Hiermit können wir die Zeitableitungen der Felder in $\frac{\partial}{\partial t}u_{\mathrm{em}}$ ersetzen:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{\mathrm{em}}(\underline{r},t) = -\underline{j}\cdot\underline{E} + \frac{c}{4\pi}\left[\underline{E}\cdot\mathrm{rot}\,\underline{B} - \underline{B}\cdot\mathrm{rot}\,\underline{E}\right].$$

Nun gilt aber explizit

$$\begin{aligned}
\underline{E}\cdot\mathrm{rot}\,\underline{B} - \underline{B}\cdot\mathrm{rot}\,\underline{E} &= E_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + E_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + E_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\\
&\quad -B_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + B_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(E_yB_z - E_zB_y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(E_zB_x - E_xB_z\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(E_xB_y - E_yB_x\right)\\
&= -\mathrm{div}\left(\underline{E}\times\underline{B}\right).
\end{aligned}$$

Damit ist folgende Definition naheliegend:

Definition 13.1 (Poynting-Vektor)**.**
Der sogenannte *Poynting-Vektor* ist definiert als

$$\boxed{\underline{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\underline{E}\times\underline{B}\right).}$$

Er beschreibt den *Energiestrom*, genauer die *Energiestromdichte*, denn seine Dimension ist Geschwindigkeit mal Energiedichte. Man beachte, daß $\underline{S}$ orthogonal zu $\underline{E}$ und $\underline{B}$ ist.

Damit können wir nun den angepeilten *Energiesatz* in kompakter Form schreiben:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} u_{\text{em}}(\underline{r}, t) + \operatorname{div} \underline{S} = -\underline{j} \cdot \underline{E}.}$$

Diese Bilanzgleichung hat fast die gleiche Form wie die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0$. Hier ist die Summe aus der zeitlichen Änderung der Energiedichte $\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}$ und der Divergenz der (Energie-)Stromdichte div $\underline{S}$ aber nicht gleich Null. Man bezeichnet den Term $-\underline{j} \cdot \underline{E}$ daher auch als *Verlust*.
Die Energie des elektromagnetischen Feldes (in einem Volumen V) ändert sich also nicht nur durch Energieströmung (durch die Oberfläche von V), also div $\underline{S}$, sondern auch durch (echte) Verluste.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß der Term $-\underline{j} \cdot \underline{E}$ tatsächlich einem Verlust und nicht einem Gewinn entspricht. Dies gilt, da $-\underline{j} \cdot \underline{E} \leq 0$ ist, da Ladungen in Richtung des elektromagnetischen Feldes strömen. Dies wiederum ist gerade die Aussage des *Ohmschen Gesetzes*[24]

$$\boxed{\underline{j} = \sigma \underline{E}.}$$

Dabei ist σ die sogenannte *Leitfähigkeit*. Ihr Kehrwert $\rho_s = 1/\sigma$ heißt auch *spezifischer Widerstand*. Bei diesen Größen handelt es sich um Materialkonstanten. Es gilt nun:

$$\underline{j} \cdot \underline{E} = \sigma \underline{E}^2 = \rho_s \underline{j}^2 \geq 0.$$

Bei vorgegebenem Strom ist also der Verlust umso größer, je größer der Widerstand ρ_s ist. Die Verlustenergie $\underline{j} \cdot \underline{E}$ bezeichnet man auch als *Ohmsche Wärme*.
In Aufgabe 47 wird der Zusammenhang der obigen Form des Ohmschen Gesetzes mit der bekannteren Form $U = RI$ untersucht.

14 Maxwell-Gleichungen im Vakuum – Wellen

Die Maxwellschen Gleichungen bringen zum Ausdruck, daß elektromagnetische Felder durch Ladungsdichten ρ und Stromdichten $\underline{j}$ erzeugt werden. I.a. sind ρ und $\underline{j}$ aber nur in einem begrenzten Raumbereich von Null verschieden, z.B. in den elektrischen Leitungen und Antennen einer Sendestation oder eines Handys (siehe Abb. 14.1).

Im Außenraum gelten dann die Maxwell-Gleichungen des Vakuums, d.h. ohne Quellterme:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{E} &= 0, & \operatorname{div} \underline{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \underline{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \underline{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

[24] Ohm hat dieses Gesetz im übrigen während seiner Zeit als Lehrer in Köln entdeckt!

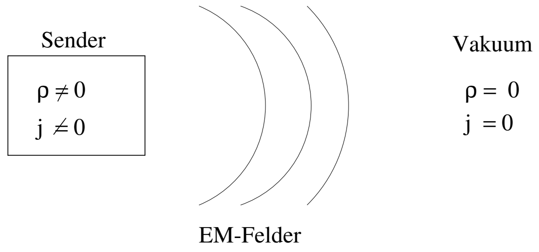

Abbildung 14.1: Typische Situation, in der elektromagnetische Wellen auftreten.

Wir bilden nun die Rotation der Gleichungen in der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned}\text{rot }(\text{rot }\underline{E}) &= \text{rot }\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot }\underline{B}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2},\\ \text{rot }(\text{rot }\underline{B}) &= \text{rot }\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot }\underline{E}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2},\end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt wieder die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht haben und im letzten Schritt die jeweils andere Maxwell-Gleichung ausgenutzt wurde.

Wir nutzen nun wieder die allgemeine Identität $\text{rot }(\text{rot }\underline{F}) = \text{grad }(\text{div }\underline{F}) - \triangle \underline{F}$ für beliebige Vektorfelder $\underline{F}$ aus (siehe Aufgabe 42). Da im Vakuum $\text{div }\underline{E} = 0$ und $\text{div }\underline{B} = 0$ gilt, folgt:

$$\boxed{\triangle \underline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \triangle \underline{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = 0.}$$

Alle Komponenten E_x, E_y, E_z, B_x, B_y und B_z des elektromagnetischen Feldes erfüllen daher die sogenannte *Wellengleichung*

$$\boxed{0 = \left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\underline{r},t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\underline{r},t).}$$

Dies ist ein theoretischer Hinweis auf die Existenz *elektromagnetischer Wellen*, die sich mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten.

Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst das eindimensionale Problem, d.h. $\psi = \psi(x,t)$:

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x,t).$$

Es ist nun zweckmäßig, neue Variable einzuführen:

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct$$

mit der Umkehrung

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \qquad\qquad ct = \frac{1}{2}(\xi - \eta).$$

Die Zweckmässigkeit dieser Wahl zeigt sich, wenn wir die Ableitungen nach ξ und η durch die nach den alten Variablen x und t ausdrücken:

$$2\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad\qquad 2\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Damit läßt sich die eindimensionale Wellengleichung kompakt auch schreiben als

$$0 = 4\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right).$$

Hieraus lesen wir zunächst ab, daß $\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ unabhängig von η ist, d.h. $\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = f_1(\xi)$ mit einer beliebigen Funktion f_1. Aus dieser Gleichung wiederum kann man folgern, daß

$$\psi(\xi, \eta) = g(\xi) + f(\eta)$$

ist. Die Funktion $g(\eta)$ ist dabei beliebig und f ist die Stammfunktion von f_1, d.h. f ist auch eine beliebige Funktion, da f_1 beliebig ist.

Somit haben wir eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung gefunden. In den ursprünglichen Variablen lautet sie

$$\boxed{\psi(x, t) = g(x - ct) + f(x + ct)}$$

mit beliebigen Funktion f und g ! Diese Lösung bezeichnet man auch als die *D'Alembert-Lösung der eindimensionalen Wellengleichung*. Die Funktion f und g werden lediglich durch Rand- und Anfangsbedingungen eingeschränkt.

Das typische Verhalten einer Lösung ist in Abbildung 14.2 dargestellt. Zur Zeit $t = 0$ hat die Lösung $g(x - ct)$ der Wellengleichung am Ort $x = 0$ den Wert $g(0)$. Zur einer späteren Zeit $t > 0$ finden wir den gleichen Wert $g(0)$ an einem anderen Ort x_0, nämlich bei $x_0 = ct$. Wir sehen also, daß sich die Lösung g mit der Geschwindigkeit c in positive x-Richtung verschiebt. Genauso überlegt man sich, daß sich die Lösung f mit der Geschwindigkeit c in negative x-Richtung verschiebt.

Wir betrachten den Fall $f = 0$. Dann führen alle Punkte mit $x - ct = \text{const} =: \eta$ zum gleichen Funktionswert $g(\eta)$. In drei Dimensioen kann man die Gleichung $x - ct = \eta$ als Definitionsgleichung einer Ebene senkrecht zur x-Achse auffassen. Man spricht daher auch von einer *ebenen Welle*. $g(x - ct)$ beschreibt dann eine *ebene Welle in x-Richtung*.
Dies kann man leicht verallgemeinern. Es sei $\underline{n}$ ein Einheitsvektor in $\underline{n}$-Richtung. Dann ist

$$\psi(\underline{r}, t) = g(\underline{n} \cdot \underline{r} - ct)$$

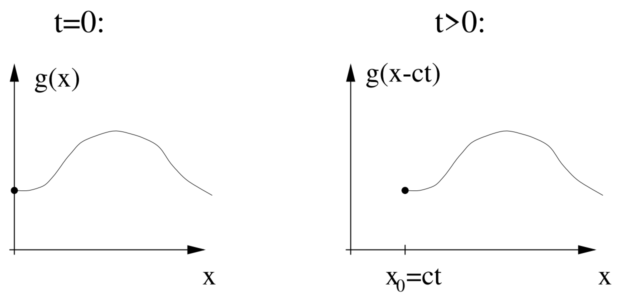

Abbildung 14.2: Allgemeine Lösung der Wellengleichung.

eine Lösung der (dreidimensionalen) Wellengleichung, die eine ebene Welle in $\underline{n}$-Richtung beschreibt.

In der Physik meint man mit dem Begriff *ebene Welle* i.a. eine *periodische Welle*

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} & \psi(\underline{r},t) &=& a\cos\left(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t+\alpha\right), \\ \text{bzw.} & \psi(\underline{r},t) &=& Ae^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}. \end{array}}$$

$\underline{k}$ bezeichnet man als den *Ausbreitungs- oder Wellenvektor*, ω als Kreisfrequenz und α als Phase. Verwandte Größen sind die *Periode* $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und die *Wellenlänge* $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Kreisfrequenz und Betrag des Wellenvektors hängen gemäß

$$\omega = ck$$

zusammen. Man beachte, daß periodische Wellen periodisch in Raum und Zeit sind. Für festes $\underline{r}$ ist $\psi_{\underline{r}}(t) = a\cos\left(\omega t+\alpha_{\underline{r}}\right)$ eine zeitlich periodische Funktion wie wir sie schon bei der Untersuchung von Schwingungen kennengelernt haben. Für festes t ist analog $\psi_t(\underline{r}) = a\cos\left(\underline{k}\cdot\underline{r}+\alpha_t\right)$ periodisch im Raum.

Es stellt sich die Frage, wann ebene Wellen als Lösungen tatsächlich auftreten. Wir wissen ja schon, daß zu DGL Anfangs- oder Randbedingungen gehhören. Diese müssen so beschaffen sein, daß ebene Wellen als Lösung in Frage kommen.

