Prof. Dr. A. Schadschneider
S. Bittihn, C. Christou, M. Craesmeyer, J. Schmidt | Sommersemester 2015

Theoretische Physik in 2 Semestern I

5. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem15.html

Abgabe: *Montag, 18. Mai 2015*

15. Taylor Entwicklung *1+1=2*

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ jeweils bis zur 1. und 2. Ordnung in x um 0. Was fällt ihnen für die Entwicklung einer Polynomfunktion auf? Geben Sie die Taylorreihe um $x = 0$ bis zur Ordnung m für die Funktion $g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ mit $c_k \in \mathbb{R}$ und $m \leq n$ allgemein an.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe 2. Ordnung für kleine x (d.h. $x \ll 1$) der Funktion $h(x, a, t) = \left(t^2 - t\right)\sqrt{1 - ax}$.

16. Ellipsengleichungen II *3+2=5*

Es gibt verschiedene Möglichkeiten eine Ellipse zu parametrisieren. Hier seien drei davon gegeben:

$$\text{i)}\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ii)}\ r(\varphi) = \frac{r_0}{1 + \epsilon\cos(\varphi)} \qquad \text{iii)}\ r + r' = 2a$$

Hierbei seien r und r' die Abstände des Punktes von den beiden Brennpunkten der Ellipse. Weiterhin sei der Abstand zwischen den beiden Brennpunkten durch $2c$ gegeben.

a) Zeigen Sie die folgenden Beziehungen:

$$a = \frac{r_0}{1 - \epsilon^2}, \qquad b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \qquad c = \frac{\epsilon r_0}{1 - \epsilon^2}$$

Hinweis: Werten Sie dazu ii) an den beiden Endpunkten der großen Halbachse aus.

Gärtner verwenden beim Abstecken einer Ellipse indirekt die Darstellung iii). Hierzu rammen sie zwei Holzpfähle im Abstand Δ in den Boden und verbinden diese mit einem Seil der Länge L. Die Ellipse ergibt sich durch den Rand aller vom Seil erreichbaren Punkte.

b) Bestimmen Sie L und Δ in Abhängigkeit der Halbachsen a und b.

17. Kraftgesetz und Kepler'sche Gesetze *1+3+3+1=8*

In dieser Aufgabe soll das Kraftgesetz $F \sim 1/r^2$ für die Erde im Gravitationsfeld der Sonne aus den Kepler'schen Gesetzen abgeleitet werden. Das erste Kepler'sche Gesetz besagt:
Die Planetenbahnen bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
Um diese Aufgabe anzugehen benötigt man zunächst ein einheitliches Bezugssystem. Hierzu betrachten wir das Problem in Zylinderkoordinaten (r, φ, z), wobei sich die Sonne im Ursprung befindet, die Planetenbewegung in der x-y-Ebene stattfindet und $r(\varphi = 0) = r_{min}$ gilt.

a) Die Ellipsenbahn wird beschrieben durch:

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi} \tag{1}$$

Bestimmen Sie $r_0(a, b)$ als Funktion von den Halbachsen a und b, wobei die Exzentrizität e gegeben ist durch $e = \epsilon a$. Zeigen Sie damit die Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}\left[1 - \epsilon \cos(\varphi)\right] \tag{2}$$

b) Als nächstes soll die radiale Beschleunigung a_r für Zylinderkoordinaten bestimmt werden. Es ist aussreichend das Problem zweidimensional zu betrachten. Es gilt:

$$\underline{\ddot{r}} = a_r \underline{e_r} + a_\phi \underline{e_\varphi}$$

Zeigen Sie

$$a_r = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{3}$$

Hinweis: Leiten Sie $\underline{r}(t) = r(t)\,\underline{e_r}$ zweimal nach der Zeit ab.

Das zweite Kepler'sche Gesetz besagt:
Die Verbindungslinie zwischen den Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten die gleiche Fläche. Dieses Gesetz lässt sich mit Hilfe des Flächensatzes schreiben als

$$r^2 \dot{\varphi} = C \equiv \text{Const.} \tag{4}$$

womit die auftauchenden Ableitungen $\dot{\varphi}$ eliminiert werden können.

c) Differenzieren Sie beide Seiten von Gleichung (2) nach der Zeit und zeigen Sie zunächst

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{C\epsilon a}{b^2} \sin \varphi \tag{5}$$

Zeigen Sie nun mit Hilfe der Gleichungen (3), (4) und (5), dass für die Radiale Beschleunigung a_r gilt:

$$a_r = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{\epsilon a \cos \varphi}{b^2} + \frac{1}{r}\right)$$

d) Zeigen Sie mit Hilfe der Ellipsengleichung abschließend:

$$a_r = -\frac{C^2 a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{6}$$

18. Umlaufbahn aus den Anfangsbedingungen *3+2=5 Punkte*

Angenommen ein Satellit hat im Perihel seiner Bahn (Entfernung $R_0 = 36000km$ vom Erdmittelpunkt) die Geschwindigkeit $v_0 = 2610\frac{m}{sec}$. Die Masse der Erde $M = 5,974 \cdot 10^{24}kg$ ist viel größer als die Masse des Satelliten m.

a) Wenn die Hauptachse der elliptischen Umlaufbahn bei $4R_0$ liegt, wie groß ist dann die Geschwindigkeit des Satelliten im Aphel der Bahn.

b) Zeigen Sie, dass die Länge der kleinen Halbachse $\sqrt{3}R_0$ ist, und geben Sie die allgemeine Gleichung der Bahnellipse (Gl. (7.2.20) und (7.2.23) im Skript) an.