

---

Andreas Schadschneider

# Theoretische Physik: Grundlagen

---

Version: 29. Juli 2015

Sommersemester 2015

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Mechanik</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Grundlagen und Grundbegriffe der Mechanik</b>	<b>7</b>
1.1	Gegenstand der Mechanik . . . . .	7
1.2	Historische Entwicklung . . . . .	8
1.3	Grenzen der klassischen Mechanik . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Kinematik von Massenpunkten</b>	<b>11</b>
2.1	Grundbegriffe: Raum und Zeit . . . . .	11
2.2	Beschreibung von Bahnkurven . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Die Newton'schen Gesetze</b>	<b>17</b>
3.1	Die Newton'schen Axiome . . . . .	17
3.2	Beispiele für Kräfte . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Bezugssysteme</b>	<b>23</b>
4.1	Das Galilei'sche Relativitätsprinzip . . . . .	23
4.2	Beschleunigte Bezugssysteme . . . . .	26
4.2.1	Gleichmäßig beschleunigte Bezugssysteme . . . . .	26
4.2.2	Rotierende Bezugssysteme . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Erhaltungsgrößen</b>	<b>31</b>
5.1	Impulserhaltung . . . . .	31
5.2	Drehimpulserhaltung . . . . .	33
5.3	Energieerhaltung . . . . .	35
5.3.1	Energiesatz für einen Massenpunkt . . . . .	35
5.3.2	Energiesatz für ein System aus Massenpunkten . . . . .	38
5.4	Das Noether-Theorem . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Eindimensionale Bewegung</b>	<b>41</b>
6.1	Bewegungstypen . . . . .	41
6.2	Energiemethode . . . . .	42

6.2.1	Harmonischer Oszillator . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Zweikörperproblem und Gravitation</b>	<b>45</b>
7.1	Zweikörperproblem mit Zentralkraft . . . . .	45
7.1.1	Impulserhaltung . . . . .	45
7.1.2	Drehimpulserhaltung . . . . .	46
7.1.3	Energieerhaltung . . . . .	47
7.1.4	Rekonstruktion der Bahnen . . . . .	48
7.2	Keplerproblem . . . . .	49
7.2.1	Bewegungstypen . . . . .	49
7.2.2	Bahnkurven . . . . .	50
7.2.3	Die Kepler'schen Gesetze . . . . .	57
7.3	Dreikörperproblem . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Analytische Mechanik</b>	<b>61</b>
8.1	Bewegung unter Zwangsbedingungen . . . . .	61
8.2	Lagrange-Gleichungen erster Art . . . . .	64
8.2.1	Beispiel: Schiefe Ebene . . . . .	65
8.3	Lagrange-Gleichungen zweiter Art . . . . .	66
8.3.1	Herleitung . . . . .	67
8.3.2	Beispiele . . . . .	69
8.3.3	Verallgemeinerte Impulse und Erhaltungsgrößen . . . . .	72
8.4	Variationsprinzipien . . . . .	73
8.4.1	Variationsprobleme . . . . .	73
8.4.2	Euler-Lagrange-Gleichungen . . . . .	75
8.4.3	Das Hamilton'sche Prinzip . . . . .	78
8.5	Hamilton'sche Mechanik . . . . .	78
8.5.1	Die Hamilton'schen Gleichungen . . . . .	78
8.5.2	Der Phasenraum . . . . .	80
8.5.3	Hamilton'sches Chaos . . . . .	84
<b>II</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>87</b>
<b>9</b>	<b>Historischer Hintergrund und Grundlagen</b>	<b>89</b>
9.1	Das Michelson-Morley-Experiment . . . . .	89
9.2	Das Einstein'sche Relativitätsprinzip . . . . .	92
<b>10</b>	<b>Relativistische Kinematik</b>	<b>95</b>
10.1	Relativität der Gleichzeitigkeit . . . . .	95
10.2	Zeitdilatation . . . . .	96
10.3	Längenkontraktion . . . . .	97
10.4	Die Lorentz-Transformation . . . . .	98

10.4.1	Geschwindigkeitsaddition . . . . .	100
<b>11</b>	<b>Die Geometrie der Raum-Zeit</b>	<b>101</b>
11.1	Minkowski-Abstand . . . . .	101
11.2	Minkowski-Diagramm . . . . .	101
11.2.1	Eigenzeit . . . . .	104
<b>12</b>	<b>Relativistische Dynamik</b>	<b>109</b>
12.1	Vierervektoren . . . . .	109
12.2	Relativistischer Impuls und relativistische Energie . . . . .	110
12.3	Kräfte . . . . .	111
<b>III</b>	<b>Elektrodynamik</b>	<b>113</b>
<b>13</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>115</b>
13.1	Vektorfelder . . . . .	115
13.2	Ableitungen von Vektorfeldern . . . . .	115
13.2.1	Gradient . . . . .	116
13.2.2	Divergenz . . . . .	118
13.2.3	Rotation . . . . .	118
13.2.4	Höhere Ableitungen . . . . .	119
13.3	Integralsätze . . . . .	120
13.3.1	Integration von Skalar- und Vektorfeldern . . . . .	120
13.3.2	Die Sätze von Gauß und Stokes . . . . .	122
13.4	Die Delta-Funktion . . . . .	123
13.4.1	Eindimensionale $\delta$ -Funktion . . . . .	123
13.4.2	Dreidimensionale $\delta$ -Funktion . . . . .	125
<b>14</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>127</b>
14.1	Das Coulomb-Gesetz . . . . .	127
14.2	Das elektrische Feld . . . . .	128
14.3	Das elektrostatische Potential . . . . .	129
14.4	Die Feldgleichungen der Elektrostatik . . . . .	130
14.5	Elektrostatische Energie . . . . .	132
14.6	Multipol-Entwicklung . . . . .	133
14.6.1	Herleitung . . . . .	134
14.6.2	Abhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems . . . . .	135
14.6.3	Punktdipol . . . . .	136
14.7	Metallische Randbedingungen . . . . .	137

<b>15 Magnetostatik</b>	<b>141</b>
15.1 Stationäre Ströme . . . . .	142
15.2 Magnetfelder . . . . .	143
15.3 Kontinuitätsgleichung . . . . .	144
15.4 Vektorpotential . . . . .	145
15.5 Feldgleichungen . . . . .	146
15.6 Ampère'sches Gesetz . . . . .	147
15.7 Magnetischer Dipol . . . . .	149
15.7.1 Dipolfeld . . . . .	149
15.7.2 Magnetischer Dipol im äußeren Feld . . . . .	150
15.7.3 Das gyromagnetische Verhältnis . . . . .	150
<b>16 Die Maxwell'schen Gleichungen</b>	<b>153</b>
16.1 Das Induktionsgesetz . . . . .	153
16.2 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom . . . . .	155
16.3 Energie des elektromagnetischen Feldes . . . . .	156
16.4 Impuls des elektromagnetischen Feldes . . . . .	158
16.5 Maxwell-Gleichungen für die Potentiale . . . . .	159
16.6 Ebene elektromagnetische Wellen . . . . .	161
16.7 Retardierte Potentiale und Dipolstrahlung . . . . .	163

**Teil I**  
**Mechanik**



# Kapitel 1

## Grundlagen und Grundbegriffe der Mechanik

### 1.1 Gegenstand der Mechanik

Die Mechanik lässt sich zwei Teilgebiete aufteilen. Die **Kinematik** beschäftigt sich mit der Beschreibung von Bewegungen, also Veränderungen in der Zeit. Sie geht dabei aber nicht auf die Ursachen dieser Veränderungen ein. Diesen stehen im Mittelpunkt der **Dynamik**, die sich mit Kräften als der Ursache von Bewegungen bzw. Bewegungsänderungen befasst.

In der Vorlesung werden wir meist Probleme betrachten, bei der wir die resultierende Bewegung bei vorgegebenen Kräften bestimmen. Historisch hat natürlich auch der umgekehrte Fall, also die Bestimmung von Kräften aus den beobachteten Bewegungen eine wichtige Rolle gespielt, z.B. bei der Bestimmung der Gravitationskraft aus den Planetenbahnen.

Eine weitere Klassifikation mechanischer Probleme kann über die betrachteten Objekte vorgenommen werden. Wir werden es hauptsächlich mit drei Arten zu tun haben:

1. **Massenpunkte:** Diese dienen als idealistische Beschreibung von ausgedehnten Objekten wie Atomen, Planeten, Sandkörnern,... Massenpunkte haben keine Ausdehnung, aber endliche Massen. Formal ist daher ihre Massendichte unendlich. Statt von Massenpunkten spricht man oft auch von **Teilchen**.
2. **Starre Körper:** Dies sind Systeme aus mehreren Massenpunkten (evtl. auch unendlich vielen), deren Abstände festgehalten werden.
3. **Deformierbare Körper/Kontinua:** Dies sind Systeme aus Massenpunkten, deren Abstände nicht fest sind. Wichtige Teilgebiete sind die **Hydrodynamik**, die sich mit Flüssigkeiten beschäftigt, und die **Elastizitätstheorie**, die sich mit verformbaren Festkörpern beschäftigt.

Im Allgemeinen sind die Objekte nicht unabhängig voneinander, sondern sie üben **Kräfte** aufeinander aus. Diese entstehen also durch die Wechselwirkung zwischen den Körpern. Man unterscheidet zwei Klassen von Wechselwirkungen:

- **Elementare Wechselwirkungen:** Dies sind die vier (zur Zeit bekannten) Grundkräfte, nämlich die Gravitation und die elektromagnetische, starke und schwache Wechselwirkung. Die letzten beiden wirken nur zwischen Elementarteilchen und haben eine sehr kurze Reichweite. Sie spielen daher im Alltag eine untergeordnete Rolle und werden uns im Verlaufe der Vorlesung<sup>1</sup> nicht weiter beschäftigen.
- **Effektive Wechselwirkungen:** Diese können auf die elementaren Wechselwirkungen reduziert werden, z.B. die chemische Bindung, Reibung oder die van der Waals-Wechselwirkung.

Die Ursachen von Kräften sind allerdings nicht Gegenstand der Mechanik!

## 1.2 Historische Entwicklung

Mechanische Probleme haben historisch eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der Physik gespielt. Eine ausführliche Übersicht findet sich z.B. in [2].

- **Vorsokratische Philosophie:** Sie war geprägt vom Streit zweier Denkschulen. Heraklit (~ 520 - 460 v. Chr.) betonte die Bedeutung der natürlichen Prozesse beständigen Werdens und Wandels (“panta rhei”, d.h. “alles fließt”). Parmenides (~ 520 - 460 v. Chr.) hielt die Alltagswahrnehmung der Welt für eine Scheinwahrheit (“Alle Veränderung ist Illusion”) und unterschied zwischen Erscheinungen und der Wirklichkeit. Die wirkliche Welt hielt er für unveränderlich.
- **Aristoteles (384 - 322 v.Chr.):** Entwickelte eine Mechanik, die sich stark an Alltagserfahrungen orientiert. In seiner Theorie bedarf jede Bewegung einer Ursache. Neben der Unterscheidung von Form und Materie unterschied er auch naturgemäße Bewegungen eines Körpers zu seinem natürlichen Ort von naturwidrigen Bewegungen unter dem Einfluss äußerer Ursachen. Für die Bewegung der Gestirne, die ohne erkennbare Ursache ablaufen, postulierte er, dass dort andere Gesetze als für irdische Bewegungen gelten.
- **Johannes Kepler (1571 - 1630):** Stellte auf der Grundlage der Marsbeobachtungen von Tycho Brahe (1546 - 1601) die nach ihm benannten Gesetze der Planetenbewegung auf.
- **Galileo Galilei (1564 - 1642):** Führte Experimente zur Fallbewegung durch und stellte das Trägheitsgesetz auf. Durch Experimente an der schiefen Ebene erkannte er den Unterschied von Geschwindigkeit und Beschleunigung.
- **Isaac Newton (1643 - 1727):** Entwickelte die Bewegungsgesetze, die bis heute die Grundlage der Mechanik sind, und die Infinitesimalrechnung als ihren mathematischen Rahmen. Seine Formulierung des Gravitationsgesetzes führte zur Vereinheitlichung von himmlischer und irdischer Mechanik.
- **Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) und William Rowan Hamilton (1805 - 1865)** bringen die Mechanik auf ihr bis heutige gültige analytische Form.

---

<sup>1</sup>Zumindest in Teil I der Vorlesung!

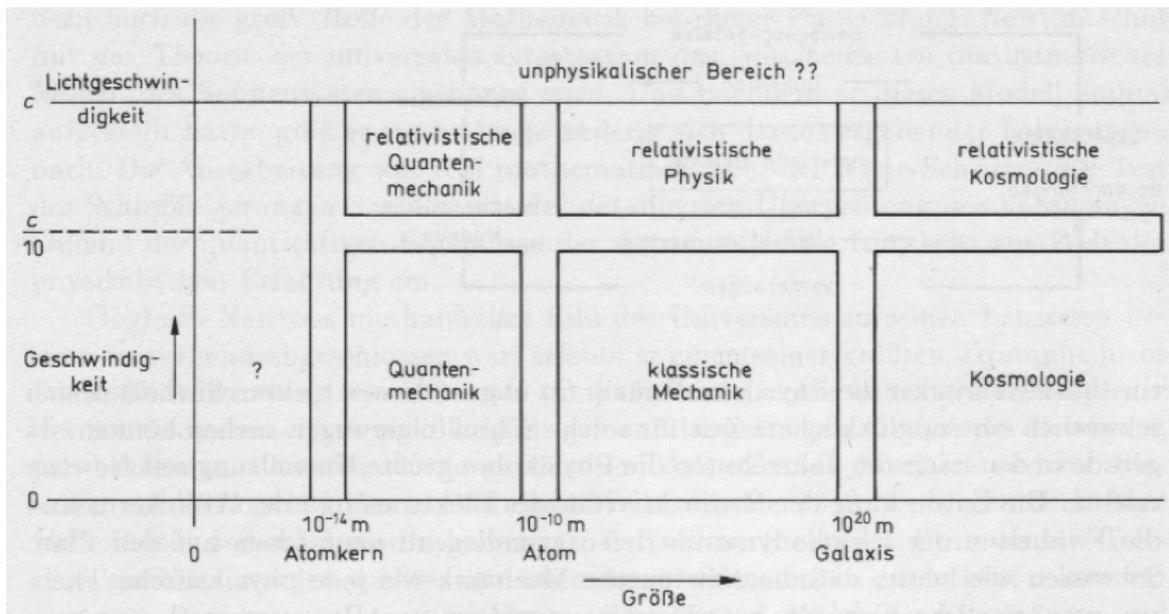


Abbildung 1.3.1: Der Gültigkeitsbereich der klassischen Mechanik (aus [1]).

- Emmy Noether (1882 - 1935) erkannte den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen in der Mechanik. Diese Überlegungen wurden später auf die anderen Wechselwirkungen übertragen.

### 1.3 Grenzen der klassischen Mechanik

Die Newton'sche Mechanik ist für die meisten Phänomene des Alltags angemessen, gilt aber nicht mehr bei (siehe Abb. 1.3.1)

- hohen Geschwindigkeiten: nahe der Lichtgeschwindigkeit  $c$  treten relativistische Effekte auf. Hier ist die spezielle Relativitätstheorie anzuwenden.
- kleinen Abständen: Hier werden Quanteneffekte wichtig.
- großen Abständen: Z.B. in der Kosmologie müssen die Effekte der Allgemeinen Relativitätstheorie berücksichtigt werden.
- großen Massen. Auch hier muss die Allgemeine Relativitätstheorie berücksichtigt werden.

Alle oben erwähnten Theorien, die wir z.T. noch später in der Vorlesung kennenlernen werden, basieren aber auf mechanischen Grundbegriffen wie Energie, Impuls, Masse. Zusammen bilden sie das Fundament der gesamten theoretischen Physik.



# Kapitel 2

## Kinematik von Massenpunkten

Die Kinematik beschäftigt sich mit der Beschreibung von Bewegungen, ohne nach deren Ursachen zu fragen. Wir stellen im folgenden die wichtigsten Grundbegriffe und Konzepte vor.

### 2.1 Grundbegriffe: Raum und Zeit

Bewegung kann immer nur relativ zu einem Bezugssystem nachgewiesen werden. Meist werden wir ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem verwenden. Dann bezeichnet<sup>1</sup>

$$\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1.1)$$

den Ort des Massenpunktes, das wir auch als **Teilchen** bezeichnen, zur Zeit  $t \in \mathbb{R}$ . Den **Raum** identifizieren wir dabei mit dem  $\mathbb{R}^3$ . In der Newton'schen Mechanik ist die **Zeit** ein global definierter Parameter. Es gibt daher einen **absoluten Gleichzeitigkeitsbegriff**, denn Uhren können global synchronisiert werden. Man spricht auch von der **absoluten Zeit**, die Newton in seiner *Principia* folgendermaßen charakterisiert hat:

Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen Gegenstand.

Die Struktur der Raum-Zeit in der Newton'schen Mechanik besteht aus dreidimensionalen "Zeitscheiben", die entlang der eindimensionalen Zeitachse aufgereiht sind (Abb. 2.1.2). Einen Punkt  $(\underline{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  in dieser Raum-Zeit bezeichnen wir als **Ereignis**, seine "Bahn" als **Weltlinie**. Wir können nun zwei getrennte Abstandsbegriffe für Raum und Zeit einführen. Der **zeitliche Abstand** zweier Ereignisse  $(\underline{r}_1, t_1)$  und  $(\underline{r}_2, t_2)$  ist durch  $t_2 - t_1$  gegeben. Ist  $t_2 > t_1$  so sagt man, dass Ereignis 2 vor Ereignis 1 liegt. Der räumliche Abstand ist durch den bekannten euklidischen Abstand

$$|\underline{r}_1 - \underline{r}_2| = \sqrt{(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \cdot (\underline{r}_1 - \underline{r}_2)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, \quad (2.1.2)$$

wobei ' $\cdot$ ' das kartesische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet.

---

<sup>1</sup>Wie bezeichnen hier Vektoren, wie in der Vorlesung durch  $\underline{a}$ . In der Literatur gibt es viele andere Konventionen, z.B.  $\vec{a}$  oder  $\mathbf{a}$ .

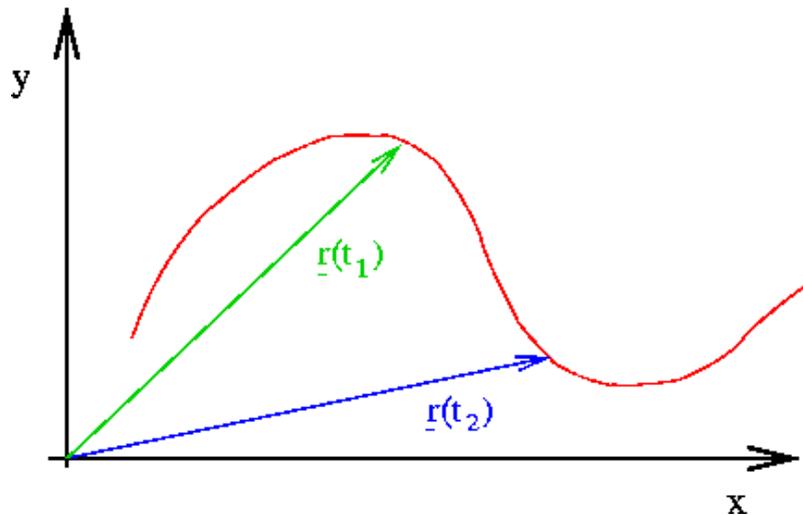


Abbildung 2.1.1: Beispiel für eine Bahnkurve (Trajektorie) im zweidimensionalen Raum und Ortsvektoren für zwei Zeitpunkte  $t_1$  (grün) und  $t_2$  (blau).

## 2.2 Beschreibung von Bahnkurven

Die Bewegung eines Teilchens entlang seiner **Bahnkurve** (oder **Trajektorie**)  $\underline{r}(t)$  lässt sich auf verschiedene Weisen charakterisieren.

Die **Geschwindigkeit**  $\underline{v}$  des Massenpunktes ist durch die zeitliche Ableitung

$$\underline{v} := \frac{d\underline{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}, \quad (2.2.1)$$

gegeben, wobei  $\Delta \underline{r} = \underline{r}(t + \Delta t) - \underline{r}(t)$  ist. Der Geschwindigkeitsvektor schmiegt sich lokal an die Bahnkurve an (Tangente). Mathematisch präzise ‐lebt‐ er nicht im Ortsraum, sondern im Tangentialraum der Bahnkurve, der aber in der Regel (stillschweigend) mit dem  $\mathbb{R}^3$  identifiziert wird.

In analoger Weise ist die **Beschleunigung** als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit definiert:

$$\underline{a} := \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}. \quad (2.2.2)$$

Oft ist es nützlich, ein lokales Bezugssystem zu definieren, das sich mit dem Massenpunkt mitbewegt. Hierzu müssen wir noch ein paar zusätzliche Begriffe einführen.

Die **Bogenlänge**  $s(t)$  können wir über die in einem infinitesimalen Zeitintervall  $dt$  zurückgelegte Wegstrecke

$$ds = |d\underline{r}| = v dt. \quad (2.2.3)$$

Hieraus erhalten wir die gesamte im Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  zurückgelegte Strecke aus

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} |\underline{v}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d\underline{r}}{dt} \right| dt. \quad (2.2.4)$$

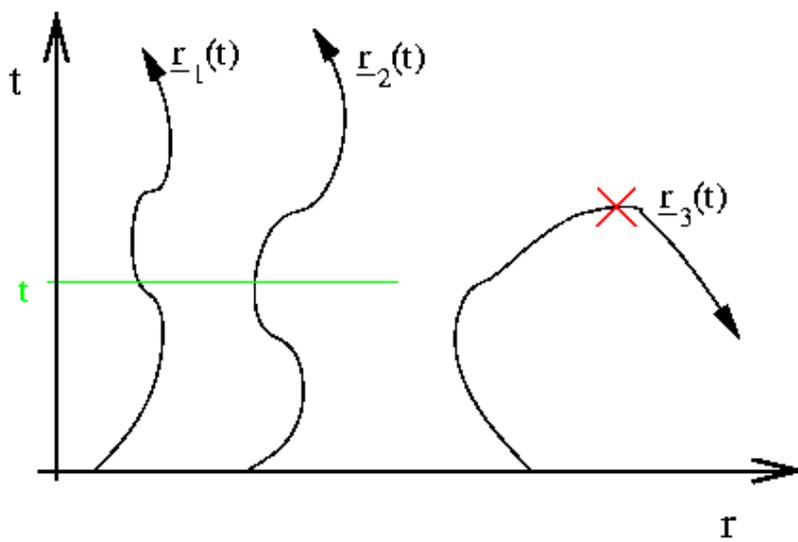


Abbildung 2.1.2: Die Struktur der Raum-Zeit, wobei der Raum hier zur Illustration als eindimensional angenommen ist. Von den drei dargestellten Weltlinien  $r_j(t)$  ist die rechte nicht erlaubt, da sich das Teilchen hier zu gewissen Zeiten an zwei Orten gleichzeitig befinden würde. Der Schnittpunkt der Trajektorien mit der “Zeitscheibe” zur Zeit  $t$  (grün) liefert die Position der Teilchen zu diesem Zeitpunkt.

