Prof. Dr. A. Schadschneider
S. Bittihn, C. Christou, M. Craesmeyer, J. Schmidt Sommersemester 2015

Theoretische Physik in 2 Semestern I

3. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem15.html

Abgabe: *Dienstag, 4. Mai 2015*

7. Galilei-Transformation

2+1+2=5 Punkte

Eine Galilei-Transformation stellt eine Koordinatentransformation zwischen Bezugssystemen dar. Sie gibt die Beziehung zwischen den Ortsvektoren und Zeiten $(\underline{r}, t)$ und $(\underline{r}', t')$ in zwei Koordinatensystemen S und S' an. In allgemeiner Form ist Sie durch

$$\underline{r}' = \hat{R}_0 \cdot (\underline{r} - t \cdot \underline{v_0} + \underline{r_0}) \quad \text{und} \quad t' = t - t_0 \tag{1}$$

gegeben. Dabei beschreibt die Drehmatrix $\hat{R}_0$ eine Drehung, der Verschiebungsvektor $\underline{r}_0$ eine Translation, der Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}_0$ eine gleichförmige Bewegung und t_0 eine zeitliche Translation. Die Transformation ist also durch $G_0 := (\hat{R}_0, \underline{r_0}, \underline{v_0}, t_0)$ vollständig definiert.

a) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformation G_0 und G_1 wieder eine Galilei-Transformation G_2 ergibt. Bestimmen Sie die Komponenten $\hat{R}_2$, $\underline{r_2}$, $\underline{v_2}$ und t_2 von G_2.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass jede Drehmatrix $\hat{R}$ ein Inverses $\hat{R}^{-1}$ besitzt.

b) Spielt es bei der Hintereinanderausführung allgemein eine Rolle, in welcher Reihenfolge die Transformationen ausgeführt werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Gegeben Sei eine beliebige Galilei-Transformation G_0. Berechnen Sie das Inverse der Transformation, d.h. finden Sie die Transformation G_0^{-1}, die angewandt auf $(\underline{r}', t')$ wieder $(\underline{r}, t)$ ergibt.

8. Rotierende Bezugssysteme

2+2+1+2=7 Punkte

a) In der Vorlesung wurde benutzt, dass sich die Einheitsvektoren $\vec{e}_i'$ eines rotierenden Bezugsystems im raumfesten Laborsystem gemäss

$$\dot{\vec{e}}_i' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i'$$

entwickeln. Wir nehmen an, dass die Rotation mit fester Winkelgeschwindigkeit um die z- Achse verläuft, also $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. Berechnen Sie die Ableitungen $\dot{\vec{e}}_i'$ explizit und geben Sie sie als Vektoren im rotierenden System an.

b) Was ergibt sich für die Einheitsvektoren $\vec{e}_i'(t)$ des rotierenden Bezugsystems nach infinitesimaler Zeit dt? Zeigen Sie, dass $\vec{e}_x'(t + dt)$ und $\vec{e}_y'(t + dt)$ tatsächlich senkrecht aufeinander stehen. Begründen Sie, dass die oben angegebenen Differentialgleichungen tatsächlich eine Rotation beschreiben.

c) Die in einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Bezugsystem auftretenden Scheinkräfte sind die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$ und die Corioliskraft $\vec{F}_C$, mit den allgemeinen Ausdrücken

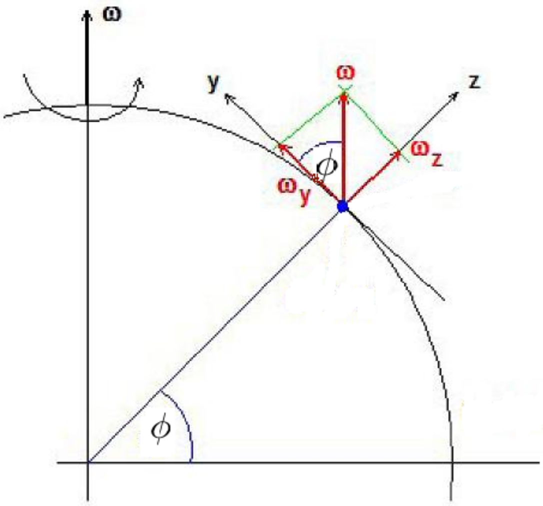
$$\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right), \quad \vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,'.$$

Zeigen Sie durch Auswerten des doppelten Kreuzproduktes, dass $\vec{F}_Z$ in der $x\,'-y\,'$-Ebene radial nach aussen zeigt.

d) Betrachten Sie jetzt die Bahn eines (im Laborsystem) kräftefreien Massenpunktes im rotierenden Bezugsystem. Skizzieren Sie den Bahnverlauf in der $x\,' - y\,'$-Ebene und markieren Sie jeweils die Richtung der Scheinkräfte.

