Prof. Dr. A. Schadschneider
S. Bittihn, C. Christou, M. Craesmeyer, J. Schmidt Sommersemester 2015

Theoretische Physik in 2 Semestern I

8. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem15.html

Abgabe: *Montag, 22. Juni 2015*

27. Variationrechnung *5 Punkte*

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Schwerefeld der Erde ($\vec{g} = -g\vec{e}_z$). Es führt dabei eine eindimensionale Bewegung $z = z(t)$ aus. Berechnen Sie das Wirkungsfunktional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(z, \dot{z})\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

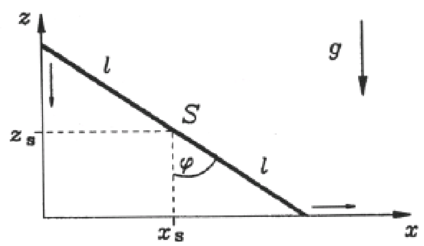
für die Bahn

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + f(t). \tag{2}$$

Dabei sei $f(t)$ eine an sich beliebige, stetig differenzierbare Funktion mit $f(t_1) = f(t_2) = 0$. Zeigen Sie, dass S für $f(t) = 0$ minimal wird.

28. Hamilton-Formalismus II *1+2+2 Punkte*

Ein homogener dünner Stab der Länge 2ℓ gleite im homogenen Schwerefeld an einer Wand ab. Dabei bewegt sich sein oberes Ende entlang der z-Achse während das untere Ende sich entlang der x-Achse bewegt.
Hinweis: Die kinetische Energie besteht aus einem Translations- und einem Rotationsteil! Der Rotationsanteil ist durch $I\dot{\phi}^2/2$ gegeben.



a) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment $\int_{-\ell}^{\ell} \rho r^2\,\mathrm{d}r$ des Stabes um die senkrechte durch den Schwerpunkt führende Drehachse!

b) Verwenden Sie den Drehwinkel ϕ des Stabes um seinen Schwerpunkt als generalisierte Koordinate und bestimmen Sie die Lagrange-Funktion!

c) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion und stellen Sie die Hamiltonischen Bewegungsgleichung auf!

29. Phasenraum *5 Punkte*

Zeichnen sie das Phasenraumportrait des gedämpftes harmonischen Oszillators, der durch die Formel

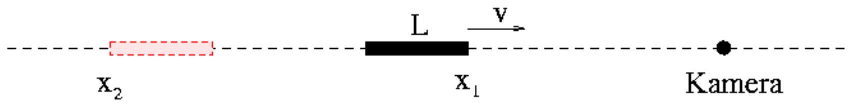
$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 = 0 \tag{3}$$

gegeben ist.
Hinweis: Es ist nützlich einen Ausdruck für die Gesamtenergie als Funktion der Zeit herzuleiten. Schauen sie sich dazu die Lösung der angegebenen Differentialgleichung an.

30. Relativistisches Sehen

2+2+1 Punkte

Beim Sehen oder Fotografieren entsteht ein Bild durch die Lichtstrahlen, die gleichzeitig im Auge oder der Kamera ankommen. Da das Licht sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, sind die Strahlen bei ausgedehnten Objekten nicht unbedingt auch gleichzeitig ausgesendet worden! Es stellt sich daher die Frage, ob man die Längenkontraktion auf Grund dieses Laufzeiteffektes überhaupt wahrnehmen kann.
Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir einen Stab der (Ruhe-)Länge L, der sich mit der Geschwindigkeit v längs auf eine Kamera zu bewegt (siehe Abbildung).



Die Kamera macht zur Zeit t eine Aufnahme des Stabes. Sein vorderes Ende befinde sich zu diesem Zeitpunkt an der Position x_1.

a) Bestimme den Punkt x_2, an dem sich das hintere Ende befand, als das Licht ausgesendet wurde, das zum Zeitpunkt t die Kamera erreicht. Relativistische Effekte sollen dabei vernachlässigt werden.

b) Bestimme die Länge L' des Stabes auf dem Photo. Dabei sollen relativistische Effekte berücksichtigt werden. Vergleiche L' mit der Ruhelänge L und der Länge L'' des Stabes, der sich ohne die Laufzeiteffekte ergeben würde.

c) Was ergibt sich, wenn sich der Stab von der Kamera entfernt?

Hinweis: Videos und andere Visualisierungen zum relativistischen Sehen finden Sie auf der Webseite `www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de`.

Bonusaufgabe:

31. Benzinverbrauch

5 Bonuspunkte

Zwei Autofahrer durchfahren die ebene Strecke L in derselben Zeit T. Ihre Geschwindigkeiten v_0 sind beim Start und Ziel gleich. Der erste Fahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit, also $v_1(t) = v_0$. Der zweite beschleunigt und rollt zwischendurch (dabei verbraucht er kein Benzin), d.h. $v_2(t) = v_0 + \eta(t)$ mit $\eta(0) = \eta(T) = 0$. Es gelte ein lineares Reibungsgesetz $F_R = -\alpha v$.
Bei welchem Fahrstil ist der Benzinverbrauch am geringsten? Berechnen Sie hierzu die vom Motor geleistete Arbeit mit dem Funktional $\int_0^T F_M(v, \dot{v}, t)\mathrm{d}t$, wobei nach der Bewegungsgleichung $m\dot{v} = F_M + F_R$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Herleitung der Euler-Langrange-Gleichung. Die Gleichung an sich ist bei dieser Aufgabe unwichtig!