Ist in dem betrachteten Zeitintervall überall  $|\underline{v}| > 0$ , so kann die Bahnkurve statt durch die Zeit  $t$  auch durch die Bogenlänge  $s$  parametrisiert werden:

$$\underline{r}(t) \longrightarrow \underline{r}(s). \quad (2.2.5)$$

Anschaulich: Wenn das Auto niemals stehen bleibt, können wir die gefahrene Strecke auch an Hand der zurückgelegten Entfernung statt der benötigten Zeit charakterisieren.

Als nächstes führen wir den **Tangentialvektor**

$$\underline{\tau} := \frac{d\underline{r}}{ds} = \underline{v} \frac{dt}{ds} = \frac{\underline{v}}{v} \quad (2.2.6)$$

ein. Dieser ist also ein Einheitsvektor ( $|\underline{\tau}| = 1$ ) in Richtung von  $\underline{v}$  und es gilt  $\underline{v} = v\underline{\tau}$ .

Zum Schluss benötigen wir noch einen **Normalenvektoren**. Da  $\underline{\tau}$  ein Einheitsvektor ist, gilt wegen  $\underline{\tau} \cdot \underline{\tau} = 1$ ,

$$0 = \frac{d}{ds} (\underline{\tau} \cdot \underline{\tau}) = 2\underline{\tau} \cdot \frac{d\underline{\tau}}{ds}, \quad (2.2.7)$$

d.h.  $\frac{d\underline{\tau}}{ds}$  steht senkrecht auf  $\underline{\tau}$  (falls beide  $\neq 0$  sind). Dies gilt im Übrigen ganz allgemein für Einheitsvektoren, wie der Beweis zeigt.

Die Vektoren  $\underline{\tau}$  und  $\frac{d\underline{\tau}}{ds}$  spannen eine Ebene auf, in der die Bahn lokal verläuft. Dies sieht man

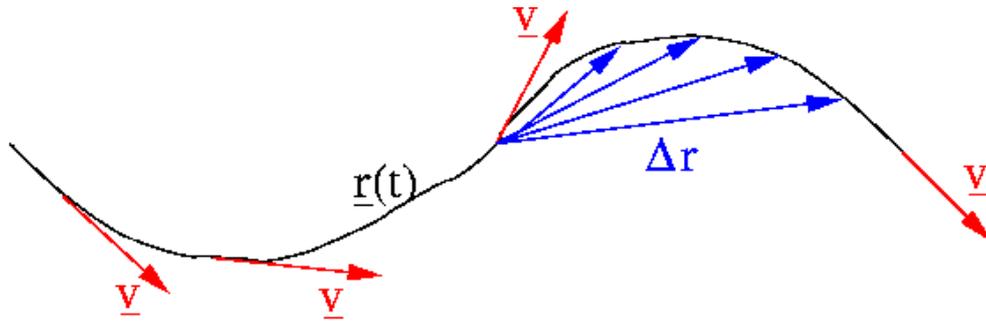


Abbildung 2.2.1: Zur Definition des Geschwindigkeitsvektors durch den Grenzwert in (2.2.1) (blau). Die Geschwindigkeitsvektoren (rot) liegen immer tangential zur Bahnkurve  $\underline{r}(t)$ .

mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned}\underline{r}(s + \Delta s) &\approx \underline{r}(s) + \frac{d\underline{r}}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} (\Delta s)^2 \\ &= \underline{r}(s) + \Delta s \cdot \underline{\tau} + \frac{1}{2} (\Delta s)^2 \frac{d\underline{\tau}}{ds},\end{aligned}\quad (2.2.8)$$

d.h. der Bahnpunkt  $\underline{r}(s + \Delta s)$  liegt (vom Aufpunkt  $\underline{r}(s)$  aus gesehen) in der durch  $\underline{\tau}$  und  $\frac{d\underline{\tau}}{ds}$  aufgespannten Ebene.

Da sich der Betrag von  $\underline{\tau}$  zeitlich nicht ändert, ist die Änderung von  $\underline{\tau}$  eine Drehung um einen infinitesimalen Winkel  $\delta\varphi$ .  $|d\underline{\tau}| = d\varphi$  kann als infinitesimaler Teil eines Kreisbogens aufgefasst werden (siehe Abb. 2.2.2). Der Radius  $\rho$  kann als lokaler Krümmungsradius der Bahn interpretiert werden und es gilt

$$\frac{|d\underline{\tau}|}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}.\quad (2.2.9)$$

Als **Normalenvektor**  $\underline{n}$  definieren wir nun den Einheitsvektor in Richtung von  $\frac{d\underline{\tau}}{ds}$ :

$$\underline{n} := \rho \frac{d\underline{\tau}}{ds}.\quad (2.2.10)$$

Die Beschreibung im so definierten lokalen Bezugssystem kann oft nützlich sein. Als Beispiel drücken wir die Beschleunigung  $\underline{a}$  des Massenpunktes in den lokalen Koordinaten aus. Es sei wieder<sup>2</sup>  $v = |\underline{v}|$  und  $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\underline{a} &= \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v\underline{\tau}) = \frac{dv}{dt} \underline{\tau} + v \frac{d\underline{\tau}}{dt} \\ &= \dot{v} \underline{\tau} + v \frac{d\underline{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{v} \underline{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \underline{n}.\end{aligned}\quad (2.2.11)$$

<sup>2</sup> Wir werden die Beträge von Vektoren in der Regel mit dem gleichen Buchstaben wie den Vektor bezeichnen, jedoch ohne das Vektorzeichen, z.B.  $v = |\underline{v}|$ .



Abbildung 2.2.2: Links: Drehung des Tangentialvektors entlang einer gekrümmten Bahnkurve. Rechts: Der Tangentialvektor  $\underline{\tau}$  und der Normalenvektor  $\underline{n}$  stehen senkrecht aufeinander und spannen zusammen die Bahnebene auf.

Wir erhalten also zwei Terme. Der erste beschreibt die Änderung des Betrages der Geschwindigkeit, der zweite die Änderung der Richtung. Der zweite Term wird auch als **Zentripetalbeschleunigung** bezeichnet und später noch relevant werden.



# Kapitel 3

## Die Newton'schen Gesetze

### 3.1 Die Newton'schen Axiome

Isaac Newton hat in seiner *Principia*<sup>1</sup> 1686 seine drei berühmten Gesetze formuliert, deren physikalischen Inhalt wir hier aus heutiger Sicht beleuchten wollen.

#### 1. Newton'sches Axiom (Lex prima): Trägheitsgesetz

Jeder Körper beharrt in einem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Der "natürliche" Bewegungszustand eines Körpers ist daher nicht unbedingt der ruhende, sondern allgemeiner der der gleichförmigen geradlinigen Bewegung.

Aus moderner Sicht besagt das Trägheitsgesetz, dass die Bewegung kräftefreier (d.h. unbeeinflusster) Körper bei geeigneter Wahl des Bezugssystems gleichförmig und geradlinig verläuft, d.h.

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(0) + \underline{v}_0 t \quad (3.1.1)$$

mit einem zeitlich konstanten Vektor  $\underline{v}_0$ . Ein solches Bezugssystem heißt **Inertialsystem**.

Die Lex prima *definiert* also Inertialsysteme und *postuliert* gleichzeitig ihre Existenz. Eine alternative Formulierung wäre daher:

Es gibt Bezugssysteme, in denen eine kräftefreie Bewegung durch  $\underline{v} = \text{const}$  beschrieben wird.

Das Konzept des Inertialsystems ist eine Idealisierung. Ein Körper kann nur dann unbeeinflusst sein, wenn er der einzige im Universum wäre. Dann ließe sich aber auch nicht nachweisen, ob er sich bewegt! Reale Bezugssysteme nähern sich in unterschiedlichem Maße dieser Idealisierung an, abhängig von der Fragestellung.

---

<sup>1</sup>"Mathematische Prinzipien der Naturlehre"

**2. Newton'sches Axiom (Lex secunda): Bewegungsgesetz**

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und erfolgt in Richtung der derjenigen geraden Linie, in welcher jene Kraft wirkt.

Aus moderner Sicht handelt es sich bei der Newton'schen "Bewegungsgröße" um den **Impuls**

$$\underline{p} = m\underline{v}, \quad (3.1.2)$$

wobei  $m$  die Masse (genauer: die **träge Masse**  $m = m_t$ ) bezeichnet. Somit lautet die Aussage des Lex secunda in mathematischer Form

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F}, \quad (3.1.3)$$

was sich für den Fall einer konstanten Masse zu

$$\underline{F} = m\underline{a} \quad (3.1.4)$$

vereinfacht. Für Probleme mit veränderlicher Masse, z.B. einer Rakete oder einem LKW, der Ladung verliert, muss man aber die allgemeine Form (3.1.3) wählen.

Bewegungen werden also durch eine Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung beschrieben, genauer durch ein DGL-System aus drei gekoppelten Gleichungen (für die drei Komponenten von  $\underline{r}$ ). In der Lösung treten daher sechs Integrationskonstanten auf, die für eine eindeutige Lösung festzulegen sind. Die Bewegung ist dann i.a. durch die Angabe von Anfangsort  $\underline{r}(0)$  und Anfangsgeschwindigkeit  $\underline{v}(0)$  vollständig bestimmt.

Es ergibt sich aber ein konzeptionelles Problem, denn die Lex secunda erlaubt weder die Bestimmung von Massen noch von Kräften. Lediglich die Beschleunigungen lassen sich leicht bestimmen, z.B. über geeignete Längen- und Zeitmessungen. Das konzeptionelle Problem wird (teilweise) behoben durch das

**3. Newton'sches Axiom (Lex tertia): Gegenwirkungsprinzip**

Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung proportional, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Bezeichnen wir die Kraft von Körper  $i$  auf Körper  $j$  mit  $\underline{F}_{ij}$ , so lautet das 3. Newton'sche Axiom

$$\underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji}. \quad (3.1.5)$$

Durch die bisherige Formulierung sind aber noch nicht einige unphysikalische Situationen ausgeschlossen, z.B. die Erzeugung von Drehmomenten ohne äußere Kräfte (siehe Abb. 3.1.1).

Dies wird behoben durch den

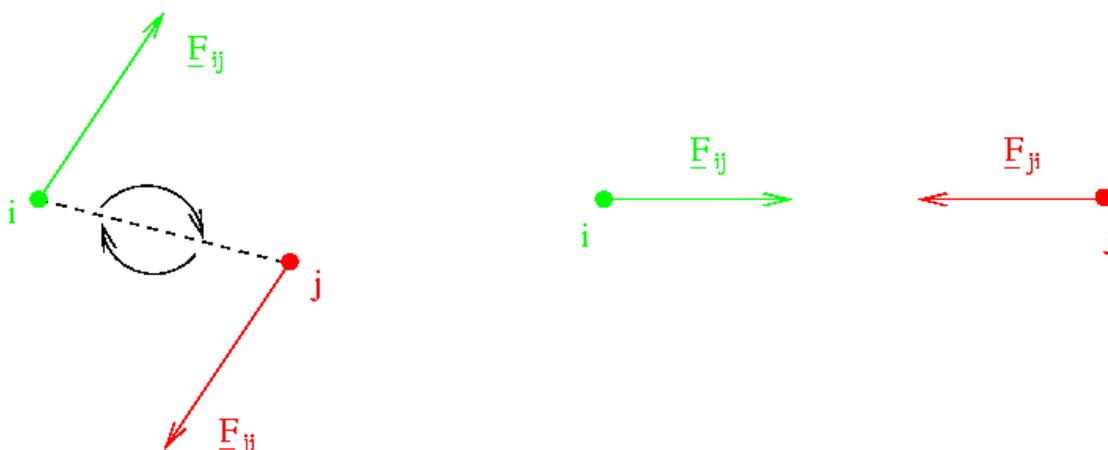


Abbildung 3.1.1: Die links dargestellte Situation genügt dem 3. Newton'sche Axiom, ist aber unphysikalisch. Mit dem Zusatz 1 sind nur die rechts dargestellten Situationen möglich.

Zusatz 1: Die Kräfte zwischen zwei Massenpunkten wirken stets in Richtung der Verbindungslinie, d.h.

$$(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{F}_{ij} = 0. \quad (3.1.6)$$

Somit verbleiben nur die in Abb. 3.1.1 rechts dargestellten Situationen.

Die Lex tertia mit dem Zusatz 1 sind Aussagen über die Form physikalischer Wechselwirkungen. Wirken mehrere Kräfte, z.B. wenn wir es mit mehr als zwei Körpern zu tun haben, so benötigen wir noch den

Zusatz 2: **Superpositionsprinzip**

Kräfte überlagern sich ungestört, d.h. sie addieren sich wie Vektoren.

Wir wollen nun einige Folgerungen aus der Lex tertia ziehen. Zunächst erlaubt sie uns, das oben angesprochene konzeptionelle Problem zu lösen.

Betrachten wir zwei Körper, die miteinander in Wechselwirkung stehen, so gilt

$$\ddot{\underline{r}}_i = \frac{1}{m_i} \underline{F}_{ij} = -\frac{1}{m_i} \underline{F}_{ji} = -\frac{m_j}{m_i} \ddot{\underline{r}}_j, \quad (3.1.7)$$

wobei wir zunächst das Bewegungsgesetz (3.1.3), dann das Gegenwirkungsgesetz (3.1.5) und schließlich wieder (3.1.3) verwendet haben. Wir sehen also, dass das Verhältnis der Beschleunigungen der beiden Körper Informationen über das Verhältnis der Massen liefert. Wenn wir nun eine Referenzmasse festlegen, können wir so die (tragen!) Massen beliebiger Körper bestimmen. Kennen wir die Masse, so können wir über  $\underline{F}_{ij} = m_i \ddot{\underline{r}}_i$  eine Meßvorschrift für die Kraft definieren.

Eine weitere Konsequenz der Lex tertia ist, dass durch innere Kräfte alleine ein System von Massenpunkten nicht beschleunigt werden kann. Anschaulich kann man dies so ausdrücken: "Im Weltraum kann man nicht schwimmen."

Wir können also zusammenfassend feststellen, dass das Bewegungsgesetz

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\underline{r}}) = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \quad (3.1.8)$$

die Grundlage der Mechanik bildet. Mathematisch handelt es sich um ein i.a. nichtlineares System gewöhnlicher DGL 2. Ordnung. Hängt  $\underline{F}$  nicht explizit von der Zeit ab<sup>2</sup>, d.h.  $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}})$ , so nennt man das System **autonom**, sonst **nicht-autonom**.

## 3.2 Beispiele für Kräfte

Wir wollen einige der wichtigsten Kräfte, die uns im Laufe der Vorlesung begegnen werden, zusammenstellen.

- **Kräftefreie Bewegung:** Ist  $\underline{F} = 0$ , so gilt

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(0) + \underline{v}_0 t \quad (3.2.1)$$

d.h. die Lösung von (3.1.3) ist gerade (3.1.1).

- **Konstante Kraft:** Ein Beispiel hierfür ist der freie Fall (in der Nähe der Erdoberfläche). Mit  $\underline{F} = \underline{F}_0$  erhält man als allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(0) + \underline{v}_0 t + \frac{1}{2m} \underline{F}_0 t^2. \quad (3.2.2)$$

- **Zentralkräfte:**  $\underline{F}_{ij}$  ist eine **Zentralkraft**, wenn sie nur vom Abstand  $r = |\underline{r}_i - \underline{r}_j|$  zwischen den beiden Körpern abhängt<sup>3</sup>:

$$\underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji} = f(|\underline{r}_i - \underline{r}_j|) \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}. \quad (3.2.3)$$

Die Kraft ist **anziehend (attraktiv)**, wenn  $f < 0$  ist, und **abstoßend (repulsiv)**, wenn  $f > 0$  ist. Es gibt auch Kräfte, die z.B. für kurze Abstände repulsiv und für große Abstände attraktiv sind.

Das wichtigste Beispiel einer Zentralkraft in der Mechanik ist die **Gravitationskraft** zwischen zwei (**schweren!**) Massen

$$f(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}. \quad (3.2.4)$$

<sup>2</sup>Es verbleibt in der Regel eine implizite Zeitabhängigkeit, da sich das Teilchen bewegt und so an verschiedenen Orten unterschiedliche Kräfte spürt.

<sup>3</sup>Außerdem soll die Kraft natürlich auch (3.1.5) und (3.1.6) erfüllen.

Die Gravitationskraft ist immer attraktiv.

Die **Coulombkraft** zwischen zwei Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  hat eine ganz ähnliche Struktur:

$$f(r) = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (3.2.5)$$

Da Ladungen aber positiv und negativ sein können, kann die Coulombkraft attraktiv oder repulsiv sein.

Schließlich ist noch das **Hooke'sche Gesetz**

$$f(r) = -kr \quad (3.2.6)$$

zu nennen, das z.B. die Rückstellkraft einer Feder mit Federkonstante  $k$  bei einer Auslenkung um  $r$  aus der Ruhelage beschreibt.

- **Lorentz-Kraft:** Sie wirkt auf ein Teilchen der Ladung  $q$  im äußeren elektrischem Feld  $\underline{E}$  und Magnetfeld  $\underline{B}$ :

$$\underline{F} = q \left( \underline{E} + \frac{\underline{v}}{c} \times \underline{B} \right), \quad (3.2.7)$$

wobei  $\underline{v}$  die Geschwindigkeit des Teilchens und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Lorentz-Kraft ist also ein Beispiel für eine geschwindigkeitsabhängige Kraft.

- **Reibungskräfte:** Auch diese sind i.a. geschwindigkeitsabhängig. Sie spielen im Alltag eine wichtige Rolle und ihre Wirkung überdeckt oft die der anderen Kräfte. Man unterscheidet zwischen **trockener Reibung** (auch **Coulomb-Reibung** genannt) zwischen Festkörperoberflächen und **fluider Reibung** zwischen einem festen Körper und einer Flüssigkeit oder einem Gas.

Wir betrachten zunächst die Reibung zwischen Festkörpern, z.B. einem Körper in Kontakt mit einer Oberfläche (siehe Abb. 3.2.1). Auf ihn wirken eine Normalkraft  $-F_n \underline{e}_z$  und eine Zugkraft  $F_x \underline{e}_x$ . Die (tangentiale) Reibungskraft  $F_t$  ist der Zugkraft entgegengesetzt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- **Haftreibung:** Für  $F_x < F_{\max}$  bleibt der Körper in Ruhe (*haftet*) und es gilt:  $F_t = F_x$ .
- **Gleitreibung:** Für  $F_x > F_{\max}$  gleitet der Körper und die Reibungskraft  $F_t = F_g$  (tangential zur Bahn) ist dann unabhängig von  $F_x$ . Sie hängt nur vom Vorzeichen (der Richtung) der Geschwindigkeit ab, nicht von ihrem Betrag. Es gilt

$$F_{\max} = \mu_0 F_n, \quad F_g = \mu F_n, \quad (3.2.8)$$

mit dem **Haftreibungskoeffizienten**  $\mu_0$  und dem **Gleitreibungskoeffizienten**  $\mu$ . I.a. ist  $\mu_0 > \mu$ .

Es sei noch bemerkt, dass eine mikroskopische Begründung dieser Beziehungen noch Gegenstand aktueller Forschung ist!

- **Fluide Reibung:** Das wichtigste Beispiel für fluide Reibung ist die **Stokes-Reibung**

$$\underline{F}_{\text{Stokes}} = -\gamma \underline{v}. \quad (3.2.9)$$

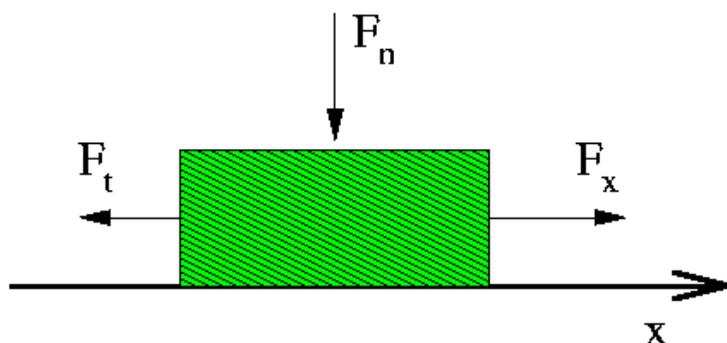


Abbildung 3.2.1: Auf einen Körper, der auf einer Oberfläche liegt, wirken drei Kräfte. Neben der Zugkraft  $F_x$  und der Normalkraft  $F_n$  (durch die Gravitation) wirkt die Reibkraft  $F_t$  der Zugkraft entgegen.

Der **Reibungskoeffizient**  $\gamma$  hängt von der Form des Objektes und dem Medium, in dem es sich bewegt ab. Für eine Kugel vom Radius  $R$  in einem Fluid der Viskosität  $\eta$  ist er durch  $\gamma = 6\pi R\eta$  gegeben. Dies gilt bei langsamer Bewegung und hoher Viskosität. Bei hohen Geschwindigkeiten und kleiner Viskosität (z.B. eine Gewehrkugel in Luft) gilt stattdessen das **turbulente Reibungsgesetz**

$$\underline{F}_{\text{turb}} = -\gamma v^2 \frac{v}{v}, \quad (3.2.10)$$

d.h. der Betrag der Reibkraft ist proportional zum Quadrat des Geschwindigkeitsbetrages  $v$ .

- **Zwangskräfte:** Sie schränken die Bewegung von Körpern ein, z.B. bei einer Bahn, die auf Schienen fährt oder einem Körper, der auf einem Tisch liegt und trotz Wirkung der Gravitation nicht zu Boden fällt. Sie stehen i.a. senkrecht auf der Fläche bzw. der Kurve, auf der die Bewegung möglich ist. Zwangskräfte werden uns später noch genauer beschäftigen.