Es gibt allerdings auch weitere Lösungstypen. Ein besonders wichtiger sind die sogenannten *sphärischen Wellen* oder auch *Kugelwellen*. Dies sind Lösungen der Wellengleichung mit Kugelsymmetrie:

$$\psi(\underline{r},t) = \psi(r,t) \qquad \text{mit} \qquad r = |\underline{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Folgende Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten[25]

$$\triangle\psi(r,t) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\psi(r,t)\right)$$

ist für die folgenden Betrachtungen sehr nuützlich. Wir wollen sie nun kurz beweisen. Dazu betrachten wir eine beliebige kugelsymmetrische Funktion $\varphi(r)$. Es gilt nach Kettenregel

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \varphi'\,\frac{x}{r},$$

wobei wir die Ableitung von $\varphi(r)$ mit φ' bezeichnet haben. Entsprechend folgt für die zweite Ableitung mit der Produktregel

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial\varphi'}{\partial x}\,\frac{x}{r} + \varphi'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \varphi''\,\frac{x^2}{r^2} + \varphi'\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right).$$

Für die Ableitungen nach y und z erhält man analoge Ausdrücke. Zusammengefaßt erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
\triangle\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \\
&= \varphi''\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}\right) + \varphi'\left(\frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right) \\
&= \varphi'' + \frac{2}{r}\varphi' = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r\varphi\right).
\end{aligned}$$

Damit wäre obige Darstellung des Laplace-Operators für kugelsymmetrische Funktionen bewiesen.

Die Wellengleichung für sphärische Wellen lautet nun:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\psi\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(r\psi\right) = 0.}$$

Hierbei haben wir r im zweiten Term in die Ableitung hineingezogen. Dies ist möglich, da r bei der partiellen Ableitung nach t als Konstante zu behandeln ist. Außerdem haben wir die gesamte Gleichung mit r multipliziert.

Mit der Ersetzung $r \to x$ und $r\psi(r,t) \to \psi(x,t)$ entspricht dies einer eindimensionalen Wellengleichung für eine ebene Welle. Wir können also die bekannte D'Alembert-Lösung direkt übernehmen und erhalten als allgemeinen Ausdruck für eine Kugelwelle

[25] In dem Buch von Großmann aus den Literaturempfehlungen findet man die Darstellung des Laplace-Operators (und der anderen Differentialoperatoren) in Kugelkoordinaten. Neben dem hier angegebenen Radialanteil gibt es natürlich auch winkelabhängige Terme, die aber für kugelsymmetrische Funktionen keinen Beitrag liefern und deshalb hier weggelassen wurden.

$$\boxed{\psi(r,t) = \frac{g(r-ct)}{r} + \frac{f(r+ct)}{r}}$$

mit beliebigen Funktionen f und g.
$g(r-ct)$ und $f(r+ct)$ beschreiben Bewegungszustände, für die auf Kugelschalen um $r=0$ konstante Werte für festes t herrschen. $r-ct=$ const. $=: \eta$ und $r+ct=$ const. $=: \xi$ sind die Gleichungen für eine Kugel, deren Radius mit t zu- bzw. abnimmt. Man sagt daher auch, daß $\frac{g(r-ct)}{r}$ eine *auslaufende Kugelwelle* und $\frac{f(r+ct)}{r}$ eine *einlaufende Kugelwelle* beschreibt.
Der Punkt $r=0$ ist singulär. Dort gilt aber i.a. die Wellengleichung nicht mehr, da sich dort z.B. die Sendestation befindet. $r=0$ ist also i.a. Quelle oder Senke für sphärische Wellen.

Wie bei den ebenen Wellen hat es man häufig mit periodischen sphärischen Wellen zu tun:

$$\psi(r,t) = a\,\frac{\cos(kr-\omega t+\alpha)}{r}, \qquad \text{bzw.} \qquad \psi(r,t) = A\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}.$$

Im folgenden wollen wir diese Ergebnisse auf den Fall *elektromagnetischer Wellen*, insbesondere ebener elektromagnetischer Wellen, spezialisieren. Wir haben schon gesehen, daß elektrische und magnetische Felder im Vakuum (ohne Quellen) Wellengleichungen

$$\triangle \underline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \triangle \underline{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = 0$$

erfüllen. Die periodische Lösung für das elektrische Feld lautet dann in reeller bzw. komplexer Darstellung

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \cos(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t) \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

wobei der Wellenvektor $\underline{k}$ die Ausbreitungsrichtung der Welle bestimmt und $\underline{E}_0$ die Richtung des elektrischen Feldes.

Es stellt sich nun die Frage, welche Form $\underline{B}(\underline{r},t)$ hat, d.h. ob es weitere Einschränkungen neben der Wellengleichung gibt, und ob die Größen $\underline{E}_0$, $\underline{k}$ und ω beliebig sind. Wir wissen ja schon, daß $\omega = kc$ sein muß. Um diese Fragen zu beantworten, muß man berücksichtigen, daß $\underline{E}(\underline{r},t)$ und $\underline{B}(\underline{r},t)$ nicht nur die Wellengleichung erfüllen müssen, sondern auch die vier Maxwell-Gleichungen. Diese stellen ja auch einen Zusammenhang zwischen $\underline{E}$ und $\underline{B}$ her. Im einzelnen gilt[26]:

(1): div $\underline{E}=0$: Berechnet man die Divergenz für die oben angegebenen elektrischen Felder, so folgt

$$\underline{k}\cdot\underline{E}_0 = 0.$$

Dies impliziert $\underline{E}_0 \perp \underline{k}$, d.h. das elektrische Feld schwingt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung!

[26]Details der Rechnungen sind Gegenstand von Aufgabe 48.

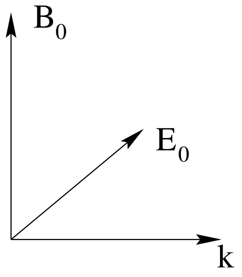

Abbildung 14.3: Wellenvektor und Richtung der Felder bilden bei elektromagnetischen Wellen ein orthogonales Dreibein.

