Prof. Dr. A. Schadschneider
J. Schmidt Sommersemester 2015

Theoretische Physik in 2 Semestern I

1. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem15.html

Abgabe: *Montag, 20. April 2015*

1. Achilles und die Schildkröte *1+2+2+3=8 Punkte*

Eine Schildkröte läuft mit konstanter Geschwindigkeit v_s vor Achilles davon, der sich mit konstanter Geschwindigkeit $v_a > v_s$ bewegt. Anfänglich hat die Schildkröte einen Vorsprung von d_0.

a) Nach welcher Zeit t hat Achilles die Schildkröte eingeholt? Welche Strecke d hat er dabei zurückgelegt?

In der Antike gab es folgende Argumentation: Achilles muss zunächst die Strecke d_0 zurücklegen und benötigt dabei die Zeit t_0. Die Schildkröte hat in dieser Zeit allerdings bereits eine Strecke d_1 zurückgelegt. Achilles muss also wieder die Strecke d_1 zurücklegen, wofür er die Zeit t_1 benötigt. In dieser Zeit hat die Schildkröte aber eine weitere Strecke d_2 zurückgelegt usw. Achilles wird die Schildkröte also niemals einholen (im Gegensatz zu dem, was wir in a) herausgefunden haben). Dieses Paradoxon lässt sich aber wie folgt lösen:

b) Stellen Sie eine rekursive Gleichung für t_n und d_n ($n \in \mathbb{N}$) auf, d.h. drücken Sie t_n als Funktion von t_{n-1} bzw. d_n als Funktion von d_{n-1} aus.

c) Lösen Sie die in b) aufgestellte Gleichung, d.h. geben Sie einen expliziten Ausdruck für t_n und d_n an.

d) Zeigen Sie nun mit dem Ergebnis aus c), dass sich eine endliche Gesamtzeit und -strecke ergibt und diese mit den Ergebnissen aus a) übereinstimmen.

2. Bewegung entlang einer Spirale *1+1+1+2+2+4+1=12 Punkte*

Gegeben ist eine Spirale γ mit Radius R, Ganghöhe h und Gesamthöhe $H = n \cdot h$, wobei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Windungen ist. Die Spirale γ kann durch folgende Parametrisierung beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \gamma: \quad [0,1] \quad &\rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ p \quad &\mapsto \quad \underline{r}_\gamma(p) = \begin{pmatrix} R\cos(2\pi np) \\ -R\sin(2\pi np) \\ nh(1-p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie die Spirale für die Parameter $n = 3$, $R = 1$ und $H = 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Sie dürfen auch ein 3D-Plot erstellen und ausdrucken.

b) Berechnen Sie die Gesamtlänge L der Spirale mit Hilfe eines Wegintegrals, d.h. $L = \int_\gamma \left\|\mathrm{d}\underline{r}_\gamma\right\|_2$.

Hinweis: $\|\underline{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ *bezeichnet die euklidische Norm von* $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$. *Mit der gegebenen Parametrisierung lässt sich das Wegintegral umschreiben zu* $L = \int_\gamma \left\|d\underline{r}_\gamma\right\|_2 = \int_0^1 \left\|\frac{d\underline{r}_\gamma(p)}{dp}\right\|_2 dp$

c) Bestimmen Sie die Länge L der Spirale, indem Sie sich die Spirale abgewickelt als schiefe Ebene mit den Kathetenlängen $2\pi nR$ und $H = nh$ vorstellen. Stimmen die Längen überein?

Es soll die Bewegungsgleichung $\underline{r}(t)$ einer Murmel entlang γ bestimmt werden. Die Murmel hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit $\|\underline{v}(t=0)\|_2 = 0$ und wird am oberen Ende der Murmelbahn $\underline{r}(t=0) = \underline{r}_\gamma(p=0) = (R, 0, nh)^t$ platziert. Auf die Murmel wirkt eine konstante Erdbeschleunigung $\underline{g} = (0, 0, -g)^t$.

Um diese Aufgabe zu lösen soll zunächst die Funktion $s(t)$ aufgestellt werden, wobei $s(t)$ die zurückgelegte Strecke abhängig der Zeit angibt. Die Bewegungsgleichung $\underline{r}(t)$ ergibt sich schließlich aus $\underline{r}(t) = \underline{r}(s(t))$ mit $\underline{r}(s) = \underline{r}_\gamma(p(s))$.

d) Um s(t) zu bestimmen wird die Spirale erneut als schiefe Ebene mit den Kathetenlängen $2\pi nR$ und $H = nh$ betrachtet. Bestimmen Sie $s(t)$ für die schiefe Ebene unter Berücksichtigung der Randbedingungen $s(t=0) = 0$ und $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \dot{s}(t=0) = 0$

e) Bestimmen Sie zunächst $\underline{r}(s)$ und damit $\underline{r}(t)$.
Hinweis: Sie können $s(t) = \frac{gH}{2L}t^2$ und $p(s) = \frac{s}{L}$ verwenden.

f) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\underline{r}(t)}{\mathrm{d}t}$ und Beschleunigungsvektor $\underline{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\underline{v}(t)}{\mathrm{d}t}$. Bestimmen Sie die Anteile des Beschleunigungsvektors $\underline{a}$ parallel und senkrecht zur Spiralbahn, d.h. $\underline{a}_\parallel(t)$ und $\underline{a}_\perp(t)$ mit $\underline{a} = \underline{a}_\parallel + \underline{a}_\perp$.

Um eine korrekte Lösung zu bestätigen vergleichen Sie $\|\underline{v}(t)\|_2$ mit $\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$ und $\left\|\underline{a}_\parallel(t)\right\|_2$ mit $\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}$. Sind diese gleich?

g) Warum ist es zulässig die Bewegung entlang der Spirale mit Hilfe der schiefen Ebene zu lösen?