# Kapitel 4

## Bezugssysteme

### 4.1 Das Galilei'sche Relativitätsprinzip

Wie wir gesehen haben, sind Inertialsysteme dadurch definiert, dass sich in ihnen kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen ( $\underline{r} = \underline{r}(0) + \underline{v}_0 t$ ). Dort gilt dann auch das Newton'sche Bewegungsgesetz  $\dot{\underline{p}} = \underline{F}$ . Wir wollen nun untersuchen, unter welchen **raum-zeitlichen Koordinatentransformationen**

$$(\underline{r}, t) \longrightarrow (\underline{r}', t') \quad (4.1.1)$$

diese Eigenschaften von Inertialsystemen erhalten bleiben.

(i) **Räumliche und zeitliche Translationen:** Einfache Verschiebungen des Ursprungs bzw. des Zeitnullpunkts von der Form

$$\underline{r}' = \underline{r} + \underline{r}_0, \quad (4.1.2)$$

$$t' = t + t_0 \quad (4.1.3)$$

mit Konstanten  $\underline{r}_0$  und  $t_0$  ändern offensichtlich nichts, denn die Geschwindigkeiten in den beiden Systemen sind gleich:

$$\underline{v}' = \frac{d\underline{r}'}{dt'} = \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{d(\underline{r} + \underline{r}_0)}{dt} \cdot 1 = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v}. \quad (4.1.4)$$

Da die Geschwindigkeiten identisch sind, gilt dies natürlich auch für die Beschleunigungen und damit das 2. Axiom.

(ii) **Drehungen:** Drehungen des Koordinatensystems werden durch

$$\underline{r}' = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{r} \quad (4.1.5)$$

beschrieben, wobei  $\underline{\underline{R}}$  eine Drehmatrix ist, d.h.

$$\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^t = \mathbf{1}. \quad (4.1.6)$$

Auch hier macht man sich leicht klar, dass so aus einem Inertialsystem ein anderes Inertialsystem erzeugt wird.

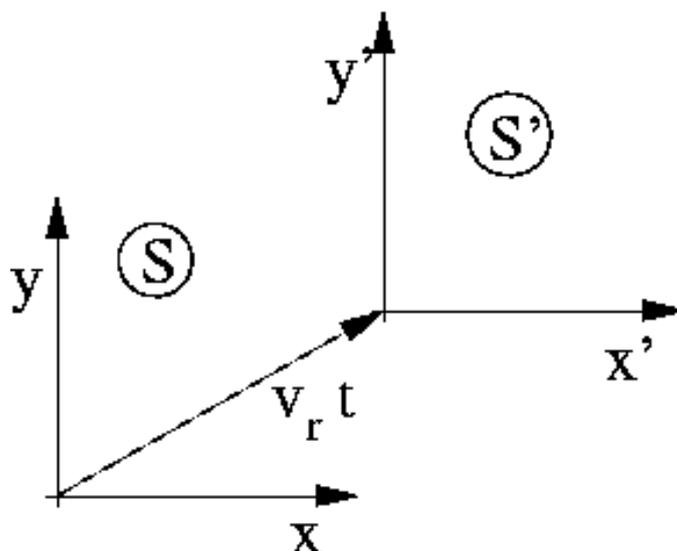


Abbildung 4.1.1: Zur Definition der speziellen Galilei-Transformation: Die beiden Bezugssysteme  $S$  und  $S'$  bewegen sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $\underline{v}_r$  relativ zueinander.

(iii) **Spezielle Galilei-Transformationen:** Sie beschreiben den Übergang von einem Bezugssystem  $S$  in ein anderes ( $S'$ ), das sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\underline{v}_r$  relativ zu diesem bewegt (Abb. 4.1.1):

$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}_r t, \quad t' = t. \quad (4.1.7)$$

Auch in diesem Fall ist das 1. Axiom im System  $S'$  erfüllt, falls es in  $S$  erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \underline{r}' &= \underline{r} - \underline{v}_r t = \underline{r}(0) + \underline{v}_0 t - \underline{v}_r t \\ &= \underline{r}'(0) + [\underline{v}_0 - \underline{v}_r] t, \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

d.h. die Bewegung in  $S'$  ist auch von der Form  $\underline{r}' = \underline{r}'(0) + \underline{v}'_0 t$  mit der Geschwindigkeit  $\underline{v}'_0 = \underline{v}_0 - \underline{v}_r$  des Massenpunktes in  $S'$ .

Wir können diese Ergebnisse zusammenfassen als

**Galilei'sches Relativitätsprinzip:**

- Jedes Bezugssystem, das durch eine Kombination von Transformationen (i)–(iii) aus einem Inertialsystem hervorgeht, ist wieder ein Inertialsystem. Diese Transformationen bilden die **Galilei-Gruppe**<sup>1</sup>.
- Die Newton'schen Gesetze gelten in allen Inertialsystemen, d.h. alle Inertialsysteme sind (bzgl. Experimenten der Newton'schen Physik) gleichwertig. Der physikalische Hintergrund ist dabei die Invarianz der Beschleunigung unter (speziellen) Galilei-Transformationen.

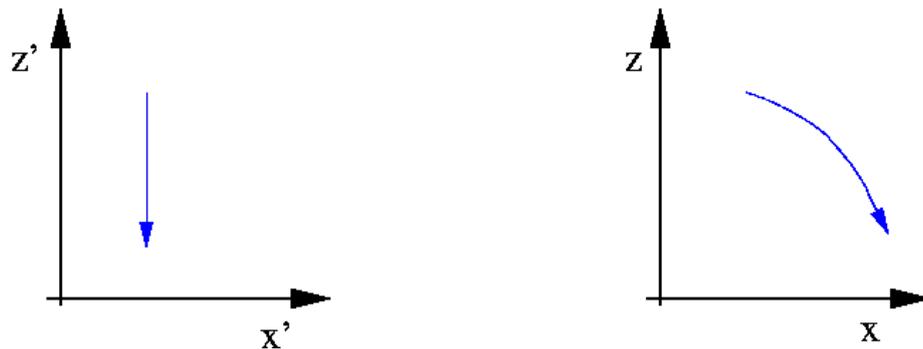


Abbildung 4.1.2: Freier Fall aus der Sicht eines Beobachters im Zug (links) und eines Beobachters auf dem Bahnsteig (rechts).

Die Galilei-Gruppe enthält 10 Parameter, nämlich  $\underline{r}_0$ ,  $t_0$ , drei Winkel in  $\underline{R}$  und  $\underline{v}_r$ . Warum es gerade 10 Parameter sind, werden wir in Kap. 5.4 noch genauer diskutieren.

Als Beispiel betrachten wir den freien Fall in einem mit  $\underline{v}_r = v_r \underline{e}_x$  fahrenden Zug. Ein Beobachter im Zug (= Bezugssystem  $S'$ ) sieht die Trajektorie (Abb. 4.1.2)

$$\begin{aligned} x'(t) &= x'(0), \\ z'(t) &= z'(0) - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Ein Beobachter auf dem Bahnsteig (= Bezugssystem  $S$ ) sieht dagegen eine gekrümmte Bahn (Abb. 4.1.2)

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + v_r t, \\ z(t) &= z(0) - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Beide Beobachter messen aber die gleiche Beschleunigung

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}' = 0, \\ \ddot{z} &= \ddot{z}' = -g, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

und schließen daher auf das gleiche Kraftgesetz

$$m\underline{\ddot{r}} = m\underline{\ddot{r}}' = -mg \underline{e}_z. \quad (4.1.12)$$

Reibungskräfte verletzen das Galilei'sche Relativitätsprinzip. Betrachten wir z.B. die Stokes-Reibung in einem Inertialsystem  $S$ , so lautet die Bewegungsgleichung

$$\text{in } S : \quad m\underline{\ddot{r}} = -\gamma \dot{\underline{r}}. \quad (4.1.13)$$

Transformieren wir diese Gleichung nun mit Hilfe der speziellen Galilei-Transformation (4.1.7) in ein anderes Bezugssystem, so gilt

$$\text{in } S' : \quad m\ddot{\underline{r}}' = m\ddot{\underline{r}} = -\gamma\dot{\underline{r}} = -\gamma(\dot{\underline{r}} + \underline{v}_r) \neq -\gamma\dot{\underline{r}}'. \quad (4.1.14)$$

Dabei haben wir die Invarianz der Beschleunigung unter speziellen Galilei-Transformationen ausgenutzt und die Transformationseigenschaften von Geschwindigkeit bzw. Ort. Wir sehen also, dass das Ruhesystem eines Fluids gegenüber anderen Bezugssystemen ausgezeichnet ist. Das spürt man z.B., wenn man im Zug die Hand aus dem Fenster hält.

## 4.2 Beschleunigte Bezugssysteme

Beschleunigte Bezugssysteme sind keine Inertialsysteme, denn in ihnen wirken **Scheinkräfte**. Diese sind dadurch charakterisiert, dass sie beim Übergang zu einem Inertialsystem verschwinden. Ein bekanntes Beispiel ist die Zentrifugalkraft, die man auf einem Karussell spürt. Für einen Beobachter, der relativ zum Karussell ruht (sich also in einem Inertialssystem befindet) gibt es diese Kraft nicht. Er interpretiert sie als Trägheit.

### 4.2.1 Gleichmäßig beschleunigte Bezugssysteme

Wir betrachten zunächst ein Bezugssystem  $S'$ , das durch die Transformation

$$\underline{r}' = \underline{r} - \frac{1}{2}\underline{a}_0 t^2 \quad (4.2.1)$$

aus einem Inertialsystem  $S$  hervorgeht. Die Beschleunigung  $\underline{a}_0$  soll dabei konstant sein. Das Bewegungsgesetz in  $S'$  lautet dann:

$$m\ddot{\underline{r}}' = m(\ddot{\underline{r}} - \underline{a}) = \underline{F} - m\underline{a}_0. \quad (4.2.2)$$

Der Beitrag  $-m\underline{a}_0$  entspricht daher einer Scheinkraft, die es im Inertialsystem  $S$  nicht gibt.

Als Beispiel betrachten wir einen frei fallenden Fahrstuhl. Dann ist  $\underline{a}_0 = -g$ . Lassen wir in dem Aufzug einen Körper mit der Masse  $m$  (genauer: mit träger Masse  $m_t$  und schwerer Masse  $m_s$ ) fallen, so gilt:

$$\begin{aligned} m_t \ddot{\underline{r}}' &= \underline{F} - m_t \underline{a}_0 = -m_s g \underline{e}_z + m_t g \underline{e}_z \\ &= -(m_s - m_t) g \underline{e}_z. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Sind träge und schwere Masse äquivalent, d.h.  $m_s = m_t$ , so heben sich Schwerkraft und Scheinkraft auf, d.h. der Körper bewegt sich kräftefrei. Dies macht man sich z.B. zunutze, um bei Parabelflügen mit einem Flugzeug oder an Bord von Satelliten Experimente in "Schwerelosigkeit" durchzuführen. Man beachte, dass in beiden Fällen die Schwerkraft nach wie vor wirkt, aber durch Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen kompensiert wird.

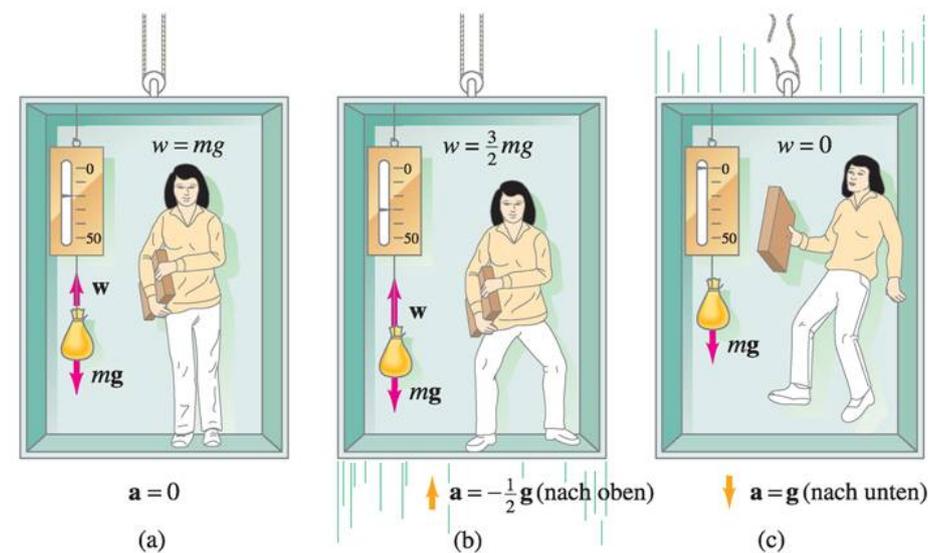


Abbildung 4.2.1: Die “Gewichtskraft” eines Körpers der Masse  $m$  in einem Aufzug, der (a) im Schwerfeld ruht, (b) Aufzug, der im Schwerfeld mit  $-g/2$  nach oben beschleunigt wird und (c) frei fällt (aus [3]).

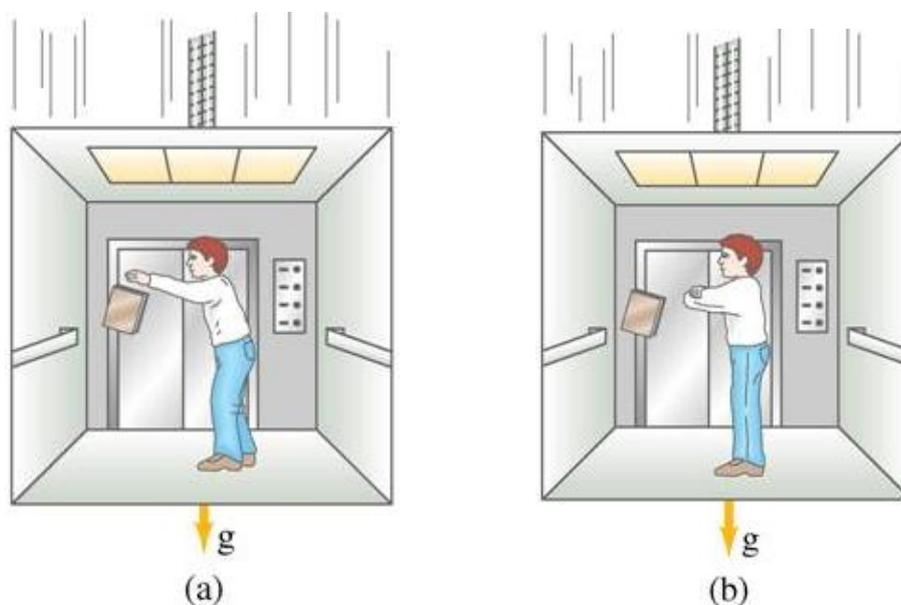


Abbildung 4.2.2: In einem frei fallenden Fahrstuhl schwebt ein losgelassenes Buch (aus [3]).

Die Ununterscheidbarkeit der Wirkung von Gravitationskräften und Scheinkräften in beschleunigten Bezugssystemen ist die Basis der Allgemeinen Relativitätstheorie. Sie lässt sich im **Einstein'schen Äquivalenzprinzip** zusammenfassen:

**schwache Äquivalenz:** Träge und schwere Masse sind äquivalent, d.h.  $m_s = m_t$ .

**starke Äquivalenz:** Die Vorgänge in beschleunigten Bezugssystemen und in Gravitationsfeldern sind einander äquivalent. Durch Messungen innerhalb eines Labors kann man nicht unterscheiden, ob sich dieses in einem Gravitationsfeld befindet oder aus einem anderen Grunde (z.B. Rakete) konstant beschleunigt wird.

## 4.2.2 Rotierende Bezugssysteme

Wir betrachten nun ein Bezugssystem  $S'$ , das relativ zum Inertialsystem  $S$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine feste Achse rotiert. Die Basen in den beiden Bezugssystemen nennen wir

$$\text{Basis in } S = \{\underline{e}_i\} \quad (i = 1, 2, 3 \hat{=} x, y, z), \quad (4.2.4)$$

$$\text{Basis in } S' = \{\underline{e}'_i\} \quad (i = 1, 2, 3 \hat{=} x', y', z'). \quad (4.2.5)$$

Hiermit lassen sich Trajektorien in den beiden Bezugssystemen mit Hilfe der entsprechenden Koordinaten charakterisieren:

$$\underline{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \underline{e}_i = \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \underline{e}'_i(t) = \underline{r}'(t). \quad (4.2.6)$$

$\underline{r}(t) = \underline{r}'(t)$  gilt, da die Ortsvektoren den gleichen Punkt kennzeichnen und sich daher lediglich die Koordinaten  $x_i$  und  $x'_i$  unterscheiden. Die Zeitabhängigkeit in  $\underline{r}'(t)$  ist bzgl. des Inertialsystems  $S$  zu verstehen, in dem sich die Basisvektoren von  $S'$  drehen.

In den Übungen werden wir zeigen, dass die Zeitableitung der Basisvektoren der Gleichung

$$\dot{\underline{e}}'_i(t) = \underline{\omega} \times \underline{e}'_i(t) \quad (4.2.7)$$

genügt, wobei der Vektor  $\underline{\omega}$  in Richtung der Drehachse zeigt und  $|\underline{\omega}| = \omega$  ist (Abb. 4.2.3). Damit können wir nun einen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit eines Massenpunktes in  $S$  und der in  $S'$  herstellen:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{r}} &= \sum_i \dot{x}'_i \underline{e}'_i + \sum_i x'_i \dot{\underline{e}}'_i \\ &= \dot{\underline{r}}' + \sum_i x'_i \dot{\underline{e}}'_i, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

wobei wir die erste Summe die Bewegung relativ zum rotierenden Bezugssystem  $S'$  beschreibt<sup>2</sup> und daher mit  $\dot{\underline{r}}'$  identifiziert werden kann.

<sup>2</sup>Da die Basisvektoren  $\underline{e}'_i$  ortsfest in  $S'$  sind.

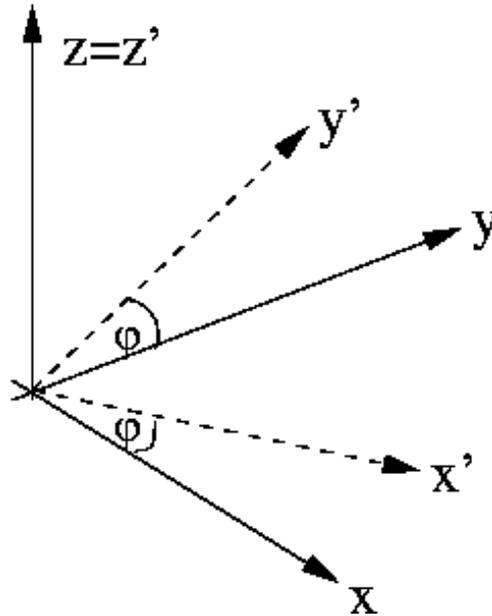


Abbildung 4.2.3: Ein rotierendes Bezugssystem. Die Drehachse ist die  $z$ -Achse ( $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z$ ) und es gilt  $\dot{\phi} = \omega$ .

Wir betrachten nun die verbleibende Summe in (4.2.8) genauer und vereinfachen diese mit Hilfe von (4.2.7):

$$\begin{aligned} \sum_i x'_i \dot{\underline{e}}'_i &= \sum_i x'_i (\underline{\omega} \times \underline{e}'_i) = \underline{\omega} \times \sum_i x'_i \underline{e}'_i \\ &= \underline{\omega} \times \underline{r}' . \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Somit erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$\underline{\dot{r}} = \underline{\dot{r}}' + \underline{\omega} \times \underline{r}' . \quad (4.2.10)$$

Der Zusammenhang zwischen den Beschleunigungen in den beiden Systemen kann analog hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \underline{\ddot{r}} &= \sum_i \ddot{x}'_i \underline{e}'_i + 2 \sum_i \dot{x}'_i \dot{\underline{e}}'_i + \sum_i x'_i \ddot{\underline{e}}'_i \\ &= \underline{\ddot{r}}' + 2(\underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}') + \sum_i x'_i \ddot{\underline{e}}'_i , \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

wobei wir wieder (4.2.7) und (4.2.10) verwendet haben. Die verbleibende Summe können wir wieder vereinfachen:

$$\begin{aligned} \sum_i x'_i \ddot{\underline{e}}'_i &= \sum_i x'_i \frac{d}{dt}(\dot{\underline{e}}'_i) = \sum_i x'_i \frac{d}{dt}(\underline{\omega} \times \underline{e}'_i) = \sum_i x'_i (\underline{\omega} \times \dot{\underline{e}}'_i) = \sum_i x'_i [\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{e}'_i)] \\ &= \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') . \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

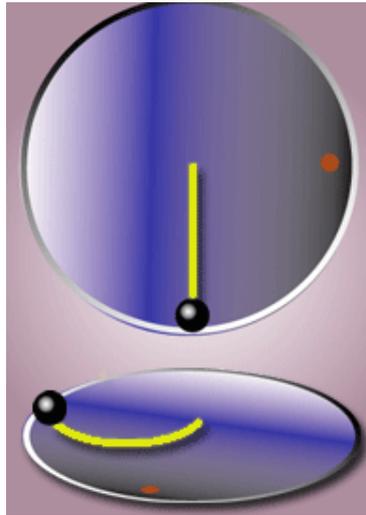


Abbildung 4.2.4: Bewegung einer Kugel auf einer rotierenden Scheibe. Für einen außenstehenden ruhenden Beobachter erscheint die Bewegung geradlinig. Für einen Beobachter, der auf dem roten Punkt stehend mitrotiert, erscheint die Bahnkurve gekrümmt (aus [4]).

Damit lautet das Bewegungsgesetz in  $S'$ :

$$m\ddot{\underline{r}}' = m\ddot{\underline{r}} - 2m(\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}') - m\omega \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') \quad (4.2.13)$$

$$= \underline{F} + \underline{F}_C + \underline{F}_Z \quad (4.2.14)$$

mit der **Corioliskraft**

$$\underline{F}_C = -2m(\underline{\omega} \times \underline{v}') \quad (4.2.15)$$

und der **Zentrifugalkraft**

$$\underline{F}_Z = -m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}'). \quad (4.2.16)$$

Die Corioliskraft ist also eine Scheinkraft, die einen bewegten Körper in einem rotierenden Bezugssystem wirkt. Dieser wird quer zu seiner Bewegungsrichtung abgelenkt, wenn diese sie parallel zur Rotationsachse liegt (Abb. 4.2.4).

# Kapitel 5

## Erhaltungsgrößen

**Erhaltungsgrößen**, also Größen, die sich zeitlich nicht ändern (“erhalten sind”), spielen in allen Teilen der Physik eine wichtige Rolle. Beispiele sind neben der Energie auch Impuls und Drehimpuls, die unter sehr allgemeinen Bedingungen erhalten sind, auch für Systeme aus wechselwirkenden Teilchen. Dies erklärt nicht nur die zentrale Bedeutung dieser Größen, sondern kann auch nutzbringend angewandt werden. So ergeben sich z.B. aus Erhaltungsgrößen Einschränkungen der erlaubten Vorgänge.

