Prof. Dr. A. Schadschneider
S. Bittihn, C. Christou, M. Craesmeyer, J. Schmidt Sommersemester 2015

Theoretische Physik in 2 Semestern I

4. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem15.html

Abgabe: *Montag, 11. Mai 2015*

10. Ellipsengleichungen I

1+1+1+1+1+1+1=7 Punkte

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in der xy-Ebene, so dass seine Position von der Gleichung

$$\vec{r}(t) = a\cos\omega t\vec{e_x} + b\sin\omega t\vec{e_y} \tag{1}$$

beschrieben wird. Hierbei sind a,b und ω positive Konstanten und es gilt $a > b$.

a) Zeigen Sie, dass das Teilchen sich auf einer Ellipse bewegt.

b) Zeigen Sie, dass die Kraft, die auf das Teilchen wirkt, immer radial nach innen zeigt.

c) Zeigen Sie, dass diese Kraft konservativ ist.

d) Bestimmen Sie die potenzielle Energie des Teilchens am Punkt A (mit $\vec{r}_A = a\vec{e_x}$) und am Punkt B (mit $\vec{r}_B = b\vec{e_y}$).

e) Wie gross ist die Arbeit, die bei dem Transport von A nach B geleistet worden ist?

f) Finden Sie die totale Energie des Teilchens und zeigen Sie, dass sie konstant ist.

g) Wie hängt das Ergebniss von f) mit $\vec{r}(t + 2n\pi) = \vec{r}(t)$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) zusammen.

11. Mathematisches Pendel

2+3=5 Punkte

In der Vorlesung wurde als Beispiel für eine eindimensionale Bewegung der harmonischer Oszillator vorgestellt. Ein ähnliches System mit interessanten Eigenschaften ist das mathematische Schwerependel. Betrachten Sie dazu einen Massenpunkt der Masse m, der mittels eines masselosen Stabes der Länge l an einem Punkt aufgehängt ist und in einer vertikalen Ebene hin und her schwingt. Dabei werden Reibungseffekte, insbesondere der Luftwiderstand, vernachlässigt. Als Koordinate betrachten wir den Winkel ϕ zwischen der vertikal nach unten verlaufendenden Linie und dem Stab.

a) Stellen Sie eine Bewegungsgleichung für ϕ auf. Nutzen Sie dazu den Energiesatz und drücken Sie kinetische und potentielle Energie durch ϕ und $\dot{\phi}$ aus !
Hinweis: Die Beziehung $1 - \cos\phi = 2\sin^2\frac{\phi}{2}$ *könnte nützlich sein!*

b) Lösen Sie diese Gleichung für den Speziallfall $E = 2mgl$.
Hinweis: Die Ableitung der Tangens Hyperbolicus Funktion $f(x) = \tanh x$ *ist* $f'(x) = (1 - \tanh^2 x)$.

12. Wegintegral und konservative Vektorfelder *1+2+2 = 5 Punkte*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Später werden wir sehen, dass es sich um das Feld eines unendlich langen, stromdurchflossenen Leiters, der entlang der z-Achse verläuft, handelt.

a) Skizzieren Sie $\vec{F}$ in der x-y-Ebene.

b) Berechnen Sie das das Wegintegral

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}, \tag{3}$$

wobei γ ein Weg entlang des Einheitskreises in der x-y-Ebene ist.

c) Berechnen Sie $\nabla \times \vec{F}$. Ist $\vec{F}$ konservativ? Vergleichen Sie dabei insbesondere mit dem Ergebnis aus b) und erklären Sie ggf. die Diskrepanz.

13. Seil am Abhang *3 Punkte*

Ein Seil der Länge l, Dicke $d \ll l$ und Dichte ρ rutscht im Schwerefeld reibungsfrei über die Kante eines Tisches (Länge l, Beinhöhe $> l$) nach unten. Welche Geschwindigkeit erreicht es im Moment, wo sein hinteres Ende gerade die Tischplatte verlässt, wenn es anfangs mit $v = 0$ ganz auf der Tischplatte lag?
Hinweis: Ein Seilstück der Länge h, das über die Tischkante senkrecht nach unten hängt, hat die potenzielle Energie $V = \int_h^0 \rho g z \,\mathrm{d}z$.

Bonusaufgabe:

14. Isochrone eindimensionale Bewegungen *5 Bonuspunkte*

Betrachten Sie die Bewegung in einem analytischen und symmetrischen Potenzial d.h. $V \in \mathcal{C}^\infty$ und $V(-x) = V(x)$, so dass $V(0) = 0, V'(0) = 0, V''(0) > 0$. Die Bewegung um den Punkt $x = 0$ ist periodisch mit Periode $T(E)$, gegeben durch

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-V(x)}}.$$

x_1 und x_2 sind hierbei die Lösungen von $E = V(x)$ für $E > 0$. Welche Bedingungen an $V(x)$ sind erforderlich, damit $T(E)$ konstant ist?
Hinweis: Benutzen Sie die Lösung ψ der Abelschen Integralgleichung

$$\phi(t) = \int \frac{\psi(r)\mathrm{d}r}{\sqrt{t-r}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi(t) = \frac{1}{\pi}\int\frac{\phi'(r)\mathrm{d}r}{\sqrt{t-r}}$$

mit einer bekannten Funktion ϕ.