Prof. Dr. A. Schadschneider
S. Bittihn, C. Christou, M. Craesmeyer, J. Schmidt Sommersemester 2015

Theoretische Physik in 2 Semestern I

10. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem15.html

Abgabe: *Montag, 06. Juli 2015*

37. Vektoranalysis I

2+2+2 Punkte

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ eine skalare Funktion, $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Welche der folgenden Ausdrücke sind unsinnig?

1. div f
2. grad $\vec{A}$
3. div rot $\vec{A}$
4. rot div $\vec{A}$
5. rot rot $\vec{A}$
6. rot grad f
7. rot $\vec{A}$
8. rot f
9. rot $\left(f\vec{A}\right)$
10. grad div $\vec{A}$
11. div grad $\vec{A}$
12. div $\vec{A}$ − rot $\vec{A}$

b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Divergenz des Skalarfeldes $U(\vec{r}) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ sowie die Rotation des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}) = (x^2 + y^2)^{-1/2}\vec{e}_z$.
Hinweis: Beachten Sie, dass im $\mathbb{R}^3$ *die Identität* $\vec{\nabla}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 4\pi\delta(\vec{r})$ *gilt.*

c) Zeichnen Sie $\vec{\nabla}U(\vec{r})$ und $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ in der Ebene $z = 0$ zu den drei verschiedenen Höhenlinien $\mathcal{H}_i \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$, d.h. Linien entlang dieser ein Vektorfeld $\vec{V}$ einen konstanten Betrag $\mathcal{H}_i = |\vec{V}|$ hat.

38. Vektoranalysis II

2+2 Punkte

f sei eine beliebige Funktion, bzw. $\vec{V}$ ein beliebiges Vektorfeld.

a) Zeigen Sie die folgenden Beziehungen:

$$\text{i)}\quad \nabla \times (\nabla f) = 0, \qquad \text{ii)}\quad \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{V}\right) = 0$$

Rotation in Zylinderkoordinaten (r, φ, z):
Gegeben sei ein beliebiges Vektorfeld $\vec{V}$ in Zylinderkoordinaten, also $\vec{V}(r,\varphi,z) = V_r(r,\varphi,z)\vec{e}_r + V_\varphi(r,\varphi,z)\vec{e}_\varphi + V_z(r,\varphi,z)\vec{e}_z$. Die Rotation des Vektorfeldes $\vec{V}(r,\varphi,z)$ läßt sich in Zylinderkoordinaten wie folgt ausdrücken:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}(r,\varphi,z) = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}V_z - \frac{\partial}{\partial z}V_\varphi\right]\vec{e}_r + \left[\frac{\partial}{\partial z}V_r - \frac{\partial}{\partial r}V_z\right]\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}V_r\right]\vec{e}_z$$

b) Drücken Sie das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = (x^2 + y^2)^{-1/2}\vec{e}_z$ in Zylinderkoordinaten aus und berechnen anschließend die Rotation in Zylinderkoordinaten. Schreiben Sie schließlich $\vec{e}_\varphi(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten und vergleichen das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 37b).
Hinweis: Viele Probleme der Elektrodynamik lassen sich auf Grund von Symmetrien in Zylinder- oder Kugelkoordinaten leichter beschreiben. Deshalb ist es sinnvoll Operatoren wie Gradient, Divergenz und Rotation für in diese Koordinatensysteme zu bestimmen. Die Darstellungen können leicht hergeleitet oder in Formelsammlungen nachgeschlagen werden. Diese Aufgabe soll zeigen, dass die Darstellungen oft komplizierter aussehen als die Rechnungen tatsächlich sind.