### 5.1 Impulserhaltung

Wir betrachten zunächst einen einzelnen Massenpunkt, auf den keine Kräfte wirken sollen:

$$\dot{\underline{p}} = 0 \quad (\text{für } \underline{F} = 0), \quad (5.1.1)$$

d.h. in diesem Fall ist der Impuls erhalten. Dies ist gerade die Aussage des 1. Axioms.

Als Nächstes betrachten wir zwei Massenpunkte, die miteinander wechselwirken, ohne zusätzliche äußere Kräfte. In diesem Fall gelten die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\underline{p}}_1 = \underline{F}_{12} \quad \text{und} \quad \dot{\underline{p}}_2 = \underline{F}_{21}. \quad (5.1.2)$$

Für den Gesamtimpuls

$$\underline{P} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2 \quad (5.1.3)$$

gilt dann

$$\dot{\underline{P}} = \dot{\underline{p}}_1 + \dot{\underline{p}}_2 = \underline{F}_{12} + \underline{F}_{21} = 0, \quad (5.1.4)$$

wobei wir im letzten Schritt das 3. Axiom in seiner schwachen Form verwendet haben.

Diese Überlegungen können auf beliebig viele Teilchen verallgemeinert werden:

$$\dot{\underline{p}}_i = \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ij} + \underline{F}_i \quad (5.1.5)$$

wobei die Summe die inneren Kräfte von den anderen Teilchen repräsentiert und  $\underline{F}_i$  eine äußere Kraft. Der **Gesamtimpuls** ist dann

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^N \underline{p}_i \quad (5.1.6)$$

und genügt der Bewegungsgleichung

$$\dot{\underline{P}} = \sum_{i=1}^N \dot{\underline{p}}_i = \sum_{i,j (i \neq j)} \underline{F}_{ij} + \sum_i \underline{F}_i. \quad (5.1.7)$$

Die erste Summe enthält mit dem Summanden  $\underline{F}_{ij}$  immer auch den Summanden  $\underline{F}_{ji}$ . Diese Beiträge heben sich nach dem 3. Axiom auf, so dass sich Bewegungsgleichung für den Gesamtimpuls auf

$$\dot{\underline{P}} = \sum_i \underline{F}_i \quad (5.1.8)$$

reduziert. Ohne äußere Kräfte ( $\underline{F}_i = 0$ ) ist daher

$$\dot{\underline{P}} = 0. \quad (5.1.9)$$

Dies führt auf den

**Impulssatz:**

In einem System ohne äußere Kräfte ist der Gesamtimpuls erhalten.

Wir definieren nun den **Schwerpunkt** des Systems durch

$$\underline{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \quad (5.1.10)$$

mit der **Gesamtmasse**

$$M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (5.1.11)$$

Hiermit können wir den Gesamtimpuls auch in der Form

$$\underline{P} = M \dot{\underline{R}} \quad (5.1.12)$$

schreiben. Wegen (5.1.8) gilt

$$\frac{d}{dt} (M \dot{\underline{R}}) = \sum_i \underline{F}_i = \underline{F}^{(\text{ext})}, \quad (5.1.13)$$

d.h. der Schwerpunkt bewegt sich wie ein Massenpunkt der Masse  $M$  unter dem Einfluss der Summe der äußeren Kräfte  $\underline{F}^{(\text{ext})}$ . Ein wichtiger Spezialfall ist der

**Schwerpunktsatz:**

In einem System ohne äußere Kräfte bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig geradlinig:

$$\underline{R}(t) = \underline{R}(0) + \frac{1}{M} \underline{P}t. \quad (5.1.14)$$

## 5.2 Drehimpulserhaltung

Der **Drehimpuls** eines Massenpunktes *relativ zu einem Bezugspunkt*  $\underline{r}_0$  ist definiert durch

$$\underline{l} = (\underline{r}(t) - \underline{r}_0) \times \underline{p}(t). \quad (5.2.1)$$

Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses ist

$$\dot{\underline{l}} = \dot{\underline{r}} \times \underline{p} + (\underline{r}(t) - \underline{r}_0) \times \dot{\underline{p}} = (\underline{r}(t) - \underline{r}_0) \times \underline{F}, \quad (5.2.2)$$

da der erste Beitrag wegen  $\dot{\underline{r}} \times \underline{p} = m\dot{\underline{v}} \times \underline{v} = 0$  verschwindet. Der Vektor

$$\underline{m} = (\underline{r}(t) - \underline{r}_0) \times \underline{F} \quad (5.2.3)$$

ist das von Kraft  $\underline{F}$  (bzgl.  $\underline{r}_0$ ) ausgeübte **Drehmoment**.

Ist  $\underline{F} = 0$ , so ist der Drehimpuls erhalten ( $\dot{\underline{l}} = 0$ ). Dies lässt sich veranschaulichen durch den

**Flächensatz:**

Die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche  $A$  wächst gemäß

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} |\underline{l}|. \quad (5.2.4)$$

Dabei bezeichnet man als **Fahrstrahl** die Verbindungslinie zwischen dem Bezugspunkt  $\underline{r}_0$  und der Position  $\underline{r}(t)$  des Massenpunktes.

Der Flächensatz lässt sich mit Hilfe von Abb. 5.2.1 beweisen. In den infinitesimalen Zeitintervall  $dt$  überstreicht der Fahrstrahl die Fläche  $dA$ , die einem halben Parallelogramm entspricht:

$$dA = \frac{1}{2} |(\underline{r}(t) - \underline{r}_0) \times d\underline{r}|, \quad (5.2.5)$$

wobei wir benutzt haben, dass die Fläche eines Parallelogramms, das durch die Vektoren  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  aufgespannt wird, durch  $|\underline{a} \times \underline{b}|$  gegeben ist. Somit ergibt sich

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |(\underline{r}(t) - \underline{r}_0) \times \underline{v}| = \frac{1}{2m} |\underline{l}|. \quad (5.2.6)$$

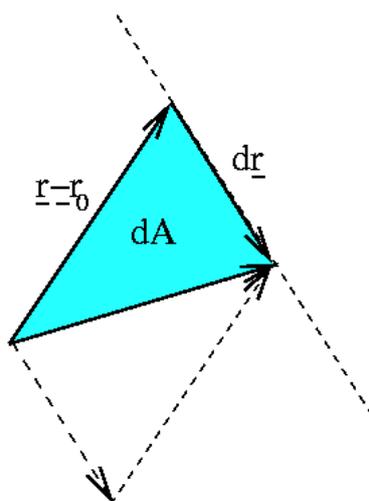


Abbildung 5.2.1: Zum Beweis des Flächensatzes. In der Zeit  $dt$  überstreicht der Fahrstrahl  $\underline{r}(t) - \underline{r}_0$  die Fläche  $dA$  des halben Parallelogramms (blau), das von  $\underline{r}(t) - \underline{r}_0$  und  $d\underline{r}$  aufgespannt wird.

In Analogie zum Impuls definieren wir den **Gesamtdrehimpuls** durch

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^N \underline{l}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\underline{r}_i - \underline{r}_0) \times \dot{\underline{r}}_i. \quad (5.2.7)$$

Die zeitliche Ableitung des Gesamtdrehimpulses ergibt sich daher zu

$$\dot{\underline{L}} = \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{r}_0) \times \left( \sum_{j \neq i} \underline{F}_{ij} + \underline{F}_i \right), \quad (5.2.8)$$

wobei wir wieder die Bewegungsgleichung (5.1.5) benutzt haben und die Tatsache, dass der Beitrag mit der zeitlichen Ableitung von  $\underline{r}_i - \underline{r}_0$  verschwindet, da  $\dot{\underline{r}}_i \times \dot{\underline{r}}_i = 0$  ist. Die Summe über die inneren Kräfte können wir vereinfachen:

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} (\underline{r}_i - \underline{r}_0) \times \underline{F}_{ij} &= \sum_{j \neq i (i < j)} (\underline{r}_i - \underline{r}_0) \times \underline{F}_{ij} + \sum_{j \neq i (i > j)} (\underline{r}_i - \underline{r}_0) \times \underline{F}_{ij} \\ &= \sum_{j \neq i (i < j)} (\underline{r}_i - \underline{r}_0) \times \underline{F}_{ij} + \sum_{i \neq j (j > i)} (\underline{r}_j - \underline{r}_0) \times \underline{F}_{ji} \\ &= \sum_{j \neq i (i < j)} (\underline{r}_i - \underline{r}_0) \times \underline{F}_{ij} - \sum_{i \neq j (j > i)} (\underline{r}_j - \underline{r}_0) \times \underline{F}_{ij} \\ &= \sum_{j \neq i (i < j)} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{F}_{ij}, \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

wobei wir im ersten Schritt die Summation über  $i$  und  $j$  mit  $i \neq j$  in zwei Summen aufgeteilt haben. Im zweiten Schritt wurden die Summationsindizes im zweiten Teil umbenannt ( $i \leftrightarrow j$ ) und im dritten das 3. Axiom ausgenutzt. Ist für die inneren Kräfte Zusatz 1 erfüllt, so folgt

$$\sum_{j \neq i} (\underline{r}_i - \underline{r}_0) \times \underline{F}_{ij} = 0 \quad (5.2.10)$$

und daher

$$\dot{\underline{L}} = \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{r}_0) \times \underline{F}_i = \underline{M}^{(\text{ext})}, \quad (5.2.11)$$

wobei wir das Gesamtdrehmoment  $\underline{M}^{(\text{ext})}$  der äußeren Kräfte eingeführt haben, das in diesem Fall also gleich der Änderung des Drehimpulses ist. Speziell erhalten wir den

**Drehimpulssatz:**

In einem System ohne äußere Kräfte und mit inneren Kräften, die den Zusatz 1 erfüllen (also z.B. Zentralkräften), ist der Gesamtdrehimpuls erhalten.

## 5.3 Energieerhaltung

### 5.3.1 Energiesatz für einen Massenpunkt

Wir betrachten zunächst die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes, die durch die allgemeine Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \quad (5.3.1)$$

beschrieben wird. Wir erlauben also zunächst Kräfte, die neben einer Geschwindigkeitsabhängigkeit auch eine explizite Zeitabhängigkeit besitzen können. Multiplizieren wir die Bewegungsgleichung skalar mit  $\dot{\underline{r}}$ , so erhalten wir zunächst

$$m\dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 \right] = \dot{\underline{r}} \cdot \underline{F}, \quad (5.3.2)$$

wobei wir die **kinetische Energie**

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 \quad (5.3.3)$$

eingeführt haben. Wir können nun (5.3.2) über ein Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  integrieren:

$$\Delta T = T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \underline{F} =: \Delta A, \quad (5.3.4)$$

wobei  $\Delta A$  die von der Kraft  $\underline{F}$  entlang der Bahn geleistete **Arbeit** ist. Wir erhalten so eine sehr allgemeine Form des **Energiesatzes** für ein Teilchen:

$$\Delta T = \Delta A. \quad (5.3.5)$$

Diese ist nicht sehr nützlich, da  $\Delta A$  im allgemeinen Fall vom vollen, raumzeitlichen Verlauf der Bahn des Teilchens abhängt und auch nicht-mechanische Energieformen enthalten kann.

Wir betrachten nun den Spezialfall einer zeit- und geschwindigkeitsunabhängigen Kraft  $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r})$ . Dann ist die Arbeit durch das **Wegintegral**

$$\Delta A = \int_{r_1}^{r_2} d\underline{r} \cdot \underline{F} \quad (5.3.6)$$

gegeben und unabhängig vom zeitlichen Verlauf. Sie kann aber noch vom Verlauf des Weges abhängen.

Wie bereits aus der Vorlesung *Mathematische Methoden* bekannt sein sollte, nennt man Vektorfelder, für die die Wegintegrale zwischen zwei Punkten wegunabhängig sind<sup>1</sup>, **konservativ**. Es gilt:

$\underline{F}$ konservativ $\iff \Delta A$ wegunabhängig $\iff \operatorname{rot} \underline{F} = \nabla \times \underline{F} = 0$ (falls $D$ einfach-zusammenhängend) <span style="float: right;">(5.3.7)</span> $\iff$ Es existiert $V(\underline{r})$ mit $\underline{F} = -\nabla V(\underline{r}) = -\operatorname{grad} V(\underline{r})$ . <span style="float: right;">(5.3.8)</span>
---

Dabei ist  $D$  der Definitionsbereich von  $\underline{F}$  und

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5.3.9)$$

der Nabla-Operator. Eine skalare Funktion  $V(\underline{r})$  mit  $\underline{F} = -\nabla V(\underline{r})$  nennt man auch **Potential** von  $\underline{F}$ .

Für konservative Kräfte gilt dann

$$\Delta A = \int_{r_1}^{r_2} d\underline{r} \cdot \underline{F} = - \int_{r_1}^{r_2} d\underline{r} \cdot \nabla V(\underline{r}) = V(\underline{r}_1) - V(\underline{r}_2). \quad (5.3.10)$$

Setzt man dies in (5.3.4) ein, so erhält man

$$T(t_2) + V(\underline{r}(t_2)) = T(t_1) + V(\underline{r}(t_1)) \quad (5.3.11)$$

und somit den **Energieerhaltungssatz**

$$\boxed{E := T + V = \text{const.}} \quad (5.3.12)$$

für konservative Kräfte  $\underline{F}$  mit Potential  $V(\underline{r})$ .

Wir sehen uns einige Beispiele an:

---

<sup>1</sup>Der Wert des Wegintegrals hängt dann nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, wie wir das von eindimensionalen Integralen kennen!

- Kraft im Schwerfeld nahe der Erdoberfläche: Im diesem Fall lässt sich die Gravitationskraft (3.2.4) approximieren durch den bekannten Ausdruck

$$\underline{F} = -mge_z \quad (5.3.13)$$

mit dem Potential

$$V(\underline{r}) = mgz, \quad (5.3.14)$$

wie man leicht nachprüft.

- Zentralkräfte: Alle Zentralkräfte sind konservativ! Dies sieht man, da man leicht ein Potential angeben kann. Dazu betrachten wir das umgekehrte Problem, nämlich ein Potential der Form

$$V(\underline{r}) = \phi(r) \quad (5.3.15)$$

mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion  $\phi$ , die nur vom Betrag von  $\underline{r}$  abhängt. Die zu diesem Potential gehörende Kraft ist

$$\underline{F} = -\nabla V = -\phi'(r)\nabla r = -\phi'(r)\hat{r}, \quad (5.3.16)$$

wobei wir die bekannten Rechenregeln der Vektoranalysis benutzt haben. Da jede skalare Funktion eine Stammfunktion besitzt, kann für jede Zentralkraft  $\underline{F}(\underline{r}) = f(r)\hat{r}$  ein geeignetes  $\phi(r)$  gefunden werden.

Geschwindigkeitsabhängige Kräfte verletzen i.a. den Energiesatz. Ein Beispiel ist die Stokes-Reibung mit der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\underline{r}} = -\gamma\dot{\underline{r}}. \quad (5.3.17)$$

Multiplizieren wir diese mit  $\dot{\underline{r}}$ , so erhalten wir

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} = -\gamma\dot{\underline{r}}^2 < 0, \quad (5.3.18)$$

d.h. die Energie nimmt ab, weil Bewegungsenergie in Wärmeenergie des umgebenden Fluids dissipiert wird.

Eine Ausnahme ist aber die Lorentzkraft

$$\underline{F} = \frac{q}{c}\underline{v} \times \underline{B}. \quad (5.3.19)$$

Da  $\underline{v} \cdot (\underline{v} \times \underline{B}) = 0$  ist, leistet das Magnetfeld keine Arbeit und die kinetische Energie des Teilchens bleibt erhalten.

### 5.3.2 Energiesatz für ein System aus Massenpunkten

Wir wollen nun unsere Überlegungen auf ein System aus  $N$  Teilchen, die mit inneren Zentralkräften  $\underline{F}_{ij}$  und äußeren Kräften  $\underline{F}_i$  wechselwirken, erweitern:

$$\underline{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) = -\phi'_{ij} \frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \quad (5.3.20)$$

wobei das Potential der Zentralkräfte  $V_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) = \phi_{ij}(|\underline{r}_i - \underline{r}_j|)$  sei. Der Vektor  $\frac{\underline{r}_i - \underline{r}_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$  ist ein Einheitsvektor in Richtung der Verbindung der Teilchen  $i$  und  $j$ .

Als Beispiel betrachten wir die gravitative Wechselwirkung. Wegen  $f(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}$  ist

$$\phi_{ij}(r) = -\frac{Gm_i m_j}{r}. \quad (5.3.21)$$

Das Potential der äußeren Kräfte sei  $V^{(\text{ext})}(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$  mit  $F_i = -\nabla_i V^{(\text{ext})}$ . Die gesamte kinetische Energie ist

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (\text{mit } v_i = |\dot{\underline{r}}_i|). \quad (5.3.22)$$

Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i,j \neq i} \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{F}_{ij} + \sum_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{F}_i \\ &= \sum_{i,j (i < j)} [\dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{F}_{ij} + \dot{\underline{r}}_j \cdot \underline{F}_{ji}] + \sum_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{F}_i \\ &= \sum_{i,j (i < j)} [\dot{\underline{r}}_i - \dot{\underline{r}}_j] \cdot \underline{F}_{ij} + \sum_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{F}_i, \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

wobei wir ganz ähnlich wie früher die Doppelsumme zunächst in zwei Teile ( $i < j$  und  $i > j$ ) aufgeteilt und nach Umbenennung der Summationsindizes in der zweiten Summe das 3. Axiom ausgenutzt haben.

Die gesamte potentielle Energie ist

$$V = \sum_{i,j (i < j)} V_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) + V^{(\text{ext})}(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) \quad (5.3.24)$$

wobei über jedes Teilchenpaar  $(i, j)$  nur einmal summiert wird. Die zeitliche Änderung der potentiellen Energie ist dann

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_{i,j (i < j)} [\dot{\underline{r}}_i \cdot \nabla_i V_{ij} + \dot{\underline{r}}_j \cdot \nabla_j V_{ij}] + \sum_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \nabla_i V^{(\text{ext})}(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) \\ &= - \sum_{i,j (i < j)} [\dot{\underline{r}}_i - \dot{\underline{r}}_j] \cdot \underline{F}_{ij} - \sum_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{F}_i \\ &= -\frac{dT}{dt}, \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

wobei wir ähnlich vorgegangen sind wie bei der zeitlichen Ableitung der kinetischen Energie. Außerdem wurde die Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen benutzt. Das Ergebnis können wir auch in der Form

$$\frac{d(T + V)}{dt} = 0 \quad \text{d.h. } E = T + V = \text{const.} \quad (5.3.26)$$

schreiben, d.h. auch für Vielteilchensysteme mit inneren Zentralkräften und konservativen äußeren Kräften gilt der Energiesatz.

## 5.4 Das Noether-Theorem

Die Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel können wir so zusammenfassen:

Ein  $N$ -Teilchen-System ohne äußere Kräfte und mit inneren Zentralkräften besitzt (mindestens) 10 reelle Erhaltungsgrößen:

- die 3 Komponenten des Gesamtimpulses  $\underline{P}$  und die 3 Komponenten des Schwerpunktes  $\underline{R}(0)$  (Schwerpunktsatz)
- die 3 Komponenten des Gesamtdrehimpulses  $\underline{L}$  (Drehimpulssatz)
- die (skalare) Gesamtenergie (Energiesatz).

Die Zahl der Erhaltungsgrößen ist also gleich der Zahl der Parameter in der allgemeinen Galilei-Transformation (Kap. 4.1):

- 3 Komponenten des Verschiebungsvektors  $\underline{r}_0$  bei räumlichen Translationen
- Verschiebung  $t_0$  des Zeitnullpunktes
- 3 Winkel, die eine allgemeine Drehung  $\underline{R}$  parametrisieren
- 3 Komponenten von  $\underline{v}_r$ , der Geschwindigkeit in der speziellen Galilei-Transformation.

Dies ist kein Zufall, es gibt eine eindeutige Zuordnung zwischen den 10 Erhaltungsgrößen und den 10 Symmetrietransformationen der Galilei-Gruppe, die die Gesetze der klassischen Mechanik invariant lassen:

Erhaltungsgröße	Symmetrie	Eigenschaft
Impuls $\underline{P}$	räumliche Translation $\underline{r}_0$	Homogenität des Raumes
Drehimpuls $\underline{L}$	räumliche Drehung $\underline{R}$	Isotropie des Raumes
Energie $E$	zeitliche Translation $t_0$	Homogenität der Zeit
Schwerpunkt $\underline{R}(0)$	spezielle Galilei-Transformation $\underline{v}_r$	Galilei-Invarianz

Die Homogenität von Raum und Zeit und die Isotropie des Raumes sind sehr allgemeine Eigenschaften des Universums, die in allen Bereichen der Physik gültig sind. Die Galilei-Invarianz gilt nur in der Newton'schen Mechanik und wird später durch die Lorentz-Invarianz ersetzt.

Die Zuordnung zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen ist eine Konsequenz des sehr allgemeinen **Noether-Theorems** (Emmy Noether, 1918), das für sehr viele Bereiche der Physik von fundamentaler Bedeutung ist. Wir werden später in der Analytischen Mechanik darauf zurück kommen.

Hier soll als Beispiel nur der Zusammenhang zwischen Impulserhaltung und Translationsinvarianz plausibel gemacht werden. Wir betrachten dazu ein  $N$ -Teilchen-System mit der potentiellen Energie

$$V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) = \sum_{i,j (i < j)} V_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) + V^{(\text{ext})}(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N). \quad (5.4.1)$$

Wir fordern nun Translationsinvarianz, d.h.

$$V(\underline{r}_1 + \underline{r}_0, \dots, \underline{r}_N + \underline{r}_0) = V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) \quad (5.4.2)$$

für beliebige Verschiebungen  $\underline{r}_0$ . Hieraus ergibt sich für die äußeren Potentiale

$$V_i^{(\text{ext})}(\underline{r}_i + \underline{r}_0) = V_i^{(\text{ext})}(\underline{r}_i), \quad (5.4.3)$$

d.h.

$$V_i^{(\text{ext})}(\underline{r}_i) = \text{konstant} \quad (5.4.4)$$

und daher

$$\underline{F}_i = -\nabla_i V_i^{(\text{ext})}(\underline{r}_i) = 0. \quad (5.4.5)$$

Für die Wechselwirkungspotentiale muss auf Grund der Translationsinvarianz

$$V_{ij}(\underline{r}_i + \underline{r}_0, \underline{r}_j + \underline{r}_0) = V_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) \quad (5.4.6)$$

gelten, d.h.  $V_{ij}$  hängt nur vom Differenzvektor  $\underline{r}_i - \underline{r}_j$  ab:

$$V_{ij}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) = v_{ij}(\underline{r}_i - \underline{r}_j). \quad (5.4.7)$$

Somit gilt für die Kraft

$$\underline{F}_{ij} = -\nabla_i v_{ij} = \nabla_j v_{ij} = -\underline{F}_{ji}. \quad (5.4.8)$$

Wie wir in Kap. 5.1 gezeigt haben, folgt aus (5.4.4) und (5.4.8) die Erhaltung des Impulses  $\underline{P}$ . Gilt zusätzlich noch Rotationsinvarianz, so hängt  $v_{ij}$  nur vom Betrag  $|\underline{r}_i - \underline{r}_j|$  des Abstandsvektors  $\underline{r}_i - \underline{r}_j$  ab. Die inneren Kräfte müssen dann Zentralkräfte sein und daher folgt gemäss Kap. 5.2 die Drehimpulserhaltung.