(2): Für das obige Feld ergibt sich in komplexer Darstellung

$$\text{rot}\,\underline{E} = i\underline{k} \times \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}.$$

Da rot $\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ folgt:

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -ic\underline{k} \times \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

und somit

$$\underline{B} = \underline{B}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} \qquad \text{mit} \qquad \frac{\omega}{c}\,\underline{B}_0 = \underline{k} \times \underline{E}_0,$$

d.h. mit dem Einheitsvektor $\hat{k} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$ in $\underline{k}$-Richtung gilt wegen $\omega = kc$

$$\underline{B}_0 = \hat{k} \times \underline{E}_0.$$

(3): Analog zu (1) führt div $\underline{B} = 0$ auf die Bedingung

$$\underline{k} \cdot \underline{B}_0 = 0,$$

die aber wegen (2) schon erfüllt ist.
Auch die 4. Maxwell-Gleichung liefert keine neuen Bedingungen.

Zusammenfassend können wir also feststellen, daß $\underline{k}$, $\underline{E}_0$ und $\underline{B}_0$ paarweise orthogonal sind und somit ein orthogonales Dreibein bilden (siehe Abb. 14.3). $\underline{E}$ und $\underline{B}$ stehen immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Deshalb bezeichnet man das elektromagnetische Feld auch als *Transversalfeld*. Außerdem stehen $\underline{E}$ und $\underline{B}$ immer senkrecht aufeinander und haben die gleichen Amplituden $|\underline{E}_0| = |\underline{B}_0|$ bzw. $E_0^2 = B_0^2$.

In reeller Darstellung gilt

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \cos(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)\,, \qquad \underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}_0 \cos(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)\,, \\ \text{wobei} & \underline{k}\cdot\underline{E}_0 = \underline{k}\cdot\underline{B}_0 = 0, \qquad \underline{B}_0 = \hat{k} \times \underline{E}_0. \end{array}}$$

Speziell betrachten wir den Fall $\underline{k} = (k, 0, 0)$, d.h. eine Welle in x-Richtung. $\underline{E}_0$ und $\underline{B}_0$ haben dann die Form $\underline{E}_0 = (0, F, 0)$ und $\underline{B}_0 = (0, 0, F)$, wobei $F = |\underline{E}_0| = |\underline{B}_0|$ ist.
Die Energiedichte dieser Welle ist

$$u(\underline{r}, t) = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right) = \frac{F^2}{4\pi}\cos^2\left(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t\right).$$

Wenn wir nun über eine Periode mitteln, so erhalten wir mit dem aus Physik I bekannten Ergebnis

$$\overline{\cos^2\left(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t\right)} = \frac{1}{2}$$

für die Energiedichte

$$\overline{u(\underline{r}, t)} = \frac{F^2}{8\pi}.$$

Für den Energiestrom gilt[27]

$$\overline{\underline{S}} = \frac{c}{4\pi}\,\overline{\underline{E}\times\underline{B}} = \ldots = \frac{c}{8\pi}F^2\hat{k} = c\overline{u}\hat{k}.$$

Die Energiedichte $\overline{u}$ bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit c in Richtung $\hat{k}$.

15 Eichinvarianz der Maxwell-Gleichungen

In der Elektro- und Magnetostatik haben wir bereits die beiden Potentiale

$$\text{elektrisches Potential } \varphi \qquad \text{mit} \qquad \underline{E} = -\text{grad}\,\varphi$$

und

$$\text{Vektorpotential } \underline{A} \qquad \text{mit} \qquad \underline{B} = \text{rot}\,\underline{A}$$

eingeführt (siehe Kapitel 3 und 12.4).
Im folgenden wollen wir diese Überlegungen auf den zeitabhängigen Fall verallgemeinern. Außerdem soll untersucht werden, welche Freiheiten bei der Wahl der Potentiale bestehen und wie man diese ausnützen kann.

Im zeitabhängigen Fall definieren wir nun die Potentiale durch

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E} &= -\text{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t}, \\ \underline{B} &= \text{rot}\,\underline{A}. \end{aligned}}$$

[27] Details der Rechnung sind Gegenstand von Aufgabe 48.

Den vierdimensionalen Vektor $(\varphi, \underline{A})$ bezeichnet man auch als *Viererpotential*[28]. In diesem Zusammenhang wird φ auch als *Skalarpotential* bezeichnet und $\underline{A}$ als *Vektorpotential*.

Das Viererpotential hat keine direkte physikalische Bedeutung[29], sondern nur die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$. Sie gehen in die Lorentz-Kraft ein, über die wir ja die Felder eingeführt haben, und ihre Auswirkungen können somit direkt beobachtet werden. Daher gibt es bei der Wahl der Felder keine Freiheiten. Dies ist anders für die Potentiale. Wir wissen ja schon aus der Mechanik, daß das Potential einer konservativen Kraft nicht eindeutig bestimmt ist. Man kann z.B. immer eine Konstante hinzuaddieren, ohne die Kraft zu ändern. Auch in der Mechanik hat das Potential keine direkte physikalische Bedeutung, wohl aber Potentialdifferenzen. Sie geben gerade die geleistete Arbeit an. Die Freiheiten bei der Wahl der Potentiale in der Elektrodynamik hatten wir schon früher ausgenutzt durch die Wahl der sog. Coulomb-Eichung $\text{div}\,\underline{A} = 0$ bei der Ableitung der Integralformel für das Vektorpotential in Abschnitt 12.4.

