Prof. Dr. A. Schadschneider
C. Eilhardt, S. Nowak Wintersemester 2011/12

Theoretische Physik in 2 Semestern II
6. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem1112.html

Abgabe: *Dienstag, 22. November*

20. Wasserstoffatom
2+3+4+6 Punkte

Wie aus der Vorlesung bekannt wird das Wasserstoffatom durch die Quantenzahlen n, l und m charakterisiert. Die zugehörigen Eigenzustände seien durch $|n, l, m\rangle$ bezeichnet und die entsprechenden Wellenfunktionen durch $\phi(\vec{r})_{n,l,m}$. Ein Wasserstoffatom befindet sich im Zustand

$$|\psi\rangle = N\left(3|1,0,0\rangle + 2|2,1,0\rangle + \sqrt{2}|2,1,1\rangle + |3,2,1\rangle\right).$$

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante N.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einer Energiemessung die Grundzustandsenergie, bei einer Drehimpulsmessung $L^2 = 6\hbar^2$ und bei einer Messung der z-Komponente des Drehimpulses $L_z = \hbar$ gemessen?

c) Wie groß sind die Erwartungswerte der Energie, des Quadrats des Drehimpulses sowie der z-Komponente des Drehimpulses?

d) Die Grundzustands-Wellenfunktion des Wasserstoffatoms lautet

$$\phi_{1,0,0}(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}.$$

Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle r\rangle$ und $\langle r^2\rangle$ sowie das Schwankungsquadrat Δr^2 im Grundzustand als Vielfache vom Bohrschen Radius a_0 bzw. a_0^2.
Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$.

21. Radialsymmetrisches Potential
6+7+9 Punkte

a) Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem beliebigen radialsymmetrischem Potential $V(r)$. Wir suchen stationäre Lösungen mit dem Ansatz $\psi_{nlm}(\vec{r}) = \frac{1}{r}\chi_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$. Leiten Sie die aus der Vorlesung bekannte Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\chi''_{nl}(r) + V_{\text{eff}}(r)\chi_{nl}(r) = E_{nlm}\chi_{nl} \tag{1}$$

für χ_{nl} her, wobei

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)$$

ist. Benutzen Sie dabei $\hat{p}^2 = \hat{p}_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{r^2}$ und $\hat{p}_r = -i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$. $Y_{lm}(\theta, \phi)$ sind Kugelflächenfunktionen, also die Eigenfunktionen zum Drehimpulsoperator $\hat{L}^2$ zum Eigenwert $\hbar^2 l(l+1)$.

b) Betrachten Sie ein Kastenpotential der Form

$$V(r) = \begin{cases} 0 & 0 \le r \le L \\ \infty & r > L \end{cases}$$

und lösen Sie (1) für $l = 0$. Bestimmen Sie insbesondere die Energieeigenwerte.
Hinweis: Gehen Sie vor wie beim eindimensionalen Kastenpotential und achten Sie auf die Stetigkeitsbedingung bei $r = L$. Welchen Wert muss $\chi_{nl}(r)$ bei $r = 0$ annehmen?

c) Wir betrachten nun den Fall $l > 0$ für ein beliebiges Potential, dass für kleine r beschränkt ist und für große r gegen einen konstanten Wert konvergiert, also

$$V(r \;\to\; 0) \;\le V_{\max} < \infty \quad \text{und} \quad V(r \to \infty) = V_\infty > E_{nlm}.$$

Gegen welche Funktionen konvergiert die Lösung von (1) asymptotisch für $r \to 0$ und $r \to \infty$?

22. Spin

4+4+5 Punkte

Der vektorielle Spin-Operator ist gegeben durch $\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, dabei sind die Komponenten σ_i die Pauli-Matrizen,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Komponenten $\hat{S}_{1,2,3}$ die vom Drehimpuls bekannten Vertauschungsrelationen

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_k$$

erfüllen.

b) Zeigen Sie, dass für $\hat{\vec{S}}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2$ die Relation $[\hat{\vec{S}}^2, \hat{S}_i] = 0$ gilt.

c) Zeigen Sie die Identität

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2 \mathbb{1}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für den Antikommutator $\{\sigma_i, \sigma_j\} := \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$ gilt: $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \delta_{ij}\mathbb{1}$.