Prof. Dr. A. Schadschneider
C. Eilhardt, S. Nowak

Theoretische Physik in 2 Semestern II

4. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem1112.html

Abgabe: *Dienstag, 8. November*

Hinweis zur Klausur: Aufgrund der Vollversammlung am 12.12. muss die bisher angekündigte Klausur verschoben werden. Sie wird deshalb am 13.12. um 10.00 Uhr in Hörsaal II stattfinden.

12. Schwarz'sche Ungleichung *8 Punkte*

Zeigen Sie, dass für zwei beliebige Zustände $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ die Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle$$

gilt.
Hinweis: Betrachten Sie den Ausdruck $\langle\phi + a\psi|\phi + a\psi\rangle$, wobei $a \in \mathbb{C}$, und verwenden Sie, dass $\langle\chi|\chi\rangle \geq 0$ sein muss für alle möglichen Zustände χ.

13. Operatorwertige Funktionen *3+3+2+6 Punkte*

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{K}$ heißt analytisch, wenn Sie als Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darstellbar ist (z.B. sind Polynome, exp, sin, cos, etc. analytisch). Dieses Konzept kann man leicht auf Operatoren verallgemeinern: Eine Funktion f angewandt auf einen Operator A ergibt den Operator $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$. Dabei bedeutet A^n das n-malige Ausführen des Operators A. Zeigen Sie:

a) Ist $|\psi\rangle$ Eigenzustand zu A mit Eigenwert λ, dann ist $|\psi\rangle$ auch Eigenzustand zu $f(A)$ mit Eigenwert $f(\lambda)$.

b) Sind alle Koeffizienten reell, d.h. $a_n \in \mathbb{R}$ für alle n, dann gilt: Ist A hermitesch, so ist auch $f(A)$ hermitesch. Zeigen Sie damit, dass der Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r})$ hermitesch ist.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Aufgabe, dass der Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ hermitesch ist.

d) Für $[A, [A, B]] = 0$ gilt $[f(A), B] = f'(A)[A, B]$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst durch vollständige Induktion, dass $[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$

14. Harmonischer Oszillator *5+7+9 Punkte*

Ein geladenes Teilchen mit Ladung q befindet sich im eindimensionalen Potential eines harmonischen Oszillators. Bei einem äußeren homogenen elektrischen Feld $\vec{E}$ lautet der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \alpha\hat{x} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - \alpha\hat{x}\,,$$

wobei $\alpha = q|\vec{E}|$ und $\hat{H}_0$ der Hamilton-Operator des Systems ohne Feld ($\vec{E} = 0$) ist.

a) Wir betrachten zunächst den Fall ohne äußeres Feld ($\alpha = 0$). In der Vorlesung wurden die Leiteroperatoren

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

und

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

eingeführt. Berechnen Sie nun $\hat{x}$ und $\hat{p}$ als Linearkombination von $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$. Zeigen Sie damit, dass der Erwatungswert von $\hat{x}$ und $\hat{p}$ in allen Eigenzuständen $|n\rangle$ von $\hat{H}_0$ gleich 0 ist.

b) Zeigen Sie, dass sich $\hat{H}$ durch geeignete Variablentransformation $\hat{\xi} = \hat{x} - \Delta x$ als

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{\xi}^2 - \Delta E$$

schreiben lässt und bestimmen Sie Δx und ΔE. Welchen Wert haben die Eigenenergien sowie der Erwartungswert von $\hat{x}$ und $\hat{p}$?

c) Führen Sie die Operatoren $\hat{b} = \hat{a} + \gamma$ sowie $\hat{b}^\dagger = \hat{a}^\dagger + \gamma$ mit einer Konstanten γ ein und überzeugen Sie sich, dass $\hat{b}$ und $\hat{b}^\dagger$ die gleiche Kommutatorrelation erfüllen wie $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$. Bestimmen Sie γ so, dass sich $\hat{H}$ in der Form

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right) - \Delta E$$

schreiben lässt.

15. Kohärente Zustände *7 Punkte*

Wir betrachten wieder den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Hamiltonian

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) ,$$

wobei $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ mit den in der Vorlesung eingeführten Leiteroperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$. Zeigen Sie, dass der sogenannte kohärente Zustand

$$|z\rangle := e^{z\hat{a}^\dagger} |0\rangle$$

Eigenzustand zum Absteigeoperator $\hat{a}$ mit Eigenwert $z \in \mathbb{C}$ ist.