Im folgenden werden wir für die Zeitableitungen $\frac{\partial}{\partial t}$ eine Abkürzung einführen und sie durch einen Punkt $\dot{}$ kennzeichnen. Die Maxwell-Gleichungen lauten dann:

$$\begin{array}{ll} 1)\ \text{div}\,\underline{E} = 4\pi\rho, & 3)\ \text{div}\,\underline{B} = 0, \\ 2)\ \text{rot}\,\underline{E} = -\frac{1}{c}\dot{\underline{B}}, & 4)\ \text{rot}\,\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{j} + \frac{1}{c}\dot{\underline{E}}. \end{array}$$

Mit unserer Definition von φ und $\underline{A}$ sind die Gleichungen 2) und 3) automatisch erfüllt:

$$3): \qquad \text{div}\,\underline{B} = \text{div}\,(\text{rot}\,\underline{A}) = 0,$$

da allgemein die Divergenz der Rotation verschwindet und

$$\begin{aligned} 2): \qquad \text{rot}\,\underline{E} + \frac{1}{c}\dot{\underline{B}} &= \text{rot}\left(-\text{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\dot{\underline{A}}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\,\underline{A}) \\ &= -\text{rot}\,(\text{grad}\,\varphi) - \frac{1}{c}\text{rot}\,\dot{\underline{A}} + \frac{1}{c}\text{rot}\,\dot{\underline{A}} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Differentiationsreihenfolge vertauscht und ausgenutzt haben, daß die Rotation eines Gradienten verschwindet. Wir sehen außerdem, warum im dynamischen Fall der Zusatzterm $-\frac{1}{c}\dot{\underline{A}}$ notwendig ist.

Durch die Einführung der Potentiale haben wir also schon zwei der vier Maxwell-Gleichungen automatisch erfüllt. Es verbleiben die beiden Gleichungen, die die Ladungen und Ströme enthalten:

$$1): \qquad 4\pi\rho = \text{div}\,\underline{E} = \text{div}\left(-\text{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\dot{\underline{A}}\right) = -\left(\triangle\varphi + \frac{1}{c}\text{div}\,\dot{\underline{A}}\right)$$

[28] Diese vierdimensionalen Vektoren sind besonders im Rahmen der Relativitätstheorie nützlich.

[29] Es gibt aber in der Quantenmechanik einen Effekt, den sog. Aharanov-Bohm-Effekt, für den das nicht unbedingt gilt.

und

$$
\begin{aligned}
4):\qquad -\frac{4\pi}{c}\underline{j} &= \frac{1}{c}\dot{\underline{E}} - \text{rot } \underline{B} = \frac{1}{c}\left(-\text{grad } \dot{\varphi} - \frac{1}{c}\ddot{\underline{A}}\right) - \text{rot } (\text{rot } \underline{A}) \\
&= -\frac{1}{c}\text{grad } \dot{\varphi} - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}} - \text{grad } (\text{div } \underline{A}) + \triangle \underline{A} \\
&= \Box \underline{A} - \text{grad } \left(\frac{1}{c}\dot{\varphi} + \text{div } \underline{A}\right)
\end{aligned}
$$

wobei wir wieder die aus Aufgabe 42 bekannte Formel für die doppelte Rotation benutzt haben. Außerdem haben wir als Abkürzung den Operator

$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

eingeführt, der als *Quabla- oder D'Alembert-Operator* bezeichnet wird[30].

Mit der Abkürzung[31]

$$L := \frac{1}{c}\dot{\varphi} + \text{div } \underline{A}$$

kann man die beiden Gleichungen auch folgendermaßen schreiben:

$$\Box\varphi + \frac{1}{c}\dot{L} = -4\pi\rho \qquad \text{und} \qquad \Box\underline{A} - \text{grad } L = -\frac{4\pi}{c}\underline{j}.$$

bzw. mit dem *Viererstrom* $(c\rho, \underline{j})$ und der *Viererableitung* $(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\text{grad })$

$$\Box(\varphi, \underline{A}) = -\frac{4\pi}{c}(c\rho, \underline{j}) - \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\text{grad }\right)L.$$

Damit haben wir zwei Gleichungen, die unsere Potentiale mit den Strömen und Ladungen in Verbindung bringen. Diese Gleichungen sind äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen. Sie sind allerdings miteinander gekoppelt, da in der Hilfsgröße L sowohl φ als auch $\underline{A}$ auftreten.

15.1 Lorentz-Eichung

Wenn man $L = 0$ wählen kann, dann würden sich die Gleichungen zu

$$\Box(\varphi, \underline{A}) = -\frac{4\pi}{c}(c\rho, \underline{j})$$

vereinfachen, wobei auf der rechten Seite nur noch die Inhomogenitäten (Quellen) stehen. Ohne diese Inhomogenitäten reduziert sich diese Gleichung sogar zu einer Wellengleichung

$$\Box(\varphi, \underline{A}) = 0$$

[30]Die Bezeichnung Quabla-Operator setzt sich zusammen aus **Qua**drat und Na**bla** und spielt auf die Form des Symbols und die Verwandtschaft mit dem Nabla-Operator $\underline{\nabla}$ an.

[31]L hat keine tiefere physikalische Bedeutung.

für die Potentiale. Die Wahl $L = 0$ hätte also offensichtliche Vorteile. Im folgenden wollen wir nun die Frage untersuchen, wann diese Wahl möglich ist.
Dabei nutzen wir aus, daß die Potentiale $(\varphi, \underline{A})$ nicht eindeutig bestimmt sind. Stattdessen hat man eine sogenannte *Eichfreiheit*, denn mit einer beliebigen Funktion $\chi = \chi(\underline{r}, t)$ können wir die Potentiale folgendermaßen transformieren:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\varphi} &= \varphi + \frac{1}{c}\,\dot{\chi}, \\ \overline{\underline{A}} &= \underline{A} - \text{grad}\,\chi. \end{aligned}}$$

Der Übergang $(\varphi, \underline{A}) \xrightarrow{\chi} (\overline{\varphi}, \overline{\underline{A}})$ heißt auch *Eichtransformation*.

