Prof. Dr. A. Schadschneider
C. Eilhardt, S. Nowak Wintersemester 2011/12

Theoretische Physik in 2 Semestern II
14. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem1112.html

2. Teilklausur: *Dienstag, 28. Februar, 10-12 Uhr, Hörsaal 1*

Nachklausur: *Donnerstag, 29. März, 13-16 Uhr, Hörsaal 1*

50. Phononen

Bei Körpern, deren Atome in einer Gitterstruktur angeordnet sind, kommt ein großer Beitrag der Wärmekapazität durch Schwingungen des Gitters zustande. Die Schwingungsmoden sind dabei nicht beliebig, sondern nehmen aus quantenmechanischen Gründen nur diskrete Werte an, sind also gequantentelt. Diese Quanten nennt man *Phononen*, analog zu den Photonen als Quanten elektromagnetischer Wellen, und haben die gleichen Eigenschaften wie "echte" bosonische Teilchen. Das bedeutet u.A., dass die Besetzungswahrscheinlichkeit durch die Bose-Einstein-Statistik

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} \tag{1}$$

gegeben ist, wobei ω die Frequenz der Schwingung ist.
Im Einstein-Modell wird angenommen, das jedes der N Atome des Körpers sich wie ein 3-dimensionaler, quantenmechanischer Oszillator verhält, der mit der gleichen Frequenz ω_E schwingt. Die mittlere Energie des Systems ist damit durch

$$E = 3N \cdot \hbar\omega_E \cdot \left(\langle n \rangle + \frac{1}{2}\right) = 3N \cdot \hbar\omega_E \cdot \left(\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_B T}\right) - 1} + \frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

gegeben ist.

a) Berechnen Sie ausgehend von (2) die Wärmekapazität $C_V = \frac{\partial E}{\partial T}$ und zeigen Sie, dass $C_V \xrightarrow{T\to\infty} 3Nk_B$.

Das Einstein-Modell liefert bei hohen Temperaturen gute Ergebnisse, versagt allerdings bei Niedrigen. Bessere Ergebnisse liefert die Debye-Näherung. Im Debye-Modell wird, im Gegensatz zum Einstein-Modell, angenommen, dass verschiedene Frequenzen bis zu einer Grenzfrequenz ω_D möglich sind. Die Zustandsdichte, d.h. die Anazahl der Zustände die in einem Intervall $[\omega, \omega + d\omega]$ verfügbar sind, ist durch $g(\omega) = 9N\omega^2/\omega_D^3$ gegeben. Die Energie des Systems ist somit

$$E = \int_0^{\omega_D} \hbar\omega \cdot g(\omega) \cdot \langle n \rangle \, d\omega = \frac{9N\hbar}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} \, d\omega. \tag{3}$$

b) Zeigen Sie ausgehend von (3), dass die Wärmekapazität für $T \to \infty$ wieder durch $C_V = 3Nk_B$ gegeben ist.

c) Zeigen Sie nun für $T \to 0$, dass

$$C_\mathrm{v} = \frac{12\pi^4 N k_\mathrm{B}}{5} \cdot \frac{T^3}{\Theta_\mathrm{D}^3}, \tag{4}$$

wobei $\Theta_\mathrm{D} = \hbar\omega_D / k_B$ die Debye-Temperatur ist.
Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^\infty \frac{x^4 \cdot \exp(x)}{(\exp(x)-1)^2} = \frac{4\pi^4}{15}$.

51. Sonnenstrahlung

a) Die Solarkonstante $S = 1367$ W/m^2 gibt die im Mittel auf die Erdoberfläche fallende Strahlungsintensität der Sonne an. Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Sonne wie ein schwarzer Körper strahlt und dass der Radius der Erdumlaufbahn konstant 215 Sonnenmassen beträgt, die Oberflächentemperatur der Sonne.
Hinweis: Der Zusammenhang zwischen Solarkonstante und Strahlungsdruck ist $P = S/c$.

b) Im Sonneninneren beträgt die Temperatur etwa $T_\mathrm{core} \approx 10^7$ K bei einer Dichte von ca. 100 g/cm^3. Berechnen Sie den Strahlungsdruck und vergleichen Sie ihn mit dem materiellen Druck. Sie dürfen annehmen, dass die Sonne ein ideales Wasserstoff-Gas ist.

c) Berechnen Sie bei T_core die Photonendichte. Die Anzahl der Photonen ergibt sich zu $N = 2\sum_k n_k$, wobei n_k die mittlere Anzahl der Photonen mit Wellenzahl k ist. Der Faktor 2 kommt von den zwei möglichen Spin-Einstellungen. Ersetzen Sie die Summe analog zur Vorlesung durch ein geeignetes Integral und verwenden Sie $\int_0^\infty x^2/(e^x - 1)\, dx \approx 2,4$.

52. Neutronenstern als ideales Fermigas

a) Ein Neutronenstern hat eine Dichte von $n \approx 10^{38}$ Neutronen/cm^3. Berechnen Sie bei $T = 0$ den Fermidruck $P = \frac{2E}{3V}$ an der Oberfläche des Sterns, wobei E die Grundzustandsenergie ist.

b) Berechnen Sie den Radius, bei dem sich Fermidruck und Gravitationsdruck genau aufheben.
Hinweis: Um den Gravitationsdruck zu bestimmen, stellen sie sich eine Kugelschale mit Oberfläche A, Dicke dr und Masse dm vor, die um das Innere (Masse M) gewickelt ist. Die Kraft auf die Kugelschale ist dann $dF = G\frac{M}{r^2}dm$ und der Druck ist durch $\frac{dF}{dA}$ gegeben.