# Kapitel 6

## Eindimensionale Bewegung

In diesem Kapitel wollen wir eindimensionale Bewegungen genauer untersuchen. Wir werden sehen, dass sich dieses Problem unter Benutzung der Erhaltungssätze weitgehend allgemein lösen lässt. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass sich der Massenpunkt der Masse  $m$  nur entlang der  $x$ -Achse unter dem Einfluss einer Kraft  $F(x)$  bewegt, die nur vom Ort abhängt. Die Bewegungsgleichung ist dann durch

$$m\ddot{x} = F(x) \quad (6.0.1)$$

gegeben.

In einer Dimension ergibt sich gegenüber dem höherdimensionalen Fall eine wichtige Vereinfachung, da alle Kraftfelder  $F(x)$  konservativ sind, denn es existiert immer ein Potential

$$V(x_2) - V(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx. \quad (6.0.2)$$

Geometrisch ist das leicht einzusehen, denn der Wert des Integrals ist wegunabhängig, da es in einer Dimension effektiv nur einen Weg von  $x_1$  nach  $x_2$  gibt.

### 6.1 Bewegungstypen

Auf Grund der Vorbemerkungen können wir ein allgemeines Potential  $V(x)$  betrachten, das differenzierbar sei, damit  $F(x)$  wohldefiniert ist. Nach dem Energiesatz ist  $E = T + V$  konstant und da

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0 \quad (6.1.1)$$

muss gelten

$$V(x) \leq E. \quad (6.1.2)$$

Wir können nun drei Situationen unterscheiden:

- **Ruhelagen:** Ein Punkt  $x_0$  ist eine **Ruhelage**, wenn

$$F(x_0) = -V'(x_0) = 0 \quad (6.1.3)$$

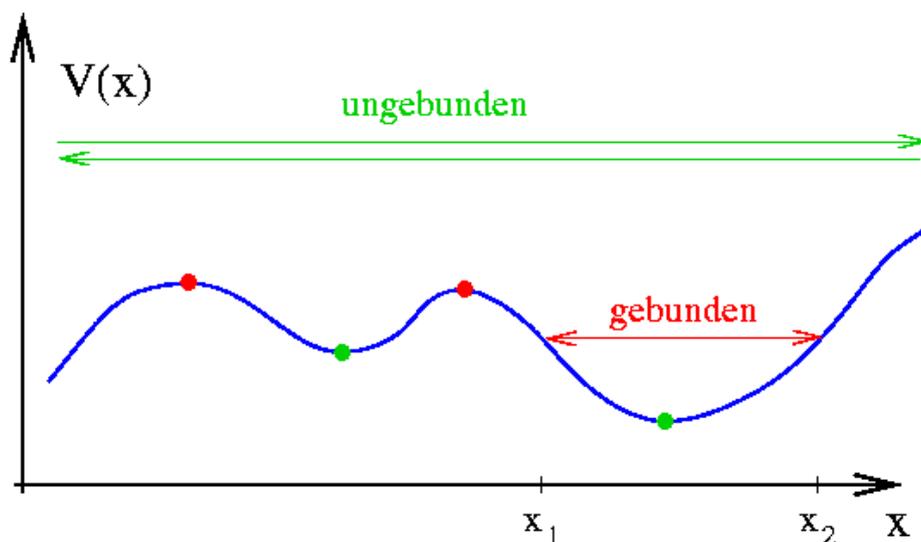


Abbildung 6.1.1: Die möglichen Bewegungstypen in einem eindimensionalen Potential  $V(x)$ . Die grünen und roten Punkte entsprechen stabilen bzw. instabilen Ruhelagen. Außerdem sind Beispiele für gebundene und ungebundene Bewegungen gezeigt.

ist, d.h.  $x_0$  ist ein Extremum oder Sattelpunkt von  $V(x)$ . Minima (mit  $V''(x_0) > 0$ , d.h.  $F'(x_0) < 0$ ) sind **stabile Ruhelagen**, Maxima (mit  $V''(x_0) < 0$ , d.h.  $F'(x_0) > 0$ ) **instabile Ruhelagen**. In einer Ruhelage ist  $\dot{x} = 0$  und daher  $E = V(x_0)$ .

- **Gebundene Bewegung:** Wenn  $V(x) \leq E$  für ein Intervall  $x_1 \leq x \leq x_2$  und  $V(x) > E$  für  $x < x_1$  und  $x > x_2$ , so ist das Teilchen im Intervall  $[x_1, x_2]$  eingesperrt und oszilliert periodisch zwischen den **Umkehrpunkten**  $x_1$  und  $x_2$  hin und her.
- **Ungebundene Bewegung:** Gilt überall  $V(x) < E$ , so bewegt sich das Teilchen (i.a. mit variabler Geschwindigkeit) ungebunden nach links oder rechts.

Die drei Situationen sind in Abb. 6.1.1 schematisch dargestellt.

## 6.2 Energiemethode

Die eindimensionale Bewegungsgleichung kann mit Hilfe des Energiesatzes für beliebige (konservative) Kraftfelder gelöst werden.

Der Energiesatz

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \quad (6.2.1)$$

lässt sich in eine Differentialgleichung 1. Ordnung umformen:

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} [E - V(x)] . \quad (6.2.2)$$

Dies ist eine implizite DGL bei der die konstante Energie  $E$  durch die Anfangsbedingung festgelegt wird:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(0) + V(x(0)). \quad (6.2.3)$$

Die DGL ist nur sinnvoll, wenn  $E \geq V(x)$ , da  $\dot{x}^2 \geq 0$ . In diesem Fall kann man die Wurzel ziehen,

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}, \quad (6.2.4)$$

wobei für eine Bewegung nach rechts '+' zu wählen ist, für eine Bewegung nach links '-'. Die explizite DGL (6.2.4) können wir nun durch Trennung der Variablen lösen:

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}}. \quad (6.2.5)$$

Dies können wir nun integrieren und erhalten

$$\boxed{t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x')]}}}. \quad (6.2.6)$$

mit der Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$ . Wir erhalten also die Lösung in der Form  $t = t(x)$  woraus wir durch Invertieren die Bahnkurve  $x = x(t)$  bestimmen können.

### 6.2.1 Harmonischer Oszillator

Als Beispiel schauen wir uns den **harmonischen Oszillator** an, der in vielen Bereichen eine wichtige Rolle spielt. Die Kraft ist durch das **Hooke'sche Gesetz**

$$F(x) = -kx \quad (6.2.7)$$

gegeben, mit der Federkonstante  $k$ . Das zugehörige Potential ist das **harmonische Potential**

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (6.2.8)$$

wobei wir die Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.2.9)$$

eingeführt haben.

Das Hooke'sche Gesetz beschreibt eine Federschwingung bei kleinen Auslenkungen. Anschaulich erwarten wir daher bei vorgegebener Energie  $E$  eine periodische Bewegung zwischen den symmetrischen Punkten  $-x_{\max}$  und  $x_{\max}$ . Dort gilt

$$E = V(x_{\max}) = V(-x_{\max}) \quad (6.2.10)$$

und daher ist

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}. \quad (6.2.11)$$

Allgemein beschreibt der Energiesatz des harmonischen Potentials

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (6.2.12)$$

eine Ellipse in der  $(x, \dot{x})$ -Ebene, die im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Wir bestimmen nun die Bahn explizit, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Bewegung nach rechts ( $\dot{x} > 0$ ) betrachten und  $t_0 = 0$  setzen. Dann folgt aus der allgemeinen Lösung (6.2.5)

$$t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[ E - \frac{k}{2}x'^2 \right]}}. \quad (6.2.13)$$

Allgemein gilt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A - Bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{B}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{B}{A}} x \right) + C \quad (6.2.14)$$

mit beliebigen reellen Konstanten  $A, B, C$ . In unserem Fall ist  $B = \frac{k}{m}$  und  $\frac{B}{A} = \frac{1}{x_{\max}^2}$  und somit

$$t = \frac{1}{\omega} \left[ \arcsin \left( \frac{x(t)}{x_{\max}} \right) - \arcsin \left( \frac{x(0)}{x_{\max}} \right) \right]. \quad (6.2.15)$$

Durch Invertieren erhalten wir hieraus

$$x(t) = x_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (6.2.16)$$

mit

$$\varphi_0 = \arcsin \left( \frac{x(0)}{x_{\max}} \right). \quad (6.2.17)$$

Dies entspricht, wie erwartet, einer Schwingung mit der Amplitude  $x_{\max}$ .

# Kapitel 7

## Zweikörperproblem und Gravitation

In diesem Kapitel wollen wir nun das Zweikörperproblem für den Fall einer Wechselwirkung über Zentralkräfte vollständig lösen und auf die Planetenbewegung anwenden.

### 7.1 Zweikörperproblem mit Zentralkraft

Wir betrachten zwei Körper mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$ , die über eine Zentralkraft miteinander wechselwirken. Das zugehörige Zentralpotential sei  $V(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$ . Wir stehen daher vor der Aufgabe, die miteinander gekoppelten Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = -\nabla_1 V = -V'(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}, \quad (7.1.1)$$

$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -\nabla_2 V = -V'(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|}, \quad (7.1.2)$$

zu lösen, wobei  $V'$  für die Ableitung des Potentials steht. Zur Vereinfachung des Problems werden wir nun die in Kap. 5 abgeleiteten Erhaltungsgrößen heranziehen.

#### 7.1.1 Impulserhaltung

Wie wir in Kap. 5.1 gesehen haben, bewegt sich der Schwerpunkt

$$\underline{R}(t) = \frac{m_1 \underline{r}_1(t) + m_2 \underline{r}_2(t)}{m_1 + m_2} \quad (7.1.3)$$

geradlinig gleichförmig. Als zweite Größe bietet sich die **Relativkoordinate**

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_1(t) - \underline{r}_2(t) \quad (7.1.4)$$

an. Deren Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) V'(r) \hat{r}, \quad (7.1.5)$$

wobei  $\hat{r} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$  der Einheitsvektor in Richtung der Relativkoordinate ist. Wir führen zur Vereinfachung die **reduzierte Masse**  $\mu$  ein mit

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad (7.1.6)$$

d.h.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (7.1.7)$$

Für  $m_1 = m_2 = m$  ist daher  $\mu = \frac{m}{2}$ . Ist eine der Massen viel größer als die andere, d.h.  $m_1 \gg m_2$  oder  $m_2 \gg m_1$ , so ist  $\mu \approx \min\{m_1, m_2\}$ .

Mit Hilfe der reduzierten Masse lässt sich die **Bewegungsgleichung der Relativkoordinate** in der einfachen Form

$$\mu \underline{\ddot{r}} = -V'(r) \hat{r} \quad (7.1.8)$$

schreiben. Dies entspricht der Bewegungsgleichung *eines* Teilchens der Masse  $\mu$  im Potential  $V(r)$ .

### 7.1.2 Drehimpulserhaltung

Aus Kapitel 5.2 wissen wir, dass in Zentralpotentialen der Drehimpuls erhalten ist. Dies gilt daher auch für den Drehimpuls der Relativbewegung

$$\underline{l} = \mu(\underline{r} \times \dot{\underline{r}}). \quad (7.1.9)$$

Da

$$\underline{r} \cdot \underline{l} = \dot{\underline{r}} \cdot \underline{l} = 0 \quad (7.1.10)$$

ist, verläuft die Bewegung für alle Zeiten in der Ebene senkrecht zum Drehimpuls  $\underline{l}$ . Wir haben somit das Problem auf eine zweidimensionale Bewegung reduziert!

Wir wählen nun das Koordinatensystem so, das der Drehimpuls in  $z$ -Richtung zeigt:  $\underline{l} = l \underline{e}_z$ . Die Bewegung senkrecht dazu, d.h. in der  $x$ - $y$ -Ebene, beschreiben wir durch ebene Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi \quad (7.1.11)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (7.1.12)$$

mit den Einheitsvektoren (siehe Abb. 7.1.1)

$$\underline{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad (7.1.13)$$

$$\underline{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi). \quad (7.1.14)$$

Somit ist  $\underline{r} = r \underline{e}_r$ .

Nun bestimmen wir die Geschwindigkeit der Relativkoordinate in den neuen Koordinaten:

$$\dot{\underline{r}} = \frac{d}{dt}(r \underline{e}_r) = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\underline{e}}_r = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi, \quad (7.1.15)$$

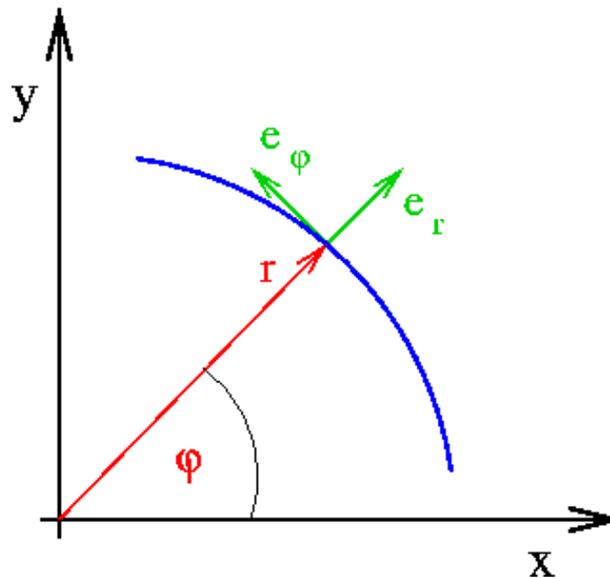


Abbildung 7.1.1: Zur Beschreibung der Bewegung in der Ebene senkrecht zum Drehimpuls werden ebene Polarkoordinaten verwendet. Die Einheitsvektoren  $\underline{e}_r$  und  $\underline{e}_\varphi$  sind parallel bzw. senkrecht zum Ortsvektor  $\underline{r}(t)$  gerichtet.

wobei wir

$$\dot{\underline{e}}_r = (-\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{\varphi} \cos \varphi) = \dot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi) = \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \quad (7.1.16)$$

benutzt haben.

Die können wir nun in den Ausdruck (7.1.9) für den Drehimpuls einsetzen:

$$\underline{l} = \mu(\underline{r} \times \dot{\underline{r}}) = \mu(r \underline{e}_r \times \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi) = \mu r^2 \dot{\varphi} (\underline{e}_r \times \underline{e}_\varphi) = \mu r^2 \dot{\varphi} \underline{e}_z, \quad (7.1.17)$$

da das Kreuzprodukt von  $\underline{e}_r$  und  $\underline{e}_\varphi$  gerade den Einheitsvektor  $\underline{e}_z$  in  $z$ -Richtung liefert. Da andererseits  $\underline{l} = l \underline{e}_z$  ist, erhalten wir die **Azimuthalgleichung**

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}}. \quad (7.1.18)$$

Da  $l = \text{const.}$  liefert sie einen direkten Zusammenhang zwischen  $r(t)$  und  $\varphi(t)$ : Ist  $r(t)$  bekannt, können wir über die Azimuthalgleichung hieraus  $\varphi(t)$  bestimmen.

### 7.1.3 Energieerhaltung

Im letzten Schritt nutzen wir nun die Energieerhaltung aus. Die Energie der Relativbewegung ist

$$E = \frac{1}{2} \mu |\dot{\underline{r}}|^2 + V(r) = \text{const.}, \quad (7.1.19)$$

wobei in Polarkoordinaten

$$\dot{\underline{r}}^2 = |\dot{\underline{r}}|^2 = |\dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \quad (7.1.20)$$

Somit erhält man

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r), \quad (7.1.21)$$

mit dem **effektiven Potential**

$$U(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (7.1.22)$$

wobei wir die Azimuthalgleichung (7.1.18) benutzt haben. Die Größe  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$  bezeichnet man auch als das **Zentrifugalpotential**. Sie entspricht der kinetischen Energie der Azimuthalbewegung. Damit haben wir das Zweikörperproblem deutlich vereinfacht, denn die Radialkoordinate vollführt eine eindimensionale Bewegung im Potential  $U(r)$ . Wir können daher auf die Ergebnisse aus Kapitel 7.1 zurückgreifen:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r)]} \quad (7.1.23)$$

und somit

$$t(r) = t(r_0) \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r')]}} , \quad (7.1.24)$$

woraus wir durch Umkehrung  $r = r(t)$  erhalten. Setzen wir dies in die Azimuthalgleichung ein, so erhalten wir

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')}. \quad (7.1.25)$$

Damit ist das allgemeine Zweikörperproblem (im Prinzip) gelöst!

### 7.1.4 Rekonstruktion der Bahnen

Die Bewegung der einzelnen Massen lässt sich aus der Schwerpunktsbewegung  $\underline{R}(t)$  und der Bewegung der Relativkoordinate  $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$  rekonstruieren:

$$\underline{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underline{r} + \underline{R}, \quad (7.1.26)$$

$$\underline{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{r} + \underline{R}. \quad (7.1.27)$$

Man prüft leicht nach, dass hiermit  $m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2 = (m_1 + m_2)\underline{R}$  und  $\underline{r}_1 - \underline{r}_2 = \underline{r}$  gilt.

Im Ruhesystem des Schwerpunkts, das ja ein Inertialsystem ist, erhält man die Bewegung von  $\underline{r}_1$  aus der Relativbewegung  $\underline{r}$  durch Skalierung mit  $\frac{m_2}{m_1+m_2}$  und von  $\underline{r}_2$  durch Skalierung von  $\underline{r}$  mit  $\frac{m_1}{m_1+m_2}$  und Spiegelung am Schwerpunkt.

## 7.2 Keplerproblem

Wir wollen nun die allgemeinen Erkenntnisse über das Zweikörperproblem auf das **Keplerproblem**, d.h. die gravitative Wechselwirkungen zweier Massenpunkte, anwenden. Das Gravitationspotential ist durch

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} =: -\frac{\alpha}{r} \quad (7.2.1)$$

gegeben, mit der Gravitationskonstanten  $G \approx 5.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ . Das effektive Potential hat daher die Form

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}. \quad (7.2.2)$$

Wir betrachten nun den Fall  $l \neq 0$ , der für die Planetenbewegung relevant ist. Für große bzw. kleine Abstände ergeben sich folgende Grenzfälle des effektiven Potentials:

$$\text{kleine Abstände:} \quad U(r) \sim r^{-2} \rightarrow \infty \quad (r \rightarrow 0), \quad (7.2.3)$$

$$\text{große Abstände:} \quad U(r) \sim -\frac{\alpha}{r} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty). \quad (7.2.4)$$

Das Potentialminimum liegt bei (siehe Abb. 7.2.1)

$$r_0 = \frac{l^2}{\mu\alpha} \quad (7.2.5)$$

mit

$$U(r_0) =: U_{\min} = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2}. \quad (7.2.6)$$

### 7.2.1 Bewegungstypen

Bevor wir das Keplerproblem analytisch betrachten, machen wir uns an Hand des Verlaufs von  $U(r)$  (siehe Abb. 7.2.1) die möglichen Bewegungstypen klar.

- $E = U_{\min}$ : Dann ist nur  $r = R_0$  möglich. Es liegt eine stabile Ruhelage der Radialbewegung vor, die einer Kreisbahn mit Radius  $r_0$  und Kreisfrequenz

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r_0^2} \quad (7.2.7)$$

entspricht (vgl. (7.1.18)).

- $U_{\min} < E < 0$ : Die Radialbewegung ist eine gebundene Oszillation zwischen den Umkehrpunkten  $r_{\min}$  und  $r_{\max}$  mit  $U(r_{\min}) = U(r_{\max}) = E$ . Aus der Azimuthalgleichung (7.1.18) können wir die Winkelverschiebung nach einer Periode bestimmen:

$$\Delta\varphi = \frac{2l}{\mu} \int_{t(r_{\min})}^{t(r_{\max})} \frac{dt'}{r^2(t')} = 2l \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U(r))}}, \quad (7.2.8)$$

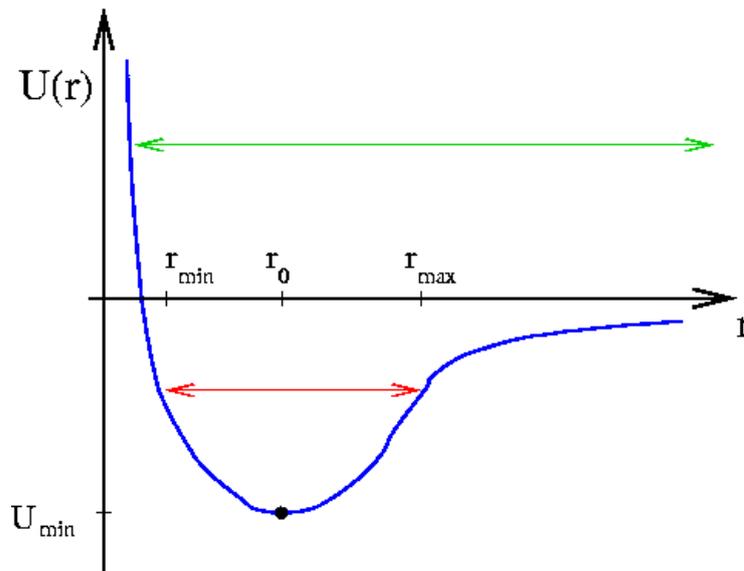


Abbildung 7.2.1: Das effektive Potential  $U(r)$  des Kepler-Problems. Das Potential nimmt sein Minimum  $U_{\min}$  bei  $r_0$  an. Bei einer Gesamtenergie  $E < 0$  ist eine gebundene Bewegung zwischen den Umkehrpunkten  $r_{\min}$  und  $r_{\max}$  möglich (rot). Ist  $E > 0$  so ist die Bewegung ungebunden (grün).

wobei wir mit  $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r))}$  (vgl. 6.2.4) substituiert haben. Die Bahn ist nur dann geschlossen, wenn  $\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$  eine rationale Zahl ist. Beispiele sind in Abb. 7.2.2 und 7.2.3 gezeigt.