Das Entscheidende ist nun, daß die Elektrodynamik *eichinvariant* ist, da sich die $\underline{E}$- und $\underline{B}$-Felder unter der oben angegebenen Eichtransformationen nicht ändern:

$$\begin{aligned} \overline{\underline{B}} &= \text{rot}\,\overline{\underline{A}} = \text{rot}\,(\underline{A} - \text{grad}\,\chi) = \text{rot}\,\underline{A} - \text{rot}\,(\text{grad}\,\chi) = \text{rot}\,\underline{A} = \underline{B}, \\ \overline{\underline{E}} &= -\text{grad}\,\overline{\varphi} - \frac{1}{c}\dot{\overline{\underline{A}}} = -\text{grad}\left(\varphi + \frac{1}{c}\dot{\chi}\right) - \frac{1}{c}\left(\dot{\underline{A}} - \frac{\partial}{\partial t}(\text{grad}\,\chi)\right) \\ &= -\text{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\text{grad}\,\dot{\chi} - \frac{1}{c}\dot{\underline{A}} + \frac{1}{c}\text{grad}\,\dot{\chi} = -\text{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\dot{\underline{A}} = \underline{E}. \end{aligned}$$

Die neuen Potentiale führen also zu den gleichen physikalischen Feldern wie die alten. Man bezeichnet $(\varphi, \underline{A})$ auch als *Eichfelder*[32].

Wir wollen nun die Eichfreiheit ausnutzen. Wir gehen daher aus von einem Viererpotential $(\varphi, \underline{A})$ mit

$$L = \frac{1}{c}\dot{\varphi} + \text{div}\,\underline{A} \neq 0.$$

Wir nehmen nun eine Eichtransformation $\varphi \to \overline{\varphi} = \varphi + \frac{1}{c}\,\dot{\chi}$ und $\underline{A} \to \overline{\underline{A}} = \underline{A} - \text{grad}\,\chi$ vor. Die Hilfsgröße L transformiert sich dann folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \overline{L} &= \frac{1}{c}\dot{\overline{\varphi}} + \text{div}\,\overline{\underline{A}} = \frac{1}{c}\left(\dot{\varphi} + \frac{1}{c}\ddot{\chi}\right) + \text{div}\,(\underline{A} - \text{grad}\,\chi) = \left(\frac{1}{c}\dot{\varphi} + \text{div}\,\underline{A}\right) - \left(\triangle\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi}\right) \\ &= L - \Box\chi. \end{aligned}$$

Ist χ also eine Lösung von $\Box\chi = L$, so ist $\overline{L} = 0$. Das zugehörige Viererpotential erfüllt dann

$$\Box(\overline{\varphi}, \overline{\underline{A}}) = -\frac{4\pi}{c}(c\rho, \underline{j}).$$

Die Eichung mit $L = 0$, d.h. mit

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \text{div}\,\underline{A} = 0,$$

[32] Im Englischen: Gauge fields.

heißt auch *Lorentz-Eichung*.

Man beachte, daß das Viererpotential durch die Forderung $L = 0$ nicht eindeutig festgelegt wird. Eichtransformationen $(\varphi, \underline{A}) \stackrel{\chi}{\to} (\overline{\varphi}, \overline{\underline{A}})$ mit $L = 0 \stackrel{\chi}{\to} \overline{L} = 0$ sind immer noch möglich. Da $\overline{L} = L - \Box\chi$, muß das zugehörige χ dann Lösung der Wellengleichung $\Box\chi = 0$ sein.

15.2 Coulomb-Eichung

Abschließend wollen wir noch die schon bekannte *Coulomb-Eichung* untersuchen, die auch als *transversale Eichung* bezeichnet. Der Grund für diese Bezeichnungen wird später noch klar werden. Bekanntlich gilt bei der Coulomb-Eichung

$$\mathrm{div}\,\underline{A} = 0.$$

Betrachten wir daher ein Vektorpotential $\underline{A}$, für das $\mathrm{div}\,\underline{A} \neq 0$ ist. Die Frage ist nun, ob man eine Eichtransformation χ finden kann, so daß $\mathrm{div}\,\overline{\underline{A}} = 0$ wird. Da $\overline{\underline{A}} = \underline{A} - \mathrm{grad}\,\chi$ haben wir

$$0 \stackrel{!}{=} \mathrm{div}\,\overline{\underline{A}} = \mathrm{div}\,\underline{A} - \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\chi) = \mathrm{div}\,\underline{A} - \triangle\chi.$$

Unsere gesuchte Eichtransformation genügt also der Gleichung

$$\triangle\chi = \mathrm{div}\,\underline{A}.$$

Dies ist natürlich nichts anderes als die Poisson-Gleichung, deren allgemeine Lösung wir ja schon früher bestimmt haben (siehe z.B. Aufgabe 24). Die Coulomb-Eichung kann also tatsächlich immer durchgeführt werden.

Die Gleichungen für das Viererpotential, die wir aus den Maxwell-Gleichungen abgeleitet haben, vereinfachen sich unter der Coulomb-Eichung zu

$$\begin{aligned} &1) \qquad \triangle\overline{\varphi} = -4\pi\rho, \\ &2) \qquad \Box\overline{\underline{A}} = -\frac{4\pi}{c}\underline{j} + \frac{1}{c}\mathrm{grad}\,\dot{\overline{\varphi}}. \end{aligned}$$

Gleichung 1) macht die Bezeichnung *Coulomb-Eichung* verständlich. Das elektrische Potential ist – genau wie das Coulombpotential in der Elektrostatik – durch die *momentane* Ladungsverteilung gegeben[33]. Wir können daher die Lösung sofort angeben:

$$\overline{\varphi}(\underline{r}, t) = \int \frac{\rho(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\, d^3r'.$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Formel aus der Elektrostatik auf den Fall zeitabhängiger Ladungsdichten.