9. Corioliskraft

1+1+1+2+1+3+1=10 Punkte



Um die Wirkung der Corioliskraft auf der Erde zu verdeutlichen wird eine Kugel in Richtung Zenit mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 geschossen und ihr Aufprall- mit dem Abschussort verglichen. Zunächst näheren wir die Erde als perfekte Kugel und wählen ein auf ihr festes Bezugssytsem S mit x-Achse nach Osten, y-Achse nach Norden und z-Achse in Richtung Zenit. Der Abschussort ist $\underline{0}$ und der Aufprallort $(x_A, y_A, 0)^T$. Zudem sollen Reibungskräfte und Winde vernachlässigt werden. Da die Corioliskraft durch die Erdrotation um den geografischen Nordpol erzeugt wird, benötigen wir nur den Breitengrad ϕ aber nicht den Längengrad der Position.

a) Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = const.$ wobei T die Umlaufdauer ist und $\underline{\omega}$ am geographischen Nordpol zum Zenit zeigt. Bestimmen Sie $\underline{\omega}$ im Bezugssystem S in Abhängigkeit vom Breitengrad ϕ.

Als zusätzliche Näherung vernachlässigen wir die Zentrifugalkraft und näheren die Gravitationskraft als konstant an. Damit erhalten wir die folgende Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\underline{r}} \;=\; \underline{F}_g + \underline{F}_c = -mg\underline{e}_z - 2m\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}$$

Mit $\dot{\underline{r}} = \underline{v}$ kann man diese zu einer Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung umformulieren.

$$\dot{\underline{v}} \;=\; -2\omega \begin{pmatrix} 0 & -\sin\phi & \cos\phi \\ \sin\phi & 0 & 0 \\ -\cos\phi & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{v} + -g\underline{e}_z$$

b) Da der Winkel ϕ i.A. von der Zeit abhängt beschränken wir uns zunächst auf ein Experiment am Äquator ($\phi = 0$). Hier kann man die DGL analytisch lösen. Zeigen Sie, dass die DGL gelöst wird durch:

$$\underline{v}\,(t, \omega) \;=\; \begin{pmatrix} -v_0 \sin(2\omega t) + \frac{g}{2\omega}\left(1 - \cos(2\omega t)\right) \\ 0 \\ v_0 \cos(2\omega t) - \frac{g}{2\omega} \sin(2\omega t) \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie nun durch Integration die Lösung der Bewegungsgleichung $\underline{r}\,(t,\omega)$ mit $\underline{r}\,(t=0,\omega)=\underline{0}$

d) Für das relevante Zeitfenster gilt $\omega t \ll 1$. Führen Sie eine Taylorentwicklung für $\underline{r}\,(t,\omega)$ in ωt durch und berücksichtigen Sie Terme bis zur 1. Ordnung in ωt.

e) Bestimmen Sie innerhalb der Taylorentwicklung die Dauer t_f die die Kugel braucht um wieder bei $\underline{r}_3 = 0$ zu landen und damit die Verschiebung $\Delta\underline{r} = \underline{r}\,(t_f) - \underline{r}\,(t_i = 0)$. In welche Richtung wird die Kugel abgelenkt?

Numerische Untersuchungen zeigen, dass die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y klein sind. Man erhält eine gute Näherung für die Bewegungsgleichung wenn man in dieser $v_{x,y} = 0$ setzt. Man stellt fest, dass in dieser Näherung die Koordinate y nicht ändert und damit ϕ konstant ist.

f) Lösen Sie die genäherte Bewegungsgleichung für beliebige ϕ und vergleichen Sie diese mit der Lösung aus Teil d).

g) Beurteilen Sie die Qualität der Näherung durch Vergleich zum Ergebnis aus Teil d). Die oszilierenden Terme der exakten Lösung lassen mehrere Lösungen für $(\underline{r}\,(t,\omega))_3 = 0$ zu. Wie lassen sich diese Lösungen anschaulich erklären?