Prof. Dr. A. Schadschneider
C. Eilhardt, S. Nowak Wintersemester 2011/12

Theoretische Physik in 2 Semestern II
1. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem1112.html

Die Präsenzübungen werden am Freitag, den 14.10. besprochen. Die restlichen Übungen werden am Dienstag, den 18.10. in der Vorlesung abgegeben und am darauf folgenden Freitag besprochen.

1. Komplexe Zahlen *Präsenzübung (keine Punkte)*

a) Bringen Sie folgende Ausdrücke

$$(4+2i)(3+3i) \qquad e^{\pi i/4} \qquad \frac{4+2i}{3+3i} \qquad i^i$$

in die Form $a + ib$ (wobei $a, b \in \mathbb{R}$) und berechnen Sie die Beträge.

b) Bestimmen sie die Lösungsmenge von $z^2 - 4z + 5 = 0$.

2. Gauß-Funktionen *Präsenzübung (keine Punkte)*

In der Quantenmechanik, und später auch in der statistischen Physik, werden häufig Funktionen vom Typ

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

verwendet und es ist oft notwendig, über diese Funktionen zu integrieren. Da $f(x)$ keine Stammfunktion besitzt, die man durch elementare Funktionen ausdrücken kann, sind solche Integrale nicht trivial. Trotzdem kann man das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

analytisch lösen.

a) Zeigen Sie:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx\right)^2 = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-ar^2} dr \qquad (1)$$

Hinweis: Schreiben sie den linken Ausdruck von (1) so um, dass Sie zwei Integrale erhalten. Transformieren Sie dann in Polarkoordinaten.

b) Berechnen Sie das Integral auf der rechten Seite von (1) und zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

c) Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung, häufig auch Gauß-Verteilung genannt (nach Carl Friedrich Gauß), lautet

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) .$$

Zeigen Sie, dass $\rho(x)$ normiert ist, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\; dx = 1$.

d) Berechnen sie den Erwartungswert der Normalverteilung, d.h. zeigen Sie, dass $\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\; dx = \mu$ ist.

e) Berechnen sie die Varianz der Normalverteilung, d.h. zeigen Sie, dass $\left\langle (x-\mu)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \rho(x)\; dx = \sigma^2$ ist.

3. De-Broglie-Wellenlänge *3+3+4 Punkte*

a) Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge einen Elektrons ($m \approx 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg, $v = 1000$ m/s), eines Tennisballs ($m = 0,06$ kg, $v = 50$ m/s) und einer Concorde ($m = 180.000$ kg, $v = 600$ m/s).

b) Das Elektron wird an einem Gitter mit Gitterkonstante $a = 1\ \mu$m gebeugt. Bei welchem Winkel tritt das erste Hauptmaximum der Beugung auf?

c) Der Tennisball wird an einem Tennisnetz mit Maschenweite $a = 10$ cm gebeugt. Bei welchem Winkel tritt hier die das Hauptmaximum auf? Wie müsste die Maschenweite gewählt werden, damit der gleiche Winkel wie beim Elektron auftritt?

4. Compton-Effekt *1+4+8+3+4 Punkte*

Ein Photon mit Wellenlänge λ trifft mit dem Streuwinkel ϕ auf ein ruhendes, freies Elektron. Nach dem Stoß hat das Photon die (größere) Wellenlänge λ', da es einen Teil der Energie an das Elektron weitergegeben hat.

a) Geben Sie die Energie E_γ und den Impuls p_γ des Photons sowie die Energie E_{e^-} und den Impuls p_{e^-} des Elektrons vor dem Stoß an.
Hinweis: Benutzen Sie die relativistische Energie-Impulsbeziehung $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ für die Gesamtenergie eines Teilchens.

b) Benutzen Sie den Energie- und Impulserhaltungssatz, um die Größen aus Teil a) mit den entsprechenden Größen E'_γ, p'_γ, E'_{e^-} und p'_{e^-} nach dem Stoß in Beziehung zu setzen.

c) Verwenden Sie die Beziehungen aus a) und b), um die Wellenlängenänderung $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\phi)$ des Photons bei der Streuung herzuleiten. Dabei ist $\lambda_C = h/(m_e c)$, wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum, m_e die Elektronenmasse und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

d) Leiten Sie aus der Änderung der Wellenlänge und dem Energieerhaltungssatz die Energien E'_γ und E'_{e^-} des Photons und Elektrons nach dem Stoß als Funktion von E_γ und ϕ her.

e) Wie groß ist die maximale Energie, die auf das Elektron übertragen werden kann und bei welchem Winkel tritt sie auf? Diskutieren Sie die Fälle $E_\gamma \ll m_e c^2$ und $E_\gamma \gg m_e c^2$.