Prof. Dr. A. Schadschneider
J. Schmidt Sommersemester 2015

Theoretische Physik in 2 Semestern I

0. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem15.html

Dieses Übungsblatt soll zur Übungsstunde am 17.04.2015 vorbereitet werden.

1. Differentiation

a) Bestimmen Sie die Ableitungen bezüglich x der folgenden Funktionen:

$$f(x) = x^x \quad ; \quad g(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2} \quad ; \quad h(x) = e^{\sin(ax)} \quad ; \quad u(x) = sinh^{-1}(x)$$

Hinweis: Bestimmen Sie $u'(x)$ mit Hilfe der Eigenschaften $f^{-1}(f(x)) = x$ und $1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$.

b) Gegeben sind die Funktionen:

$$x(s) = ts^2 \ln(s) \text{ mit } s(t) = at^2,\ a \in \mathbb{R}^+$$

Bestimmen Sie $\frac{\partial x}{\partial t}$ und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

c) Gradient, Divergenz und Rotation:
Gegeben ist eine skalare Funktion $f(r)$ mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Berechnen Sie:

$$\underline{\nabla} f(r)\ ;\ \triangle f(r) = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} f(r))\ ;\ \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} f(r))$$

Hinweis: Sie müssen f(r) nicht explizit kennen. Drücken Sie die Lösung durch $f'(r)$ und $f''(r)$ aus.

2. Integration

a) Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$I_1 = \int x\sqrt{1+(ax)^2}\mathrm{d}x \quad ; \quad I_2 = \int \sqrt{1+(ax)^2}\mathrm{d}x$$

Hinweis: Verwenden Sie für I_1 die Integration durch Substitution und für I_2 die partielle Integration und $(\sinh^{-1}(ax))' = a\left(1+(ax)^2\right)^{-1/2}$.

b) Bestimmen Sie die Länge $L = \int_\gamma \left\|\mathrm{d}\underline{r}_\gamma\right\|_2$ der Kurve γ mit

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [-1,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & p & \mapsto & \underline{r}_\gamma(p) = \begin{pmatrix} p \\ p^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hinweis: $\|\underline{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ bezeichnet die euklidische Norm von $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Mit der gegebenen Parametrisierung lässt sich das Wegintegral umschreiben zu $L = \int_\gamma \left\|d\underline{r}_\gamma\right\|_2 = \int_{-1}^1 \left\|\frac{d\underline{r}_\gamma(p)}{dp}\right\|_2 dp$

c) Integrieren Sie die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1$ entlang der Kurve γ. D.h. $\int_\gamma f \mathrm{d}s$.
Hinweis: $\int_\gamma f\, ds = \int_{-1}^{1} f\left((\underline{r}_\gamma(p))_1, (\underline{r}_\gamma(p))_2\right) \left\| \frac{d\underline{r}_\gamma(p)}{dp} \right\|_2 dp$

3. Komplexe Zahlen

a) Schreiben Sie die folgenden Zahlen in die Eulerdarstellung $z = re^{i\phi} = r\cos\phi + ir\sin\phi$ um:

$$z = 4 - 4i \ ; \ w = 2 + 2i$$

Berechnen Sie $z \cdot w$ durch direktes Ausmultiplizieren und durch Multiplikation der Eulerdarstellung. Wie kann die Multiplikation zweier komplexen Zahlen geometrisch interpretiert werden?

b) Geben Sie alle Lösungen für $a^4 = 16$ an.

c) Nutzen Sie die Euler-Darstellung und das Potenzgesetz $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ um die Additionstheoreme für $\cos(\phi_1 + \phi_2)$ und $\sin(\phi_1 + \phi_2)$ aufzustellen.

4. Drehmatrix

Gegeben ist die folgende Drehmatrix

$$\underline{\underline{D}}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Machen Sie sich die Wirkung von $\underline{\underline{D}}_\phi$ auf einen Vektor $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ anschaulich klar.

b) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung zweier Drehungen ϕ_1 und ϕ_2 einer Drehung um $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$ entspricht, d.h. $\underline{\underline{D}}_{\phi_3} = \underline{\underline{D}}_{\phi_1} \underline{\underline{D}}_{\phi_2}$.

c) Zeigen Sie, dass gilt $\underline{\underline{D}}_\phi^t = \underline{\underline{D}}_\phi^{-1}$.

d) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\underline{\underline{D}}_\phi$.

e) Berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen den Eigenvektoren um zu zeigen, dass diese orthogonal sind.
Hinweis: Das Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ unterscheidet sich leicht vom Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

5. Differentialgleichungen

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$u''(x) = au(x) \ , \ u(x) \in \mathbb{C} \ , \ a \in \mathbb{R}_{\setminus\{0\}}$$

Hinweis: Unterscheiden Sie $a > 0$ und $a < 0$.

b) Zeigen Sie, dass $f(x,t) = f_0(x + vt)$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t f(x,t) = v\partial_x f(x,t)$$

mit der Anfangsbedingung $f(x, t = 0) = f_0(x)$ löst.

c) Zeigen Sie, dass $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$ die Diffusionsgleichung

$$\partial_t f(x,t) = D\partial_x^2 f(x,t)$$

mit der Anfangsbedingung $f(x, t = 0) = \delta(x)$ löst.