Prof. Dr. A. Schadschneider
C. Eilhardt, S. Nowak Wintersemester 2011/12

Theoretische Physik in 2 Semestern II

3. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem1112.html

Abgabe: *Montag, 31. Oktober (!!! Achtung, ein Tag früher als sonst !!!)*

8. Hermitesche Operatoren

5+4+4 Punkte

a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine *reelle* Matrix genau dann hermitesch ist, wenn sie gleich ihrer transponierten Matrix ist, d.h. wenn $A = A^T$. Zeigen Sie, dass eine *komplexe* hermitesche Matrix die Bedingung $A = A^\dagger$ erfüllt. Dabei bedeutet $A^\dagger$ (gesprochen: A dagger), dass A transponiert und komplex konjugiert wird, also $A^\dagger = (A^*)^T$.

b) Zeigen Sie, dass Eigenwerte von beliebigen hermiteschen Operatoren reell sind.

c) Gegeben seien die Eigenzustände $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ des hermiteschen Operators $\hat{A}$ zu den Eigenwerten a und b. Zeigen Sie, dass $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ zueinander orthogonal sind, falls $a \neq b$.

9. Quantenmechanische Zustände

1+6+2+3 Punkte

Gegeben sei ein Zweizustandssystem mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 3 & -4i \\ \Box & -3 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie $\Box$ so, dass $\hat{H}$ hermitesch ist.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von $\hat{H}$.

c) Die beiden Eigenzustände werden nun mit $|1\rangle$ und $|2\rangle$ bezeichnet. Zeigen Sie explizit: $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta ist ($i, j \in \{1, 2\}$).
Hinweis: Gegebenenfalls müssen Sie die in b) gefunden Eigenzustände anders normieren.

d) Zeigen Sie, dass auch die Zustände $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1\rangle + |2\rangle\Big)$ und $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1\rangle - |2\rangle\Big)$ normiert und orthogonal zueinander sind.

10. Kommutator

2+3+5 Punkte

Der Kommutator zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist definiert durch $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Zeigen Sie für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$:

a) $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$ und $[\lambda\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \lambda\hat{B}] = \lambda[\hat{A}, \hat{B}]$

b) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$ und $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

c) $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$

11. Potentialstufe II

5+2+8 Punkte

Gegeben sei das gleiche Stufenpotential wie in Aufgabe 7, d.h.

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ V_0, & x > 0. \end{cases}$$

Wir betrachten nun ein Teilchen mit einer Energie $E > V_0$.

a) Lösen Sie die entsprechende Schrödingergleichung mit dem Ansatz

$$\Psi(x) = \begin{cases} A\, e^{ik_1 x} + B\, e^{-ik_1 x}, & x \leq 0 \\ C\, e^{ik_2 x}, & x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

und bestimmen Sie k_1 und k_2.

b) Welche physikalische Bedeutung haben die drei Terme in (1)?

c) Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten $R = |B|^2/|A|^2$ und den Transmissionskoeffizienten $T = 1 - R$ in Abhängigkeit von k_1 und k_2. Welches Ergebnis würden Sie klassisch erwarten?
Hinweis: Bestimmen Sie das Verhältnis A/B durch die Stetigkeitsbedingung von $\Psi(x)$ und $\Psi'(x)$ bei $x = 0$.