- $E > 0$ : Die Radialbewegung ist ungebunden mit Reflexion an einem Umkehrpunkt  $r_{\min}$ . Für  $t \rightarrow -\infty$  und  $t \rightarrow \infty$  ist die Bewegung geradlinig. Man kann die Bewegung daher durch den **Streuwinkel**  $\chi$  zwischen Einfall- und Ausfallrichtung charakterisieren (Abb. 7.2.4).

## 7.2.2 Bahnkurven

Wir wollen nun die Bahnkurven im Keplerproblem explizit berechnen. Im Prinzip könnten wir die allgemeine Lösung  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$  aus Kap. 7.1 direkt verwenden. Es ist aber zweckmässiger, stattdessen  $r(\varphi)$  zu bestimmen. Dazu stellen wir zunächst fest, dass

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\varphi}, \quad (7.2.9)$$

wobei wir die Azimuthalgleichung (7.1.18) verwendet haben. Der Energiesatz nimmt daher die Form

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (7.2.10)$$

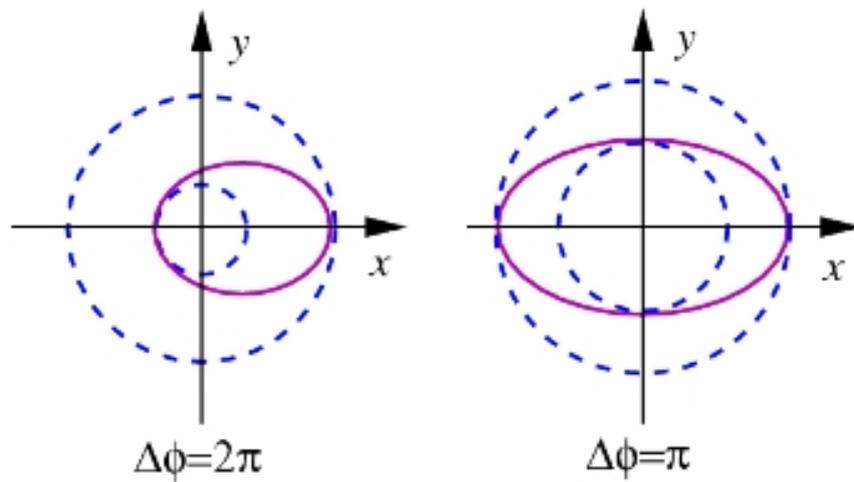


Abbildung 7.2.2: Geschlossene Bahnen mit  $\varphi = 2\pi$  und  $\varphi = \pi$ . Der linke Fall entspricht dem Kepler-Problem, der rechte dem dreidimensionalen harmonischen Oszillator: Wären die Planeten mit Hooke'schen Federn an die Sonne gebunden, läge die Sonne im Mittelpunkt und nicht im Brennpunkt der Ellipsenbahnen. (aus [5])

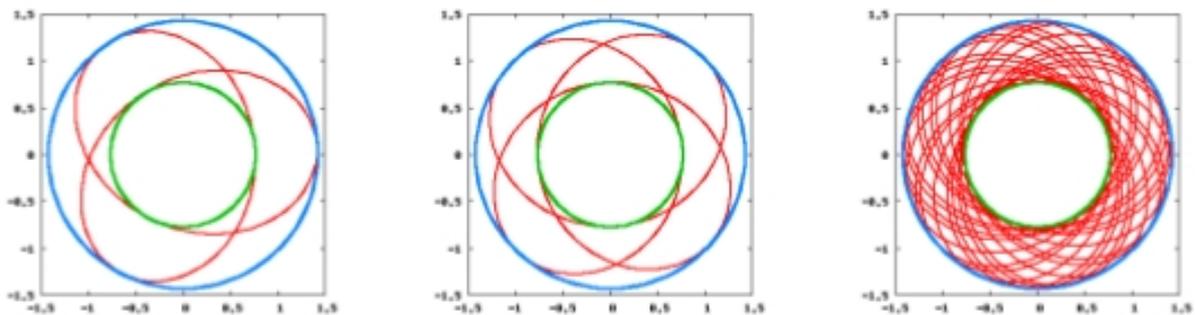


Abbildung 7.2.3: Geschlossene Bahnen (rot) mit  $\frac{\Delta\varphi}{\pi} = \frac{3}{2}$  (links) und  $\frac{\Delta\varphi}{\pi} = \frac{4}{3}$  (Mitte). Im rechten Bild ist  $\frac{\Delta\varphi}{\pi}$  irrational. Die Bahn füllt dann den ringförmigen Bereich zwischen den beiden radialen Umkehrpunkten  $r_{\min}$  (grüner Kreis) und  $r_{\max}$  (blauer Kreis) mit der Zeit dicht aus. (aus [5])

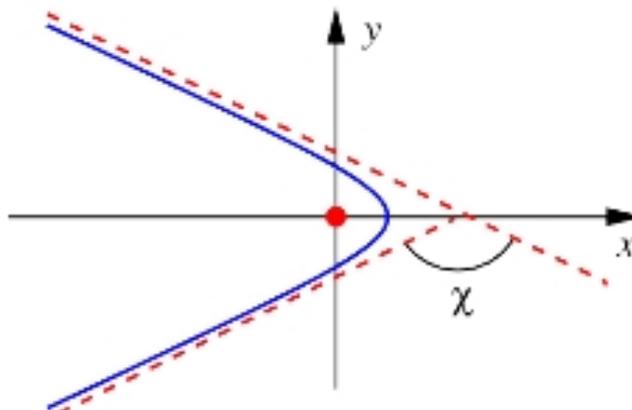


Abbildung 7.2.4: Definition des Streuwinkels. (aus [5])

an. Er lässt sich durch eine Reihe von Variablentransformationen vereinfachen und auf eine bekannte Form bringen. Da in (7.2.10) vor allem negative Potenzen von  $r$  auftreten, bietet sich zunächst die Transformation

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} \quad (7.2.11)$$

an. Es gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} = -r^2 \frac{du}{d\varphi} \quad (7.2.12)$$

und somit

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2. \quad (7.2.13)$$

Die Energie nimmt in der neuen Variablen die Form

$$E = \frac{l^2}{2\mu} \left[ \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] - \alpha u \quad (7.2.14)$$

an.

Im zweiten Schritt eliminieren wir nun den linearen Term in (7.2.14) durch die quadratische Ergänzung

$$\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi) - \frac{\mu\alpha}{l^2}. \quad (7.2.15)$$

Dann gilt

$$\frac{1}{2}\mu \left( \frac{d\tilde{u}}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2}\mu\tilde{u}^2 = \frac{\mu^2 E}{l^2} + \frac{\mu^3 \alpha^2}{2l^4} =: \tilde{E}. \quad (7.2.16)$$

Dabei haben wir die Energie reskaliert und verschoben, so dass der Energiesatz in der Form (7.2.16) eine einfache Interpretation hat:  $\tilde{u}$  entspricht der Teilchenkoordinate und  $\varphi$  der Zeit.

Damit hat (7.2.16) genau die Form des Energiesatzes eines harmonischen Oszillators mit der Masse  $\mu$ , der Federkonstante  $k = \mu$  und der Gesamtenergie  $\tilde{E}$  (vgl. 6.2.12). Wir können daher die Ergebnisse aus Kap. 6.2.1 übernehmen und erhalten als Lösung eine Schwingung mit Frequenz  $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = 1$ :

$$\tilde{u}(\varphi) = \tilde{u}_{\max} \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (7.2.17)$$

mit der Amplitude

$$\tilde{u}_{\max} = \sqrt{\frac{2\tilde{E}}{\mu}} = \frac{\mu\alpha}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}. \quad (7.2.18)$$

Wir kehren nun die Koordinatentransformationen um, um die Bahn in Polarkoordinatendarstellung zu erhalten:

$$r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = \frac{1}{\tilde{u}(\varphi) + \frac{\mu\alpha}{l^2}} = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (7.2.19)$$

wobei wir (7.2.17) und das Potentialminimum  $r_0 = \frac{l^2}{\mu\alpha}$  (vgl. (7.2.5)) benutzt haben. Der Winkel  $\varphi_0$  legt die Orientierung der Bahn in der Bahnebene fest. Wir können ihn ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu  $\varphi_0 = 0$  festlegen. Die Bahnkurven im Keplerproblem nehmen dann die Form

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \varphi}} \quad (7.2.20)$$

an. Dies ist die Gleichung eines **ebenen Kegelschnittes**<sup>1</sup> mit der **Exzentrizität**

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}, \quad (7.2.21)$$

wobei der Ursprung ( $r = 0$ ) in einem der Brennpunkte liegt.

**Ebene Kegelschnitte** entstehen durch Schneiden eines hohlen Kreiskegels mit einer Ebene<sup>2</sup> (Abb. 7.2.5 und 7.2.6). Die Form der so erzeugten Schnittlinie hängt dabei vom Verhältnis des Öffnungswinkels  $\omega$  des Kegels und des Schnittwinkels  $\alpha$  ab. Ist  $\alpha > \omega$ , so erhält man eine **Ellipse**. Hierbei ist der Kreis als Spezialfall  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  enthalten. Ist  $\alpha < \omega$ , so erhält man eine **Hyperbel**. Der Grenzfall  $\alpha = \omega$  entspricht der **Parabel**.

Wir wollen nun den Zusammenhang mit der qualitativen Betrachtung der Bahnformen in Kap. 7.2.1 herstellen. Dazu betrachten wir drei Fälle:

- $E < 0$ : In diesem Fall ist die Exzentrizität  $\epsilon < 1$  und wir haben es mit einer Ellipse zu tun, deren wichtigste Kenngrößen in Abb. 7.2.7 dargestellt sind.

Die Umkehrpunkte  $r_{\max}$  und  $r_{\min}$  erhalten wir aus (7.2.20) für  $\varphi = 0$  bzw. für  $\varphi = \pi$ :

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon}, \quad r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \epsilon}. \quad (7.2.22)$$

<sup>1</sup>Ebene Kegelschnitte werden in den Übungen ausführlicher betrachtet.

<sup>2</sup>Applet zu Kegelschnitten: [www.pk-applets.de/geo/kegelschnitt/kegelschnitt.html](http://www.pk-applets.de/geo/kegelschnitt/kegelschnitt.html)

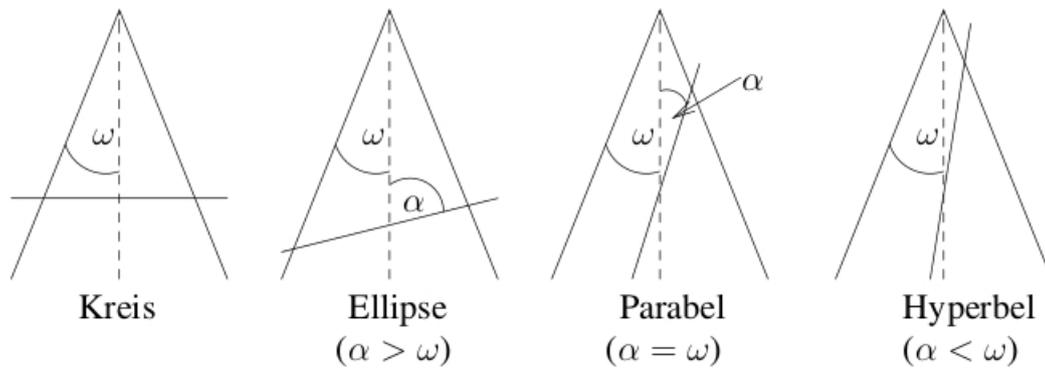


Abbildung 7.2.5: Die Kegelschnitte. Der Kreiskegel mit Öffnungswinkel  $\omega$  ist in der Seitenansicht gezeigt.

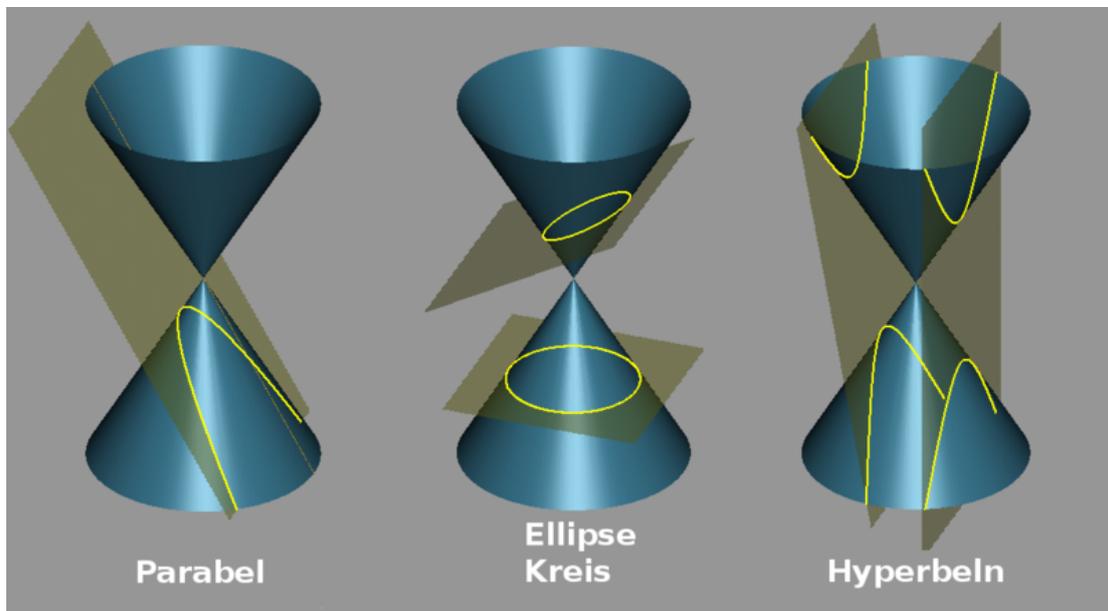


Abbildung 7.2.6: Kegelschnitte [4].

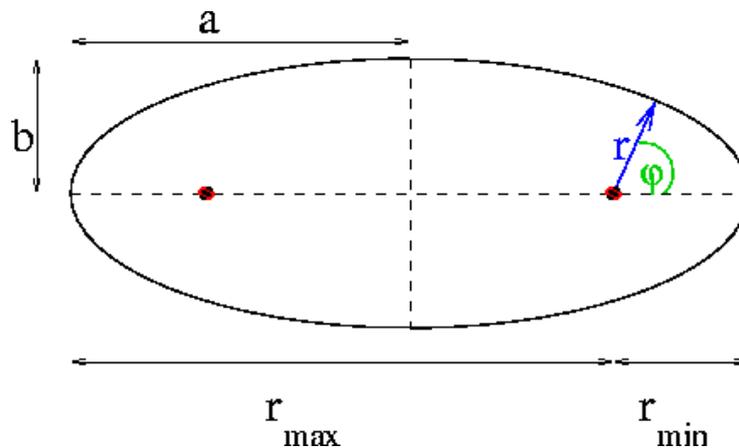


Abbildung 7.2.7: Die wichtigsten Kenngrößen einer Ellipse sind neben den Brennpunkten (rot) die große Halbachse  $a$ , die kleine Halbachse  $b$ , das Perihel  $r_{\min}$  und das Aphel  $r_{\max}$ .

Den kleinsten Abstand  $r_{\min}$  zum Ursprung, der ja in einem der Brennpunkte liegt, bezeichnet man als das **Perihel** der Bahn, den größten Abstand  $r_{\max}$  als das **Aphel**. Die große Halbachse ist

$$a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{1}{2} \left( \frac{r_0}{1 + \epsilon} + \frac{r_0}{1 - \epsilon} \right) = \frac{r_0}{1 - \epsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}. \quad (7.2.23)$$

Die kleine Halbachse bestimmt sich zu

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{l}{\sqrt{2|E|\mu}}, \quad (7.2.24)$$

wobei wir ein Ergebnis aus den Übungen verwendet haben.

Für  $\epsilon = 0$  ist  $a = b$  und die Bahn wird zu einer Kreisbahn vom Radius  $r_0$ .

- $E > 0$ : In diesem Fall ist  $\epsilon > 1$  und der Nenner von (7.2.20) hat Nullstellen beim Winkel  $\varphi_\infty$  mit  $1 + \epsilon \cos \varphi_\infty = 0$ , d.h. für

$$\varphi_\infty = \arccos \left( -\frac{1}{\epsilon} \right) \quad (7.2.25)$$

divergiert  $r(\varphi)$ . In diesem Fall ist die Bahn eine Hyperbel, die wir durch den Streuwinkel  $\chi = 2\varphi_\infty - \pi$  charakterisieren können, wobei  $\sin \left( \frac{\chi}{2} \right) = \frac{1}{\epsilon}$ . Der Minimalabstand zum Brennpunkt ist

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon}, \quad (7.2.26)$$

wie bei der Ellipse.

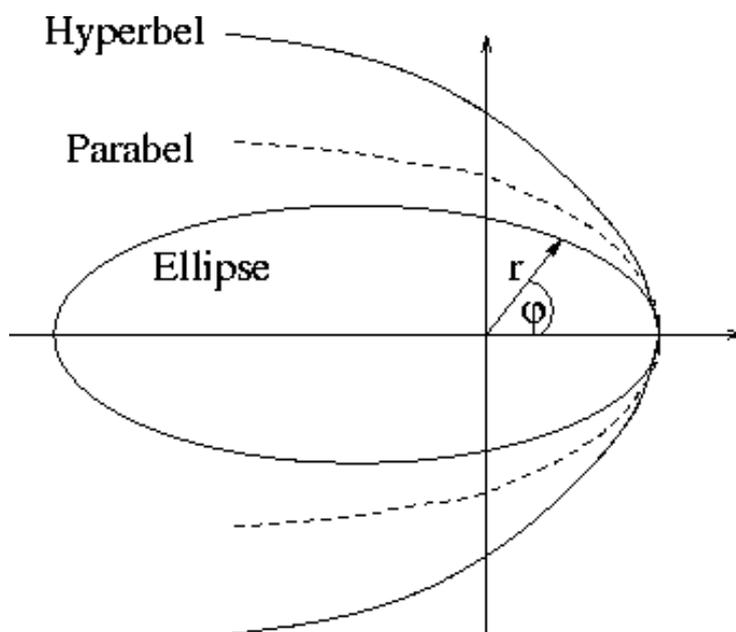


Abbildung 7.2.8: Die Bahnen beim Keplerproblem haben die Form von Kegelschnitten

- $E = 0$ : In diesem Fall ist  $\epsilon = 1$  und die Hyperbel entartet zur Parabel. Der Streuwinkel ist in diesem Fall  $\chi = \pi$  und der Minimalabstand  $r_{\min} = \frac{r_0}{2}$ .

Wir können die Bahn auch in kartesischen Koordinaten angeben:

$$x = \frac{1}{2} \left( r_0 - \frac{y^2}{r_0} \right), \quad (7.2.27)$$

wobei der Einfall entlang der  $x$ -Achse erfolgen soll. An dieser Form erkennt man explizit, dass die Bahn parabelförmig ist.

In Abb. 7.2.8 sind noch einmal die drei Bahntypen des Keplerproblems vergleichend zusammengestellt.

Mit den Ergebnissen aus Kap. 7.1.4 sehen wir, dass sich die beiden Einzelmassen im gebundenen Fall auf Ellipsen um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Die großen Halbachsen dieser Ellipsen sind

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a \quad \text{bzw.} \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a. \quad (7.2.28)$$

Für ein typische Planet–Sonne-System ist die Sonnenmasse viel größer als die des Planeten ( $m_2 \gg m_1$ ) und daher  $a_1 \approx a$  und  $a_2 \ll a$ . Umgekehrt kann man aus der Beobachtung von periodischen Bewegungen des Zentralgestirns auf die Existenz von Planeten schließen. Dies ist eine wichtige Methode zum Nachweis extrasolarer Planeten.



Abbildung 7.2.9: Von der Erde aus gesehen folgt der Mars einer schleifenförmigen Bahn [6].

### 7.2.3 Die Kepler'schen Gesetze

Auf der Basis der Marsbeobachtungen von Tycho Brahe (1546 - 1601), die dieser ohne Teleskop durchführte, formulierte Johannes Kepler (1571 - 1630) in den Jahren 1609 und 1618 drei Gesetze der Planetenbewegung. Wir werden im Folgenden zeigen, wie diese Gesetze aus der exakten Lösung des Keplerproblems folgen.

**1. Kepler'sches Gesetz:** Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.

Diese Aussage ist in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert. Sie stellt zunächst einmal eine Abkehr vom geozentrischen Weltbild dar, bei dem sich die Erde im Mittelpunkt der Welt befindet. Außerdem wird das Paradigma der (perfekten) Kreisbahnen aufgegeben. Dies ist umso erstaunlicher, als die Exzentrizitäten  $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$  der meisten Planetenbahnen sehr klein sind, z.B.

$$\epsilon_{\text{Mars}} \approx 0.0935, \quad \epsilon_{\text{Erde}} \approx 0.0167. \quad (7.2.29)$$

Schließlich muss man noch berücksichtigen, dass die Planeten von der Erde aus gesehen auf äußerst komplexen Bahnen verlaufen (Fig. 7.2.9).

Die exakte Rechnung in Kap. 7.2.2 zeigt, dass nicht die Sonne im Brennpunkt der Ellipse liegt, sondern der gemeinsame Schwerpunkt von Sonne und Planeten. Auf Grund der großen Masse ist die Abweichung aber relativ gering.

Das 1. Kepler'sche Gesetz ist spezifisch für die  $\frac{1}{r^2}$ -Abhängigkeit der Kraft. Diese Aussage wird durch das **Bertrand'sche Theorem** präzisiert: Unter allen Zentralpotentialen  $V(r)$  sind nur im  $\frac{1}{r}$ -Potential (Gravitationskraft) und im harmonischen Potential  $V(r) \sim r^2$  (Hooke'sches Gesetz) alle gebundenen Bahnen geschlossen.

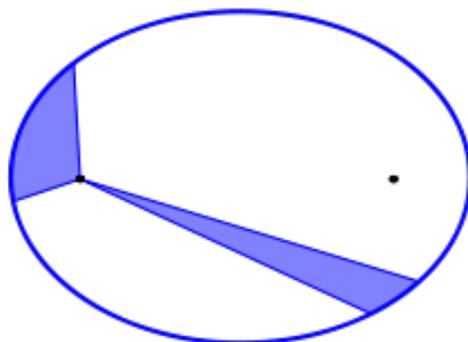


Abbildung 7.2.10: Illustration des 2. Kepler'schen Gesetzes [4].