[33] Man beachte, daß wir früher immer zeitunabhängige Ladungsdichten vorausgesetzt hatten!

Wir wollen nun zeigen, daß die Gleichungen 1) und 2) entkoppeln. Dazu werden wir die explizite Lösung für $\overline{\varphi}$ in die zweite Gleichung einsetzen. Diese enthält aber noch die Ladungsdichte ρ. Wir werden daher versuchen, die Ladungsdichte durch andere Größen auszudrücken. Wir bilden zunächst

$$\text{grad}\,\dot{\overline{\varphi}} = \text{grad}\,\left(\int \frac{\dot{\rho}(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\, d^3 r'\right) = -\text{grad}\,\left(\int \frac{\underline{\nabla}' \cdot \underline{j}(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\right) d^3 r'.$$

Dabei haben wir die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} = -\text{div}\,\underline{j}$ ausgenutzt, um die Ladungsdichte durch die Stromdichte zu ersetzen. $\underline{\nabla}'$ ist der Nabla-Operator, der auf die gestrichenen Koordinaten $\underline{r}'$ wirkt.

Wir betrachten nun die Aufspaltung der Stromdichte $\underline{j}$ in einen quellenfreien Anteil und einen wirbelfreien Anteil:

$$\begin{aligned}
\underline{j}(\underline{r}, t) &= \int \underline{j}(\underline{r}', t)\delta(\underline{r} - \underline{r}')d^3 r' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int \underline{j}(\underline{r}', t)\triangle\left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\right) d^3 r' \\
&= -\frac{1}{4\pi}\triangle\left(\int \frac{\underline{j}(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\, d^3 r'\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\text{rot}\left(\text{rot}\left(\frac{\int \underline{j}(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\, d^3 r'\right)\right) - \text{grad}\left(\text{div}\left(\int \frac{\underline{j}(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\, d^3 r'\right)\right)\right] \\
&=: \underline{j}_t(\underline{r}, t) + \underline{j}_l(\underline{r}, t).
\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile haben wir das Ergebnis $\triangle\frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$ aus Aufgabe 24 benutzt. In der dritten Zeile wurde der Laplace-Operator $\triangle$ aus dem Integral herausgezogen, da er nur auf die Variable $\underline{r}$ und nicht $\underline{r}'$ wirkt. Da der Integrand ein Vektorfeld ist, muß man dies komponentenweise interpretieren. In der vierten Zeile wurde dann die Formel für die doppelte Rotation aus Aufgabe 42 angewendet.

Man sieht nun sofort, daß

$$\text{div}\,\underline{j}_t(\underline{r}, t) = 0 \qquad \text{und} \qquad \text{rot}\,\underline{j}_l(\underline{r}, t) = 0$$

ist, d.h. $\underline{j}_t(\underline{r}, t)$ ist quellenfrei und $\underline{j}_l(\underline{r}, t)$ wirbelfrei. Dies folgt aus den bekannten Identitäten div rot $= 0$ und rot grad $= 0$.
Man bezeichnet $\underline{j}_t(\underline{r}, t)$ auch als *transversalen Anteil* und $\underline{j}_l(\underline{r}, t)$ als *longitudinalen Anteil* von $\underline{j}(\underline{r}, t)$. Die oben angegeben Aufspaltung gilt natürlich für beliebige Vektorfelder, nicht nur für die Stromdichte.

Im folgenden wollen wir das Integral, das bei der Berechnung von grad $\dot{\varphi}$ aufgetreten ist, umformen und dann durch $\underline{j}_t$ und $\underline{j}_l$ ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\underline{\nabla}' \cdot \underline{j}(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \, d^3r' &= \int \underline{\nabla}' \cdot \left(\frac{\underline{j}(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) d^3r' - \int \underline{j}(\underline{r}', t) \cdot \underline{\nabla}' \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) d^3r' \\
&= \oint_{F \to \infty} \frac{\underline{j}(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \cdot \underline{df} + \int \underline{j}(\underline{r}', t) \cdot \underline{\nabla} \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) d^3r' \\
&= \int \underline{j}(\underline{r}', t) \cdot \underline{\nabla} \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) d^3r' \\
&= \underline{\nabla} \cdot \left(\int \frac{\underline{j}(\underline{r}', t)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \, d^3r' \right).
\end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile haben wir die Produktregel div $(\varphi \underline{A}) = \varphi$ div $\underline{A} + \underline{A} \cdot$ grad φ benutzt. In der dritten Zeilen haben wir den ersten Term mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral umgewandelt. Im zweiten Term haben wir $\underline{\nabla}' \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) = -\underline{\nabla} \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right)$ ausgenutzt. Das Oberflächenintegral verschwindet, wenn die Stromdichte nur in einem beschränkten Raumbereich von Null verschieden ist oder im Unendlichen schnell genug abfällt. Dabei ist zu beachten, daß die Oberfläche F im Unendlichen liegt, da die Volumenintegrale über den gesamten Raum zu bilden sind[34].

Bilden wir den Gradienten der gerade abgeleiteten Identität, so sehen wir durch Vergleich mit der früher hergeleiteten Gleichung für grad $\dot{\varphi}$ und der Aufspaltung von $\underline{j}$ in einen transversalen und einen longitudinalen Anteil, daß

$$\text{grad}\, \dot{\varphi} = 4\pi \underline{j}_l.$$

Deshalb folgt

$$\begin{aligned}
\Box \underline{A} &= -\frac{4\pi}{c} \underline{j} + \frac{1}{c} \text{grad}\, \dot{\varphi} = -\frac{4\pi}{c} (\underline{j}_t + \underline{j}_l) + \frac{1}{c}\, 4\pi \underline{j}_l \\
&= -\frac{4\pi}{c} \underline{j}_t.
\end{aligned}$$

Das Vektorpotential wird also in der Coulomb-Eichung nur durch den transversalen Anteil $\underline{j}_t$ der Stromdichte bestimmt. Deshalb bezeichnet man die Coulomb-Eichung auch als *transversale Eichung*.

