Prof. Dr. A. Schadschneider
S. Bittihn, C. Christou, M. Craesmeyer, J. Schmidt Sommersemester 2015

Theoretische Physik in 2 Semestern I
12. Übung

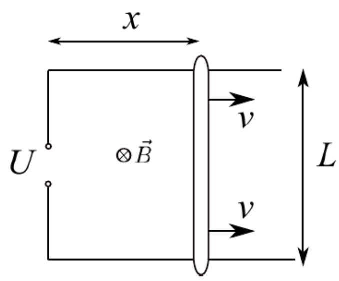
www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem15.html

Dieses Blatt wird in einer Globalübung am 20.07.15 von 10:00 bis 11:30 Uhr im Seminarraum der Theoretischen Physik besprochen.

Es wird zusätzlich am 27.07.15 um 12 Uhr im Seminarraum der Theoretischen Physik eine Fragestunde zur der Vorlesung und den Übungen angeboten.

48. Leiterstab im Magnetfeld

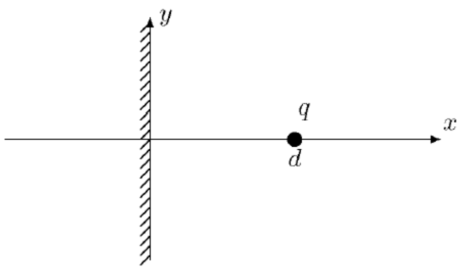
In einem Messaufbau befinden sich im Abstand L zwei elektrisch leitfähige Schienen, auf denen sich ein ebenfalls leitfähiger Stab bewegen lässt. Senkrecht dazu steht ein homogenes, zeitlich konstantes Magnetfeld $\vec{B}$.



Die Position des Stabes zum Zeitpunkt $t = 0$ sei x_0. Welche Spannung wird gemessen, wenn der Stab
i) mit konstanter Geschwindigkeit v und
ii) mit konstanter Beschleunigung a nach rechts bewegt wird.

49. Spiegelladungen

Wir betrachten eine Punktladung mit Ladung q am Punkt $(d, 0, 0)^T$ vor einer unendlich ausgedehnten Leiterfläche in der y-z-Ebene (siehe Skizze).



Die Influenz erzeugt in der Metallplatte eine Ladungsverteilung. Wir wollen diese Anordnung mit Hilfe der Bildladungsmethode untersuchen. Eine Bildladung ist eine Hilfskonstruktion, die es ermöglicht das elektrische Feld und das Potential bei bestimmten Randwertproblemen zu ermitteln. Der Trick besteht darin, sich eine weitere Ladung mit entgegengesetzter Ladung $-q$ auf der anderen Seite der Leiterplatte vorzustellen. Diese gedachte Bildladung befindet sich im Punkt $(-d, 0, 0)^T$ genau gegenüber der tatsächlichen Ladung. Das elektrische Feld der Anordnung aus Metallplatte und realer Ladung ist (im Halbraum $x > 0$) das gleiche, das durch Bildladung und reale Ladung erzeugt wird.

a) Geben Sie die Ladungsverteilung an, die sich aus den beiden Punktladungen ergibt.

b) Wie lautet das elektrische Feld und das Potential dieser Ladungsverteilung?

c) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld überall senkrecht auf der Platte steht.

d) Berechnen Sie die induzierte Oberflächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$ auf der Leiterplatte. Skizzieren Sie die Verteilung von $\sigma(\vec{r})$.

e) Integrieren Sie nun $\sigma(\vec{r})$ über die gesamte Platte und zeigen Sie, dass die gesamte induzierte Ladung $-q$ beträgt.
Hinweis: Integrieren Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten in der Leiterplattenebene. Beim Lösen des Integrals sollte folgende Identität hilfreich sein:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{(r^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{r}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

50. Kugelkondensator

Wir betrachten zwei konzentrische Kugelschalen mit Radien r_1, r_2 und homogener Ladung $\pm Q$. Die Ladungsdichte ist durch

$$\rho = \frac{Q}{4\pi r_1^2}\delta(r - r_1) - \frac{Q}{4\pi r_2^2}\delta(r - r_2)$$

gegeben, dabei sei $r_1 < r_2$.

a) Zeigen Sie, dass die gegebene Ladungsdichte tatsächlich zu einer Ladung von $\pm Q$ auf den Kugelschalen fürt.
Hinweis: Integrieren Sie die Ladungsdichte jeweils in einer Kugelschale von $r_i - \epsilon$ bis $r_i + \epsilon$.

b) Berechnen Sie mithilfe des Gauß'schen Satzes das elektrische Feld im Inneren und außerhalb des Kugelkondensators

c) Berechnen Sie das skalare Potential $\Phi(r)$ durch Integration:

$$\Phi(r) = \int_r^\infty E(r')\, dr'$$

d) Bestimmen Sie die Spannung zwischen den Kugelschalen. Diese ist über $Q = CU$ proportional zur Ladung Q einer Kugelschale. Die Konstante C heißt Kapazität des Kondensators. Wie groß ist die Kapazität eines Kugelkondensators?

51. Wellengleichung

Wir betrachten zunächst eine eindimensionale Wellengleichung:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

für skalare Funktionen $f(x,t)$ mit zwei Argumenten.

a) Zeigen Sie, dass für beliebige zweimal differenzierbare Funktionen f_0 sowohl $f_+(x,t) = f_0(x+ct)$ als auch $f_-(x,t) = f_0(x-ct)$ Lösungen der Differentialgleichung sind. Was bedeuten diese Lösungen anschaulich?

b) Finden Sie alle ω in Abhängigkeit von k so, dass die ebene Welle $f_{\omega,k} = e^{i(\omega t - kx)}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Schreiben Sie die stehende Welle

$$f(x,t) = \sin(\omega t)\sin(kx)$$

als Summe ebener Wellen.

c) Nun gehen wir über zu einer Wellengleichung im dreidimensionalen Raum für zeitabhängige Skalarfelder $f(\vec{r},t)$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f = 0.$$

Bestimmen Sie für gegebenes ω alle Werte von $\vec{k}$, so dass $f(\vec{r},t) = e^{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Welche Bedeutung hat die Richtung des Vektors $\vec{k}$?

d) Überprüfen Sie, dass es sich bei der allgemeinen ebenen Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{p}\cdot f(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct), \qquad \vec{B} = \vec{n}\times\vec{p}\cdot\frac{1}{c}f(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct)$$

um eine Lösung der Wellengleichung und zugleich der Maxwellgleichungen handelt. $\vec{n}$ und $\vec{p}$ seien dabei Einheitsvektoren mit $\vec{n}\cdot\vec{p} = 0$.
Hinweis: Sie können z.B. oBdA von $\vec{n} = (1,0,0)^T$ und $\vec{p} = (0,1,0,)^T$ ausgehen.