**2. Kepler'sches Gesetz:** Die Verbindungslinie zwischen den Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Diese Aussage ist in Abb. 7.2.10 illustriert. Sie ist ein Spezialfall des Flächensatzes und gilt daher für alle Zentralkräfte. Das 2. Kepler'sches Gesetz enthält daher keine Informationen über die Abstandsabhängigkeit der Gravitationswechselwirkung. Es stellt einen Bruch mit der Annahme dar, dass sich Himmelskörper mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Tatsächlich bewegen sie sich umso schneller auf ihren Ellipsenbahnen, je näher sie sich an der Sonne befinden.

Die ersten beiden Gesetze stellte Kepler bereits im Jahre 1609 auf, das dritte Gesetz erst fast 10 Jahre später (1618):

**3. Kepler'sches Gesetz:** Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen.

Um diese Aussage zu beweisen, beginnen wir mit dem Flächensatz (5.2.4) und integrieren ihn über die Umlaufzeit  $T$ :

$$A = \int_0^T \frac{dA}{dt} dt = \frac{1}{2m} |l| T. \quad (7.2.30)$$

$A$  ist die bei einem Umlauf überstrichene Fläche. Für Ellipsen gilt allgemein

$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (7.2.31)$$

so dass wir nach Quadrieren

$$\frac{l^2 T^2}{4m^2} = A^2 = \pi^2 a^4 (1 - \epsilon^2) = \pi^2 a^3 r_0 \quad (7.2.32)$$

erhalten, wobei wir das Ergebnis (7.2.23) für die große Halbachse verwendet haben. Somit erhalten wir mit (7.2.5)

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 r_0^2}{l^2} = \frac{4\pi^2 m^2}{\mu \alpha} \approx \frac{4\pi^2}{Gm_S}. \quad (7.2.33)$$

Das Verhältnis des Quadrats der Umlaufzeit zum Kubus der großen Halbachse ist also für alle Planeten gleich.

Wir können auch umgekehrt aus dem 3. Kepler'schen Gesetz auf die  $\frac{1}{r^2}$ -Abhängigkeit der Gravitationskraft schließen. Zur Vereinfachung betrachten wir hierzu eine Kreisbahn vom Radius  $R$ . Die Geschwindigkeit des Planeten ist dann

$$v = \frac{2\pi R}{T}. \quad (7.2.34)$$

Die Schwerkraft  $F_S$  entspricht der Zentripetalkraft  $\frac{mv^2}{R}$ :

$$F_S = \frac{mv^2}{R} = \frac{4\pi^2 m R^2}{T^2 R} = \frac{4\pi^2 m R}{T^2} \sim m \frac{R}{R^3} = \frac{m}{R^2}, \quad (7.2.35)$$

wobei wir benutzt haben, dass auf Grund des 3. Kepler'schen Gesetzes  $T^2 \sim R^3$  ist. In den Übungen werden wir dann die allgemeine Ableitung des Gravitationsgesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen behandeln.

## 7.3 Dreikörperproblem

Das 2-Körperproblem konnten wir allgemein lösen. Wie wir gesehen haben, lassen sich die 6 Differentialgleichungen 2. Ordnung für die 6 Komponenten der beiden Ortsvektoren durch Verwendung der Erhaltungssätze auf eine DGL 1. Ordnung reduzieren, womit das Problem im Prinzip gelöst ist.

Beim 3-Körperproblem haben wir es mit 9 DGL 2. Ordnung zu tun, es gibt aber keine zusätzlichen Erhaltungssätze. Daher ist das  $N$ -Körperproblem für  $N \geq 3$  nicht allgemein lösbar<sup>3</sup>. Daher sind keine allgemeinen Aussagen über Stabilität und Verhersagbarkeit möglich. Die Bewegungen vieler Himmelskörper sind **chaotisch**, d.h. kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen wachsen exponentiell an. Da man die Anfangsbedingungen nie mit beliebiger Genauigkeit kennt, macht dies Langzeitvorhersagen unmöglich. Es gibt einige gut untersuchte Beispiele für dieses chaotische Verhalten, z.B. die Bewegung des Mondes unter dem Einfluss von Sonne und Erde oder die Bewegung der Asteroiden unter dem Einfluss von Sonne und Jupiter. Es zeigt sich, dass trotz der chaotischen Schwankungen die (mechanische) Stabilität des Sonnensystems für mindestens  $10^{12}$  Jahre gewährleistet ist, was viel größer als die Lebensdauer der Sonne ist.

Es gibt aber lösbare Spezialfälle des  $N$ -Körperproblems, von denen wir hier einige kurz vorstellen wollen.

- **Restringiertes Dreikörperproblem:** Hierbei werden drei Masse  $m_1, m_2, m_3$  betrachtet, von denen eine viel kleiner ist als die beiden anderen ( $m_3 \ll m_1, m_2$ ). Der Einfluss von  $m_3$  auf die Bewegung von  $m_1$  und  $m_2$  kann daher vernachlässigt werden. Die Keplerbewegung der beiden schweren Massen definiert dann ein zeitabhängiges Potential für die leichte Masse. Deren resultierende Bahnen können aber sehr kompliziert werden.

<sup>3</sup>Einen Beweis für gravitative Wechselwirkungen hat Henri Poincaré 1892 in einem vom schwedischen König Oskar II. ausgeschriebenen Wettbewerb gegeben.

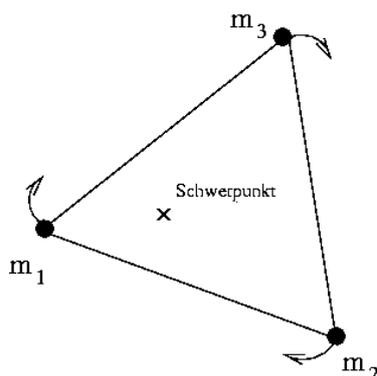


Abbildung 7.3.1: Drei Körper an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks rotieren um ihren Schwerpunkt.

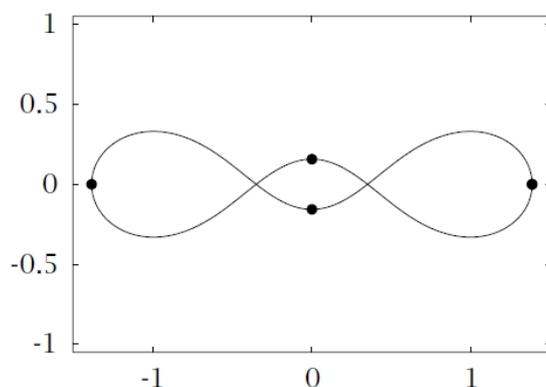


Abbildung 7.3.2: Beispiel für eine choreographische Bahn im 4-Körperproblem (Lösung von Gerver) [7].

- **Drei Körper an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks:** Dieses Problem ist für beliebige Massen  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  exakt lösbar (Lagrange, 1764). Die Bewegung ist eine Rotation um den Schwerpunkt  $\underline{R}$  des Systems (Abb. 7.3.1).
- **Drei Körper auf einer Linie:** Dieses Problem wurde zuerst von L. Euler (1707 - 1783) betrachtet und kann für beliebige Massen  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  gelöst werden.
- **Choreographische Bahnen:** Hiermit sind spezielle Lösungen des  $N$ -Körperproblems mit gravitativer Wechselwirkung gemeint. Alle Körper haben die gleiche Masse und durchlaufen nacheinander (wie beim Ballet) periodisch die gleiche, geschlossene, ebene Kurve. Das oben beschriebene Beispiel eines gleichseitigen Dreiecks ist ein Spezialfall hiervon. Die erste nichtkreisförmige Lösung wurde 1993 von Moore gefunden und 2000 von Chenciner und Montgomery analytisch nachgewiesen.

# Kapitel 8

## Analytische Mechanik

Im Folgenden werden wir Weiterentwicklungen der Newton'schen Mechanik kennenlernen, die vor allem mit den Namen Lagrange und Hamilton verbunden sind und als **analytische Mechanik** zusammengefasst werden. Diese verfolgt zwei Hauptziele:

- Das praktische Ziel ist die Aufstellung von Bewegungsgleichungen in beliebigen (insbesondere nicht-kartesischen) Koordinaten.
- Konzeptionell wird versucht, eine neue (tiefer) Begründung der Mechanik zu geben, z.B. durch ein Extremalprinzip (das Hamilton'sche Prinzip der kleinsten Wirkung).

Außerdem sind die Methoden später auch bei der Entwicklung der Quantenmechanik nützlicher als die Newton'sche Theorie.

### 8.1 Bewegung unter Zwangsbedingungen

In der Praxis ist die Bewegung von Körper häufig durch **Zwangsbedingungen** eingeschränkt. Wir illustrieren dies an einigen Beispielen:

(i): *Bewegung in einer Ebene*, z.B. auf einer Tischplatte in der Höhe  $h$ . In diesem Fall ist die Zwangsbedingung an die Bewegung  $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  des Massenpunktes durch die Bedingung  $z(t) = h$  gegeben.

(ii): *Ebenes starres Pendel* der Länge  $\ell$ . Der Aufhängepunkt sei  $\underline{r}_0 = (0, 0, z_0)$  und das Pendel soll in der  $x - z$ -Ebene schwingen. Die Zwangsbedingungen sind dann durch

$$y = 0 \quad \text{und} \quad |\underline{r} - \underline{r}_0|^2 = x^2 + (z - z_0)^2 = \ell^2 \quad (8.1.1)$$

gegeben (siehe Abb. 8.1.1).

(iii): *Zwei starr verbundene Massenpunkte*, die z.B. über eine Stange der Länge  $\ell$  miteinander verbunden sind (Abb. 8.1.2). Die Zwangsbedingung lautet dann

$$|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^2 = \ell^2. \quad (8.1.2)$$

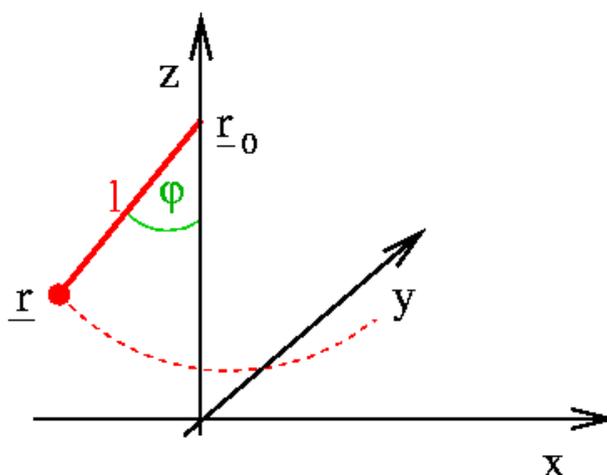


Abbildung 8.1.1: Ebenes starres Pendel.

Abbildung 8.1.2: Links: Zwei Massenpunkte, die über eine starre Verbindung der Länge  $\ell$  miteinander verbunden sind; Rechts: Massenpunkt an einer Schnur der Länge  $\ell$ .

(iv): *Massenpunkt an einer Schnur* der Länge  $\ell$ , die am Punkt  $\underline{r}_0$  befestigt ist (Abb. 8.1.2). Die Zwangsbedingung lautet in diesem Fall

$$|\underline{r}_1 - \underline{r}_0|^2 \leq \ell^2. \quad (8.1.3)$$

(v): *Eisenbahn oder Achterbahn*: Durch die Schienen wird die Bewegung auf eine (komplizierte) eindimensionale Kurve eingeschränkt.

In den Beispielen (i)-(iii) kann die Zwangsbedingung durch das Verschwinden einer oder mehrerer geeignet gewählter Funktionen  $g$  dargestellt werden:

$$(i) : \quad g(\underline{r}) = g(x, y, z) = z - h = 0, \quad (8.1.4)$$

$$(ii) : \quad g_1(\underline{r}) = y = 0, \quad \text{und} \quad g_2(\underline{r}) = x^2 + (z - z_0)^2 - \ell^2 = 0, \quad (8.1.5)$$

$$(iii) : \quad g(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^2 - \ell^2 = 0. \quad (8.1.6)$$

Man definiert daher: Eine Zwangsbedingung für ein System von  $N$  Massenpunkten, die sich in der Form  $g(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N) = 0$  darstellen lässt, heißt **holonom**. Alle anderen Zwangsbedingungen sind **nicht-holonom**. Unter den holonomen Zwangsbedingungen unterscheidet man zeitabhängige, die man als **rheonom** bezeichnet, und zeitunabhängige oder **skeloronome** Zwangsbedingungen. Im Folgenden werden wir nur holonome Zwangsbedingungen betrachten.

Die Gegenwart von Zwangsbedingungen hat zwei wichtige Konsequenzen:

- Reduktion der Zahl der **Freiheitsgrade**  $f$  eines Systems: Ein freier Massenpunkt hat 3 Freiheitsgrade, jede holonome Zwangsbedingung reduziert diese Zahl um 1. Allgemeiner hat ein  $N$  Teilchensystem mit  $R$  Zwangsbedingungen

$$f = 3N - R \text{ Freiheitsgrade.} \quad (8.1.7)$$

Wir betrachten unsere Beispiele (i)-(iii). In (i) ist  $f = 3 - 1 = 2$ , die Freiheitsgrade sind  $x$  und  $y$ . In (ii) ist  $f = 3 - 2 = 1$ , der verbleibende Freiheitsgrad ist der Auslenkungswinkel  $\varphi$  des Pendels. In (iii) ist  $f = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ . Hier kann man z.B. die 3 Koordinaten des Schwerpunktes und 2 Winkel zur Beschreibung der Orientierung der Verbindungsachse als Freiheitsgrade wählen.

- In Gegenwart von Zwangsbedingungen wirken zusätzlich zu den physikalischen Wechselwirkungen **Zwangskräfte**  $\underline{Z}$ , die für die Einhaltung der Zwangsbedingungen sorgen. Legen wir z.B. ein Objekt auf einen Tisch, so bleibt es in Ruhe, obwohl nach wie vor die Gravitationskraft wirkt. Diese muss also durch eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft kompensiert werden, so dass die Gesamtkraft verschwindet. Die Trennung zwischen Zwangskraft und physikalischen Wechselwirkungen ist eine Idealisierung, da Zwangskräfte auch auf physikalischen Kräften beruhen. Sie sind aber so stark im Vergleich mit anderen Kräften<sup>1</sup>, dass sie bei der Bewegung nicht dynamisch in Erscheinung treten.

Bei Anwesenheit von Zwangskräften lautet die Bewegungsgleichung daher

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \underline{Z}. \quad (8.1.8)$$

Ein Problem hierbei ist aber, dass die Zwangskraft  $\underline{Z}$  i.a. von der Bewegung selber abhängt, was man sich z.B. für eine Fahrt in einer Achterbahn leicht klarmacht. Es gibt nun zwei Strategien, wie man dieses Problem lösen kann:

- I. Durch explizite Berechnung der Zwangskräfte. Dies führt auf die Lagrange-Gleichungen 1. Art.
- II. Durch Eliminierung der Zwangsbedingungen durch Transformation auf verallgemeinerte Koordinaten  $(q_1, \dots, q_f)$ , welche dann die Lagrange-Gleichungen 2. Art erfüllen.

Im Folgenden wollen wir uns nun diese beiden Ansätze genauer anschauen.

<sup>1</sup>Z.B. wird die Tischfläche praktisch nicht deformiert.

## 8.2 Lagrange-Gleichungen erster Art

Wir betrachten zunächst einen Massenpunkt mit der Zwangsbedingung  $g(\underline{r}, t) = 0$  und suchen nach einem plausiblen Ansatz für die Bestimmung der Zwangskraft. Dazu beobachten wir zunächst, dass die Zwangsbedingung eine (zeitabhängige) Fläche

$$\mathcal{F} = \{\underline{r} \in \mathbb{R}^3 | g(\underline{r}, t) = 0\} \quad (8.2.1)$$

definiert. Da die Zwangskraft die Bewegung innerhalb der Fläche nicht beeinflussen darf, muss

$$\underline{Z} \perp \mathcal{F} \quad (8.2.2)$$

sein, d.h. die Zwangskraft steht senkrecht auf  $\mathcal{F}$ . Für die Bewegung auf einer Tischplatte ist dies unmittelbar einsichtig. Wir machen daher den Ansatz

$$\underline{Z} = \lambda(t) \nabla g(\underline{r}, t), \quad (8.2.3)$$

mit dem schon einmal die Richtung der Zwangskraft korrekt beschrieben wird. Um zu sehen, dass dieser Ansatz tatsächlich das Gewünschte leistet, betrachten wir einen Punkt  $\underline{r} \in \mathcal{F}$  in der Fläche und eine kleine Verschiebung  $\underline{r} \rightarrow \underline{r}' = \underline{r} + \Delta \underline{r}$ . Wir fragen nun nach einer Bedingung, unter der der verschobene Punkt auch in  $\mathcal{F}$  liegt. Dazu betrachten wir die Zwangsbedingung genauer und entwickeln sie nach der Verschiebung  $\Delta \underline{r}$ :

$$g(\underline{r}', t) = g(\underline{r}, t) + \Delta \underline{r} \cdot \nabla g = \Delta \underline{r} \cdot \nabla g, \quad (8.2.4)$$

da  $g(\underline{r}, t) = 0$ , denn der Punkt  $\underline{r}$  liegt ja in  $\mathcal{F}$ . Somit können wir folgern: Der Punkt  $\underline{r}'$  liegt auch in  $\mathcal{F}$ , d.h.  $g(\underline{r}', t) = 0$ , genau dann wenn der Verschiebungsvektor  $\Delta \underline{r}$  senkrecht auf  $\nabla g$  steht. Anders formuliert: die Zwangskraft  $\underline{Z}$  besitzt keine Komponente parallel zu  $\mathcal{F}$ .

Somit können wir die Bewegungsgleichung explizit angeben:

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \lambda(t) \nabla g \quad (8.2.5)$$

bzw.

$$m \ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \lambda_1(t) \nabla g_1 + \lambda_2(t) \nabla g_2 + \dots \quad (8.2.6)$$

falls mehrere Zwangsbedingungen vorliegen.

Betrachten wir den allgemeinen Fall von  $N$  Massenpunkten mit den  $3N$  Ortskoordinaten

$$(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}), \quad (8.2.7)$$

wobei  $\underline{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\underline{r}_2 = (x_4, x_5, x_6), \dots$ , mit  $R$  holonomen Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_{3N}; t) = 0, \quad (8.2.8)$$

denen jeweils ein **Lagrange-Parameter**  $\lambda_\alpha(t)$  zugeordnet wird, so erhalten wir die **Lagrange-Gleichungen 1. Art**

$$\boxed{m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \quad (n = 1, 2, \dots, 3N),} \quad (8.2.9)$$

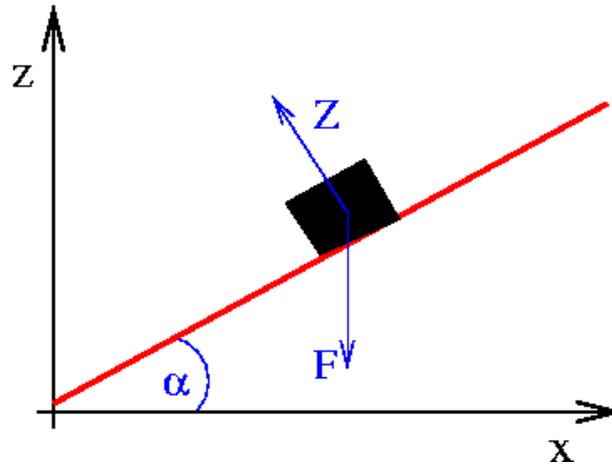


Abbildung 8.2.1: Bewegung eines Massenpunktes auf einer schiefen Ebene. Neben der äußeren Kraft  $\underline{F} = -mg\mathbf{e}_z$  wirkt die Zwangskraft  $\underline{Z}$  senkrecht zur Ebene.

wobei die Massen  $m_n$  nicht vollständig unabhängig sind, sondern wegen (8.2.7) die Bedingungen  $m_1 = m_2 = m_3$ ,  $m_4 = m_5 = m_6, \dots$  erfüllen müssen.

(8.2.8) und (8.2.9) sind zusammen  $3N + R$  Gleichungen für  $3N + R$  unbekannte Funktionen der Zeit, nämlich  $x_1, \dots, x_{3N}$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_R$ .

### 8.2.1 Beispiel: Schiefe Ebene

Zur Illustration der Lagrange-Gleichungen 1. Art betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes der Masse  $m$  auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel  $\alpha$  (siehe Abb. 8.2.1).

Die äußere Kraft ist die Schwerkraft  $\underline{F} = -mg\mathbf{e}_z$ . Die Zwangsbedingungen lauten

$$g_1(\underline{r}) = x \sin \alpha - z \cos \alpha = 0, \quad (8.2.10)$$

$$g_2(\underline{r}) = y = 0, \quad (8.2.11)$$

wie man sich aus geometrischen Überlegungen klar macht<sup>2</sup>. Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{\underline{r}} &= -mg\mathbf{e}_z + \lambda_1(t)\nabla g_1 + \lambda_2(t)\nabla g_2 + \dots \\ &= -mg\mathbf{e}_z + \lambda_1 \sin \alpha \mathbf{e}_x - \lambda_1 \cos \alpha \mathbf{e}_z + \lambda_2 \mathbf{e}_y, \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

oder in Komponenten

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \sin \alpha, \quad (8.2.13)$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2, \quad (8.2.14)$$

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 \cos \alpha. \quad (8.2.15)$$

<sup>2</sup>Denn  $\tan \alpha = \frac{z}{x}$ .

Wir bestimmen zunächst  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , indem wir die Zwangsbedingungen zweimal nach der Zeit ableiten und dann die Bewegungsgleichungen einsetzen:

$$0 = \ddot{g}_1 = \ddot{x} \sin \alpha - \ddot{z} \cos \alpha = \frac{\lambda_1}{m} \sin^2 \alpha + g \cos \alpha \frac{\lambda_1}{m} \cos^2 \alpha = \frac{\lambda_1}{m} + g \cos \alpha. \quad (8.2.16)$$

Hieraus folgt dann

$$\lambda_1 = -mg \cos \alpha. \quad (8.2.17)$$

Analog erhalten wir

$$0 = \ddot{g}_2 = \ddot{y} = \frac{\lambda_2}{m} \quad (8.2.18)$$

und daher

$$\lambda_2 = 0. \quad (8.2.19)$$

Dieses Ergebnis kann man auch so interpretieren, dass man bei geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen<sup>3</sup> keine Zwangskräfte benötigt, um die Bewegung in der  $(x, z)$ -Ebene zu halten.