16 Lösung der inhomogenen Wellengleichung

In den vorigen Abschnitten sind uns häufiger inhomogene Wellengleichungen vom Typ

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\underline{r}, t) = -4\pi f(\underline{r}, t)$$

[34] Streng genommen muß man hier einen geeigneten Grenzübergang durchführen.

begegnet, wobei $f(\underline{r}, t)$ eine vorgegebene Funktion ist. Im Folgenden wollen wir diese Gleichung lösen.
Zunächst bestimmen wir eine Art "Elementarlösung", die sog. *zeitabhängige Greensche Funktion* $G(\underline{r}, t; \underline{r}', t')$. Sie ist definiert als Lösung einer Wellengleichung mit der Inhomogenität

$$f(\underline{r}, t) = \delta(\underline{r} - \underline{r}')\delta(t - t'),$$

wobei $\underline{r}'$ und t' beliebig aber fest vorgegeben sind.
Ist $G(\underline{r}, t; \underline{r}', t')$ bekannt, so kann man die Lösung der inhomogenen Wellengleichung angeben, soweit keine zusätzlichen Randbedingungen zu erfüllen sind. Sie lautet

$$\boxed{\psi(\underline{r}, t) = \int G(\underline{r}, t; \underline{r}', t') f(\underline{r}, t) d^3r' dt'.}$$

Dies läßt sich leicht explizit überprüfen, wenn man auf diese Gleichung den Quabla-Operator anwendet. Dieser wirkt nur auf die Koordinaten $\underline{r}$ und t, nicht aber auf $\underline{r}'$ und t':

$$\begin{aligned} \Box\psi(\underline{r}, t) &= \int (\Box G(\underline{r}, t; \underline{r}', t')) f(\underline{r}, t) d^3r' dt' \\ &= -4\pi \int (\delta(\underline{r} - \underline{r}')\delta(t - t')) f(\underline{r}, t) d^3r' dt' = -4\pi f(\underline{r}, t). \end{aligned}$$

Im Folgenden wollen wir nun die Greensche Funktion explizit bestimmen. Dazu wenden wir einen Trick an, den wir schon in Physik I kennengelernt haben, z.B. bei der Lösung der Schwingungsgleichung. Durch Anwendung der Fouriertransformation vereinfachen sich nämlich Differentialgleichungen, da aus den Ableitungen Multiplikation werden. Dies wollen wir auch hier ausnutzen. Zunächst sei an die Fourierdarstellung der Deltafunktion erinnert:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{\pm ik(x - x_0)},$$

wobei die Identität auf Grund der Symmetrie der Deltafunktion für beide Wahlen des Vorzeichens gilt. Damit können wir die Inhomogenität der Gleichung für die Greensche Funktion schreiben als

$$\delta(\underline{r} - \underline{r}')\delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\underline{k}\cdot(\underline{r} - \underline{r}')} e^{-i\omega(t - t')}.$$

Dabei haben wir, der üblichen Konvention folgend, die Vorzeichen für die räumliche und zeitliche Fouriertransformation unterschiedlich gewählt. Die Fourierdarstellung der zu bestimmenden Funktion $G(\underline{r}, t; \underline{r}', t')$ lautet

$$G(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\underline{k}, \omega) e^{i\underline{k}\cdot(\underline{r} - \underline{r}')} e^{-i\omega(t - t')},$$

wobei die Fouriertransformierte $g(\underline{k}, \omega)$ (noch) unbekannt ist.

Setzt man dies in die Wellengleichung ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
\Box G(\underline{r}, t; \underline{r}', t') &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\underline{k}, \omega) \Box e^{i[\underline{k}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')-\omega(t-t')]} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\underline{k}, \omega) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) e^{i[\underline{k}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')-\omega(t-t')]} \\
&\stackrel{!}{=} -4\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t') = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i[\underline{k}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')-\omega(t-t')]}.
\end{aligned}$$

Damit muß gelten

$$g(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

und deshalb

$$G(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{c^2}{c^2k^2 - \omega^2} e^{i\underline{k}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')} e^{-i\omega(t-t')}.$$

Im Prinzip ist das schon eine vollständige Lösung des Problems. Die Greensche Funktion ist nun explizit bekannt, wenn auch in etwas unhandlicher Form als kompliziertes Integral.
Tatsächlich kann man das Integral mit Hilfe von funktionentheoretischen Methoden explizit berechnen. Dies ist etwas aufwändig und soll daher nicht vorgeführt werden. Am Ende erhält man die sog. *retardierte Greensche Funktion*

$$\boxed{G(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}.}$$

An ihr erkennt man, dass sich 'Störungen' mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Betrachtet man ein Störung zur Zeit $t = t'$ am Ort $\underline{r} = \underline{r}'$, so erreicht diese den Ort $\underline{r}$ ($\neq \underline{r}'$) erst nach der Zeit $t - t' = \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$.
Nachdem wir nun die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung gefunden haben, können wir die Potentiale in der Lorentz-Eichung, die ja durch inhomogene Wellengleichungen bestimmt sind, explizit angeben:

$$\boxed{\varphi(\underline{r}, t) = \int \frac{\rho\left(t - t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r', \qquad \underline{A}(\underline{r}, t) = \int \frac{\underline{j}\left(t - t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r'.}$$

Diese Form bezeichnet man auch als *retardierte Potential*, da das Potential am Ort $\underline{r}$ zur Zeit t nur durch die Wert der Ladungs- bzw. Stromdichte an den früheren Zeitpunkten $t - t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$ bestimmt wird.