Prof. Dr. A. Schadschneider
C. Eilhardt, S. Nowak Wintersemester 2011/12

Theoretische Physik in 2 Semestern II

13. Übung

www.thp.uni-koeln.de/~as/thp2sem1112.html

Abgabe: *Dienstag, 31. Januar*

46. Ising Modell II

3+5+10+3+3 Punkte

Wir betrachten wieder das Ising Modell aus Aufgabe 44, diesmal jedoch mit Kopplung an ein externes Magnetfeld. Die Energie des Systems ist bei einer gegebenen Konfiguration $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \in \{-1, 1\}^N$ durch

$$E(\underline{\sigma}) = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \tag{1}$$

gegeben, wobei J die paarweise Kopplung zwischen den Spins und h die Kopplung an das externe Magnetfeld bestimmt.

a) Zeigen Sie, dass sich die Zustandssumme als

$$Z = \sum_{\underline{\sigma} \in \{-1,1\}^N} P_{\sigma_1\sigma_2} P_{\sigma_2\sigma_3} \ldots P_{\sigma_{N-1}\sigma_N} P_{\sigma_N\sigma_1} \tag{2}$$

mit $P_{\sigma\sigma'} = \exp\left(\beta\left(J\sigma\sigma' + \frac{h(\sigma+\sigma')}{2}\right)\right)$ schreiben lässt. Die Matrix P wird dabei Transfermatrix bezeichnet.

b) Zeigen Sie, dass sich Gleichung (2) zu

$$Z = \sum_{\sigma_1 \in \{-1,1\}} \left(P^N\right)_{\sigma_1\sigma_1} = \mathrm{Spur}\left(P^N\right) \tag{3}$$

vereinfacht. Die Spur einer Matrix ist definiert als die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente.

Der Grund, warum die Zustandssumme im Transfermatrix-Formalismus geschrieben wurde ist folgender mathematischer Satz: Sei P eine $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann gilt für $N \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{Spur}\left(P^N\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^N. \tag{4}$$

Die Berechnung der Zustandssumme reduziert sich damit auf ein Eigenwertproblem.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte von P und zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (3) und (4), dass für $T \to 0$ (d.h. $\beta \to \infty$) und $J > 0$, die Zustandssumme durch

$$Z = 2e^{N\beta J} \cosh(N\beta h) \tag{5}$$

gegeben ist.

d) Wir betrachten nun die mittlere Magnetisierung $m = \frac{1}{N}\langle \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \rangle$ pro Spin. Zeigen Sie zunächst ausgehend von der allgemeinen Definition der Zustandssumme, dass

$$m = \frac{1}{N}\frac{\partial F}{\partial h}, \tag{6}$$

wobei $F = -\ln(Z)/\beta$ die freie Energie des Systems ist.

e) Verwenden Sie schließlich Gleichung (5) und (6) um zu zeigen, dass

$$\lim_{T\to 0} m = \mathrm{sign}(h) = \begin{cases} +1 & \text{für} \quad h > 0, \\ 0 & \text{für} \quad h = 0, \\ -1 & \text{für} \quad h < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

47. Teilchenzahlfluktuation

3+5 Punkte

Gegeben Sei die großkanonische Zustandssumme

$$Z = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$$

sowie das großkanonische Potential $J = -k_B T \ln Z$ eines Systems.

a) Zeigen Sie, dass die mittlere Teilchenzahl N im System durch $N = \langle N_i \rangle = -\partial J/\partial\mu$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass die Varianz σ_N^2 der Teilchenzahl durch $\sigma_N^2 = \langle (N_i - N)^2 \rangle = -\partial^2 J/\partial\mu^2$ gegeben ist.

48. Fermi-Dirac und Bose-Einstein Statistik

8 Punkte

Gegeben sind die Verteilungsfunktionen

$$f_F(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\epsilon_F}{k_\mathrm{B}T}\right) + 1} \quad \text{und} \quad f_B(E)\frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1}$$

der Fermi-Dirac bzw. Bose-Einstein Statistik. Skizzieren Sie beide Funktionen für hohe und niedrige Temperaturen. Achten Sie dabei auf folgende Charakteristika: Gibt es gemeinsame Punkte, die bei allen Temperaturen durchlaufen werden? Verändert sich die Fläche unter den Kurven? Bei welchen Energien und Temperaturen gehen die Verteilungen in die Bolzmann-Verteilung $e^{-E/k_B T}$ über?

49. Fermienergie des idealen Fermigases

4+3+3 Punkte

Es befinden sich N Fermionen mit Spin s in einem n-dimensionalen Volumen V. Die größte Energie, die ein Teilchen im Grundzustand des Systems haben kann, wird als Fermienergie ϵ_F bezeichnet und soll hier berechnet werden.

a) Da die Energie der idealen Gasteilchen nur vom Impuls abhängt, gibt es zur Fermienergie einen eindeutigen Impuls p_F, der als Fermi-Impuls bezeichnet wird. Begründen Sie, dass zwischen Teilchenzahl und Fermi-Impuls der Zusammenhang

$$N = V\frac{2s+1}{\hbar^n} V_n(1) p_F^n \tag{8}$$

besteht, wobei $V_n(1)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel (siehe Aufg. 41) ist.

b) Zeigen Sie, dass bei einer Energie-Impuls-Beziehung $E = cp^\nu$ die Fermienergie durch

$$\epsilon_F = c\hbar^\nu \left(\frac{\rho}{(2s+1)V_n(1)}\right)^{\nu/n} \tag{9}$$

gegeben ist, wobei $\rho = N/V$.

c) Berechnen Sie die Fermienergie für Leitungselektronen in einem Metall ($n = 3$, $\nu = 2$, $c = \frac{1}{2m_e}$, $\rho = 10^{22}/\mathrm{cm}^2$).