39. Integration von Ladungsverteilungen *2+2+2+2 Punkte*

a) Betrachten Sie einen Zylinder mit Radius R, Höhe h und homogener Ladungsdichte ρ_0. Berechnen Sie die Gesamtladung des Zylinder indem Sie über das Volumenelement des Zylinders in kartesischen Koordinaten integrieren.
Hinweis: Nutzen Sie die Integrationsformel
$\int \mathrm{d}x\,\sqrt{R^2 - x^2} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin\frac{x}{R}\right)$.

b) Betrachten Sie einen Zylinder mit Radius R, Höhe h und homogener Ladungsdichte ρ_0. Berechnen Sie die Gesamtladung des Zylinder indem Sie über das Volumenelement des Zylinders in Zylinderkoordinaten integrieren.

c) Wiederholen Sie die Rechnung aus der b) für die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = \rho_0 r^2$.

d) Berechnen Sie die Gesamtladung einer Kugel mit Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{r}$ und Radius R indem Sie über das Volumenelement der Kugel in Kugelkoordinaten integrieren.

40. Integration von Punktladungen *2+2 Punkte*

Betrachten sie folgende Verteilung von Punktladungen

$$\rho(\vec{r}) = e\sum_{n=1}^{4}\delta(\vec{r} - \vec{a}_n) \quad \text{mit} \quad \vec{a}_n = \cos\phi_n\vec{e}_x + \sin\phi_n\vec{e}_y \quad \text{und} \quad \phi_n = (2n+1)\frac{\pi}{4}. \tag{1}$$

a) Geben Sie die obige Verteilung in kartesischen Koordinaten an. Es gilt

$$\delta(\vec{r} - \vec{a}_n) = \delta(x - x_n)\delta(y - y_n)\delta(z - z_n). \tag{2}$$

Bestimmen Sie die jeweiligen Ausdrücke für x_n, y_n, z_n.

b) Berechen Sie die Gesamtladung, die in dem Volumenelement $\{0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 2\}$ enthalten ist.

41. Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche *2+2+2 Punkte*

a) Eine Kreisfläche $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ wird von einem homogenen Feld $\vec{V} = 1\cdot\vec{e}_x + 1\cdot\vec{e}_y + 2\cdot\vec{e}_z$ durchflossen. Berechnen Sie

$$\int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{V}. \tag{3}$$

b) Eine schiefe Rechteckfläche $\{|x| \leq \alpha, |y| \leq \beta, z = -x\}$ im $\mathbb{R}^3$ wird von einem homogenen Feld $\vec{V} = a \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y + c \cdot \vec{e}_z$ durchflossen. Berechnen Sie

$$\int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{V}. \tag{4}$$

c) Nun dreht sich das Rechteck. Es gilt $\{x \cdot \sin \omega t + z \cdot \cos \omega t = 0, |y| \leq \beta, |x| \leq \sqrt{2}\alpha\}$. Dabei wird die Fläche vom homogenen Feld $\vec{V} = a \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y + c \cdot \vec{e}_z$ durchflossen. Berechnen Sie den Fluß

$$\Phi(t) = \int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}\vec{f}(t) \cdot \vec{V} \tag{5}$$

als Funktion von t.

42. Satz von Stokes

2+2 Punkte

a) Betrachten Sie eine Quadratfläche $\mathcal{F}_1$ mit Kantenlänge a, deren Rand von einem Strom mit konstanten Betrag I_1 durchflossen wird. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathcal{F}_1} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{I}_1\right). \tag{6}$$

b) Betrachten Sie eine Kreisfläche $\mathcal{F}_2$ mit Radius r. Ein konstanter Strom $\vec{I}_2 = I_2 \vec{e}_\phi$ durchfliesst ihren Rand. Wie groß muss I_2 sein, damit

$$\int_{\mathcal{F}_2} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{I}_2\right) = \int_{\mathcal{F}_1} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{I}_1\right) \tag{7}$$

gilt.

Die neuen Studiengänge der Physik

Ab dem kommenden Wintersemester ändern sich die Studiengänge BSc Physik, BA Lehramt GymGe/ BK Physik und MSc Physics.
Bis zum 31.12.2015 müssen Sie sich entscheiden, in welcher Studienordnung Sie Ihren Studiengang abschließen möchten.
Wir bieten Ihnen daher zwei Termine an, auf denen wir Sie über die Umstellung und die wichtigsten Änderungen informieren.

Wann Donnerstag, 02.07.2015, 18:00 Uhr
Dienstag, 14.07.2015, 16:30 Uhr

Wo Hörsaal I der Physik

Alle Studierenden sind herzlich eingeladen!

Fachgruppe Physik