Wir können nun auch die Zwangskraft explizit angeben:

$$\underline{Z} = \lambda_1 \nabla g_1 = -mg \cos \alpha (\sin \alpha \underline{e}_z - \cos \alpha \underline{e}_x). \quad (8.2.20)$$

Geometrisch lässt sich  $\sin \alpha \underline{e}_z - \cos \alpha \underline{e}_x$  als Einheitsvektor senkrecht zur Ebene interpretieren. In die Bewegungsgleichungen geht nur die Schwerkraftkomponente parallel zur Ebene ein:

$$m\ddot{x} = -mg \cos \alpha \sin \alpha, \quad (8.2.21)$$

$$m\ddot{z} = -mg \sin^2 \alpha. \quad (8.2.22)$$

Natürlich hätte man diese Bewegungsgleichung auch ohne Weg über die Lagrange-Gleichungen 1. Art hinschreiben können<sup>4</sup>, aber bei komplizierteren Zwangsbedingung ist dieser Weg in der Regel deutlich einfacher.

### 8.3 Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Falls man nicht an der expliziten Form der Zwangskräfte interessiert ist, sind die Lagrange-Gleichungen 1. Art unökonomisch: Für ein System mit  $f = 3N - R$  Freiheitsgraden berechnet man  $3N + R$  zeitabhängige Funktionen. Tatsächlich werden wir im Folgenden sehen, wie man durch Eliminierung der Zwangsbedingungen  $f$  Bewegungsgleichungen für die  $f$  Freiheitsgrade erhält.

<sup>3</sup>Die Anfangsgeschwindigkeit darf keine Komponente in  $y$ -Richtung haben!

<sup>4</sup>z.B. über eine explizite Zerlegung der Gravitationskraft in Komponenten parallel bzw. senkrecht zur Ebene

### 8.3.1 Herleitung

Die Grundidee ist, **verallgemeinerte Koordinaten**  $q_1, \dots, q_f$  so zu bestimmen, dass die Zwangsbedingungen *automatisch* erfüllt sind. Dazu müssen die ursprünglichen Koordinaten  $x_1, \dots, x_{3N}$  so als Funktionen

$$x_n = x_n(q_1, \dots, q_f) \quad (n = 1, \dots, 3N) \quad (8.3.1)$$

ausgedrückt werden, dass

$$g_\alpha(x_1(q_1, \dots, q_f), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_f)) = 0 \quad (8.3.2)$$

für alle  $q_1, \dots, q_f$  und alle  $\alpha = 1, \dots, R$ .

Zur Illustration betrachten wir das starre ebene Pendel. Hier ist die natürliche verallgemeinerte Koordinate der Auslenkungswinkel  $\varphi$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} x &= \ell \sin \varphi, \\ y &= 0, \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

$$z = z_0 - \ell \sin \varphi \quad (8.3.4)$$

und die Zwangsbedingungen (8.1.5) sind offensichtlich für alle  $\varphi$  automatisch erfüllt.

Wir wollen nun ganz allgemein die Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten herleiten. Dazu differenzieren wir zunächst die Zwangsbedingungen (8.3.2) nach den verallgemeinerten Koordinaten. Unter Beachtung der Kettenregel erhalten wir dann

$$\frac{dg_\alpha}{dq_k} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = 0. \quad (8.3.5)$$

Ziel ist die Umwandlung der  $3N$  Bewegungsgleichungen (8.2.9) für die  $x_n$  in  $f$  Bewegungsgleichungen für die  $q_k$ . Dazu multiplizieren wir zunächst (8.2.9) mit  $\frac{\partial x_n}{\partial q_k}$  und summieren dann über  $n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} &= \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_{n=1}^{3N} \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \\ &= \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}, \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

da die zweite Summe auf der rechten Seite nach Vertauschung der Summationsreihenfolge wegen (8.3.5) verschwindet. Nun haben wir die Zwangsbedingungen eliminiert, aber die Bewegungsgleichung enthält noch die Koordinatenfunktionen  $x_n(q_1, \dots, q_f)$ .

Wir nehmen nun an, dass die Kräfte  $F_n$  konservativ sind, d.h. es existiert ein Potential  $V(q_1, \dots, q_f) = V(x_1(q_1, \dots, q_f), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_f))$  mit

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial x_n}. \quad (8.3.7)$$

Leiten wir das Potential nach den verallgemeinerten Koordinaten ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = - \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial x_n}{\partial q_k}, \quad (8.3.8)$$

d.h. wir erhalten gerade die rechte Seite von (8.3.6). Die linke Seite von (8.3.6) kann durch die kinetische Energie ausgedrückt werden. Dazu schreiben wir

$$T = \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 \quad (8.3.9)$$

auf die neuen Koordinaten  $q_k$  und deren Ableitungen  $\dot{q}_k$  um:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= \frac{d}{dt} x_n(q_1, \dots, q_f) \\ &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial x_n}{\partial t} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8.3.10)$$

Da  $\frac{\partial x_n}{\partial q_k}$  nur von den  $q_1, \dots, q_f$  abhängt, aber nicht von  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ , ist die Abhängigkeit der  $\dot{x}_n$  von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_k$  linear, d.h. die Koeffizienten  $\frac{\partial x_n}{\partial q_k}$  hängen nicht von  $\dot{q}_k$  ab. Daher erhält man durch Ableitung von (8.3.10) nach  $\dot{q}_k$

$$\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}. \quad (8.3.11)$$

Somit können wir die kinetische Energie nach den verallgemeinerten Koordinaten ableiten:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \quad (8.3.12)$$

und ebenso nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}, \quad (8.3.13)$$

wobei wir im letzten Schritt (8.3.11) verwendet haben.

Um die Beschleunigungen  $\ddot{x}_n$  ins Spiel zu bringen, leiten wir nach der Zeit ab:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k}, \quad (8.3.14)$$

wobei die Vertauschbarkeit der totalen Ableitung von  $x_n$  nach  $t$  mit der partiellen Ableitung nach  $q_k$  ausgenutzt wurde.

Fassen wir die obigen Ergebnisse zusammen, so erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (8.3.15)$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial(T - V)}{\partial q_k}. \quad (8.3.16)$$

Dies legt die Definition der **Lagrange-Funktion**

$$L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) = T(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) - V(q_1, \dots, q_f) \quad (8.3.17)$$

nahe. Die Lagrange-Funktion  $L$  ist also die *Differenz* von kinetischer und potentieller Energie. Mit ihr können wir die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f) \quad (8.3.18)$$

schreiben. Dies sind die **Lagrange-Gleichungen 2. Art**.

### 8.3.2 Beispiele

Wir wollen nun die Lagrange-Gleichungen 2. Art an einigen Beispielen illustrieren.

- *N Massenpunkte ohne Zwangsbedingungen:*

In diesem Fall sollten sich die Lagrange-Gleichungen 2. Art auf die bekannten Newton'schen Bewegungsgleichungen reduzieren. Da keine Zwangsbedingungen vorliegen, sind die verallgemeinerten Koordinaten gleich den kartesischen Koordinaten,

$$q_k = x_k \quad (k = 1, \dots, 3N). \quad (8.3.19)$$

Da das Potential  $V$  nicht von den Geschwindigkeiten abhängt, gilt zunächst

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m_k \dot{q}_k = p_k, \quad (8.3.20)$$

wobei wir (8.3.9) benutzt haben.  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$  ist also gerade gleich der  $k$ -ten Impulskomponente. Da außerdem gilt

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} = F_k, \quad (8.3.21)$$

erhalten wir als Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\dot{p}_k = F_k. \quad (8.3.22)$$

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen sind also als Spezialfall in den Lagrange-Gleichungen 2. Art enthalten!

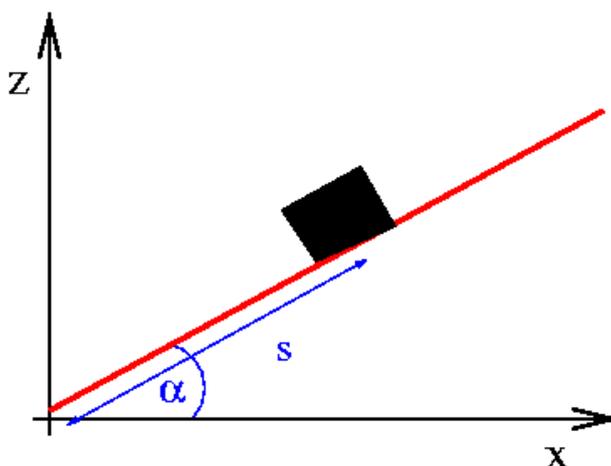


Abbildung 8.3.1: Definition der verallgemeinerten Koordinaten  $s$  für die Bewegung auf einer schiefen Ebene.

- *Schiefe Ebene:*

Die natürliche verallgemeinerte Koordinate ist hier die Wegstrecke  $s$  entlang der schiefen Ebene (Abb. 8.3.1). Kinetische Energie und Potential lassen sich leicht durch  $s$  ausdrücken:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2, \quad (8.3.23)$$

$$V = mgs \sin \alpha, \quad (8.3.24)$$

woraus wir für die Lagrange-Gleichung

$$m\ddot{s} = -mg \sin \alpha \quad (8.3.25)$$

erhalten. Zum Vergleich sei hier an die Lagrange-Gleichungen 1. Art (8.2.22) erinnert. Dies zeigt, dass in der Regel die Lagrange-Gleichungen 2. Art deutlich einfacher als die 1. Art sind.

- *Starres ebenes Pendel:*

Hier ist die verallgemeinerte Koordinate der Auslenkungswinkel  $\varphi$ . Da sich das Pendel auf einer Kreisbahn bewegt, ist der Betrag der Geschwindigkeit durch

$$v = |\underline{v}| = l\dot{\varphi} \quad (8.3.26)$$

gegeben und die kinetische Energie durch

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2. \quad (8.3.27)$$

Das Potential ist

$$V = mgz = mg(z_0 - \ell \cos \varphi). \quad (8.3.28)$$

Damit erhalten wir als Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -mg\ell \sin \varphi \quad (8.3.29)$$

bzw.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi. \quad (8.3.30)$$

Für kleine Auslenkungen können wir die Näherung  $\sin \varphi \approx \varphi$  benutzen und erhalten dann die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Frequenz  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ .

- *Das Kepler-Problem:*

In den bisherigen Beispielen gab es nur einen Freiheitsgrad und daher nur eine verallgemeinerte Koordinate. Da der Drehimpuls erhalten ist, reduziert sich das Keplerproblem auf die Bewegung in einer Ebene. Diese wollen wir durch Polarkoordinaten  $r(t)$  und  $\varphi(t)$  beschreiben. Mit<sup>5</sup>

$$T = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \quad (8.3.31)$$

$$V = -\frac{\alpha}{r} \quad (8.3.32)$$

erhält man die Lagrange-Funktion

$$L(r, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r}. \quad (8.3.33)$$

Die Lagrange-Gleichung für die Azimutalbewegung lautet daher

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\varphi}) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (8.3.34)$$

da die  $L$  nicht von der Koordinate  $\varphi$  abhängt. Somit folgt, dass

$$\mu r^2 \dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (8.3.35)$$

sein muss. Aus der Azimutalgleichung (7.1.18) kennen wir auch schon die physikalische Interpretation dieser Konstanten, denn  $\mu r^2 \dot{\varphi} = l$ .

Für die Radialbewegung gilt zunächst

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt} (\mu \dot{r}) = \mu \ddot{r}. \quad (8.3.36)$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\alpha}{r^2}. \quad (8.3.37)$$

Daher reduziert sich die Lagrange-Gleichung 2. Art auf eine Bewegungsgleichung in einem eindimensionalen Potential  $U(r)$ :

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{mit} \quad U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (8.3.38)$$

---

<sup>5</sup>Man beachte, dass hier die kinetische Energie nicht nur von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängt, sondern auch von den verallgemeinerten Koordinaten selbst!

### 8.3.3 Verallgemeinerte Impulse und Erhaltungsgrößen

Den einer verallgemeinerten Koordinaten  $q_n$  zugeordneten **verallgemeinerten Impuls**  $p_n$  definieren wir durch

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \quad (8.3.39)$$

Dies ist motiviert durch den Fall ohne Zwangsbedingungen, in dem der verallgemeinerte Impuls mit dem bekannten Impuls überbeinstimmt, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben.

Eine verallgemeinerte Koordinaten  $q_n$  heißt **zyklisch**, wenn die Lagrange-Funktion nicht von  $q_n$  abhängt<sup>6</sup>, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = 0. \quad (8.3.40)$$

Eine unmittelbare Folgerung hieraus ist, dass der einer zyklischen Variablen  $q_n$  zugeordnete verallgemeinerte Impuls  $p_n$  erhalten ist:

$$\frac{d}{dt} p_n = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0. \quad (8.3.41)$$

Wir betrachten wieder ein paar Beispiele:

- *Freies Teilchen:* Die Lagrange-Funktion ist dann

$$L = T = \frac{1}{2} m |\dot{\underline{r}}|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (8.3.42)$$

Daher sind alle drei Komponenten von  $\underline{r}$  zyklisch und die entsprechenden Impulskomponenten  $p_x, p_y, p_z$  sind erhalten.

- *Potential unabhängig von  $z$ :*  $V(\underline{r}) = V(x, y)$   
Die Lagrange-Funktion ist

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y) \quad (8.3.43)$$

und somit ist  $z$  eine zyklische Variable. Daher ist die  $z$ -Komponente  $p_z$  des Impulses erhalten.

- *Ebene Bewegung mit allgemeiner Zentralkraft:* Hier sind die verallgemeinerten Koordinaten  $r(t)$  und  $\varphi(t)$  und die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r). \quad (8.3.44)$$

Der Azimuthalwinkel  $\varphi$  ist zyklisch und somit ist

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad (8.3.45)$$

---

<sup>6</sup>In der Regel wird die Lagrange-Funktion aber noch von  $\dot{q}_n$  abhängen!

erhalten. Dies ist gerade die Drehimpulskomponente senkrecht zur Bahnebene. Durch Betrachtung der vollen dreidimensionalen Bewegung in Kugelkoordinaten kann man so auch die Erhaltung der anderen beiden Komponenten des Drehimpulses beweisen.

Die Beispiele legen einen Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Invarianz der Bewegungsgesetze unter bestimmten Transformationen nahe, den wir ja bereits in Kap. 5.4 in Form des Noether-Theorems kennengelernt haben.

Als Beispiel wollen uns nun ansehen, wie aus der Translationsinvarianz die Impulserhaltung folgt. Dazu betrachten wir ein System aus  $N$  Massenpunkten in kartesischen Koordinaten. Translationsinvarianz bedeutet dann:

$$L(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N; \dot{\underline{r}}_1, \dots, \dot{\underline{r}}_N) = L(\underline{r}_1 + \epsilon \underline{r}_0, \dots, \underline{r}_N + \epsilon \underline{r}_0; \dot{\underline{r}}_1, \dots, \dot{\underline{r}}_N), \quad (8.3.46)$$

d.h. die Lagrange-Funktion wird durch eine Verschiebung aller Massenpunkte um den gleichen Vektor  $\epsilon \underline{r}_0$  nicht verändert<sup>7</sup>. Gilt dies für alle  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , so muss die Ableitung der rechten Seite nach  $\epsilon$  verschwinden:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{d\epsilon} L(\underline{r}_1 + \epsilon \underline{r}_0, \dots, \underline{r}_N + \epsilon \underline{r}_0; \dot{\underline{r}}_1, \dots, \dot{\underline{r}}_N) \right|_{\epsilon=0} \\ &= \sum_{i=1}^N \underline{r}_0 \cdot \nabla_{\underline{r}_i} L = \sum_{i=1}^N \underline{r}_0 \cdot \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\underline{r}}_i} L \\ &= \frac{d}{dt} \left( \underline{r}_0 \cdot \sum_{i=1}^N \underline{p}_i \right) = \frac{d}{dt} (\underline{r}_0 \cdot \underline{P}), \end{aligned} \quad (8.3.47)$$

wobei wir in der zweiten Zeile zunächst die Kettenregel und dann die Lagrange-Gleichungen 2. Art benutzt haben. Wir sehen also, dass die Translationsinvarianz in Richtung von  $\underline{r}_0$  die Erhaltung des entsprechenden Impulses  $\underline{r}_0 \cdot \underline{P}$  impliziert. Ist z.B.  $\underline{r}_0 \parallel \underline{e}_x$ , so ist der Impuls in  $x$ -Richtung erhalten. Hat man Translationsinvarianz in alle Richtungen, so ist  $\underline{P}$  erhalten.

## 8.4 Variationsprinzipien

Variationsprinzipien spielen in vielen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle. Bevor wir ihre Bedeutung in der klassischen Mechanik diskutieren, wollen wir kurz eine allgemeine Einführung geben.

### 8.4.1 Variationsprobleme

Bevor wir uns dem eigentlichen Variationsproblemen widmen, sei an die Kurvendiskussion von Funktionen  $f(x)$  einer Variablen erinnert. Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums von  $f(x)$  an einem inneren Punkt  $x^*$  des Definitionsbereiches ist dann

$$\frac{df}{dx}(x^*) = f'(x^*) = 0. \quad (8.4.1)$$

<sup>7</sup>Die Geschwindigkeiten  $\dot{\underline{r}}_j$  werden nicht verändert, da  $\epsilon \underline{r}_0$  konstant ist.

Eine dazu äquivalente Aussage ist das Verschwinden der **Variation**

$$\delta f = f(x^* + \epsilon) - f(x^*) \quad (8.4.2)$$

von  $f$  um den Punkt  $x^*$  in führender (d.h. linearer) Ordnung in  $\epsilon$ :

$$\delta f(\epsilon) = f(x^* + \epsilon) - f(x^*) = \epsilon f'(x^*) + \frac{1}{2} \epsilon^2 f''(x^*) + \dots = \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (8.4.3)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  Terme die mindestens von der Größenordnung  $\epsilon^2$  sind, d.h. nur Terme  $\epsilon^\alpha$  enthalten mit  $\alpha \geq 2$ . Diese Aussage folgt, da

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta f(\epsilon)}{\epsilon} = f'(x^*) = 0 \quad (8.4.4)$$

ist, nach Definition der Ableitung.

Die **Variationsrechnung** beschäftigt sich mit den Extrema von **Funktionalen**

$$\mathcal{F} : f(x) \longrightarrow \mathcal{F}[f(\cdot)] \in \mathbb{R}, \quad (8.4.5)$$

also Abbildungen, die einer Funktion eine (reelle) Zahl zuordnen. Die Notation  $\mathcal{F}[f(\cdot)]$  soll dabei betonen, dass das Funktional  $\mathcal{F}$  vom *gesamten* Verlauf der Funktion  $f$  abhängt, nicht nur vom Funktionswert an einem bestimmten Punkt.

Bekannte Beispiele für Funktionale sind bestimmte Integrale, z.B.

$$\mathcal{F}_1[f(\cdot)] := \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (8.4.6)$$

oder

$$\mathcal{F}_2[f(\cdot)] := \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{df}{dx} \right)^2. \quad (8.4.7)$$

Funktionale können auch für mehrkomponentige Funktionen definiert werden, z.B. auf der Bahnkurve  $\underline{r}(t)$  eines Massenpunktes. Ein Beispiel hierfür ist die in Kap. 2.2 eingeführte Bogenlänge einer Bahnkurve

$$\mathcal{F}_S[\underline{r}(\cdot)] := \int_{t_1}^{t_2} dt \left| \frac{d\underline{r}}{dt} \right|. \quad (8.4.8)$$

Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass die Bewegung in der  $(x, y)$ -Ebene stattfindet, und dass entlang der Bahn stets  $\dot{x} > 0$  gilt. Dann gilt

$$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x} \sqrt{1 + (\dot{y}/\dot{x})^2} = \dot{x} \sqrt{1 + (dy/dx)^2}, \quad (8.4.9)$$

wobei wir im letzten Schritt die Kettenregel  $(dy/dt)/(dx/dt) = dy/dx$  benutzt haben. Wir können nun im Integral durch Substitution die Integration über  $t$  durch ein Integral über  $x$  ersetzen:

$$\mathcal{F}_S[\underline{r}(\cdot)] := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx \quad (8.4.10)$$

und erhalten so die Bogenlänge der durch die Funktion  $y(x)$  beschriebenen Kurve zwischen den Punkten  $x_1 = x(t_1)$  und  $x_2 = x(t_2)$ .

Wir suchen nun eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Funktion  $f(x)$  ein Extremum des Funktionals  $\mathcal{F}[f(\cdot)]$  ist. In Analogie zum eingangs beschriebenen Fall der Differentialrechnung fordern wir dazu das Verschwinden der Variation  $\delta\mathcal{F}$ . Dabei ist die Variation so definiert, dass die gesamte Funktion  $f(x)$  zu deformieren ist. Dies lässt sich durch hinzuaddieren einer beliebigen Funktion  $\epsilon\eta(x)$  zu  $f$  erreichen:

$$f(x) \longrightarrow f(x) + \epsilon\eta(x). \quad (8.4.11)$$

Die Variation von  $\mathcal{F}[f(\cdot)]$  ist dann definiert durch

$$\delta\mathcal{F}(\epsilon) = \mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] - \mathcal{F}[f(\cdot)] \quad (8.4.12)$$

und die notwendige Bedingung für ein Extremum lautet in Analogie zu (8.4.4)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] - \mathcal{F}[f(\cdot)]}{\epsilon} = 0, \quad (8.4.13)$$

Diese Bedingung muss für *jede* Funktion  $\eta(x)$  erfüllt sein!

Dieses Kriterium ist noch etwas unhandlich. Daher werden wir nun zeigen, dass es eine Differentialgleichung für  $f(x)$  umgewandelt werden kann.

### 8.4.2 Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir werden uns hier auf Funktionale der Form

$$\mathcal{F}[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \Phi(y, y', x) \quad (8.4.14)$$

beschränken, wobei  $y' = dy/dx$ . Der Integrand  $\Phi(x_1, x_2, x_3)$  soll eine differenzierbare, aber ansonsten beliebige Funktion von drei Variablen sein. Ein Standardbeispiel ist die Bogenlänge (8.4.10), für die  $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_2^2}$  ist. Die Variation von  $y(x)$  in (8.4.14) ist bei festen Randwerten  $y(x_1) = y_1$  und  $y(x_2) = y_2$  durchzuführen. Deshalb muss die Funktion  $\eta(x)$  die Randbedingungen

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (8.4.15)$$

erfüllen..

Wir betrachten die Variation (8.4.12) zunächst für eine fest gewählte Funktion  $\eta(x)$ . Dann ist das Funktional eine Funktion von  $\epsilon$  und (8.4.14) ist äquivalent zu

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] - \mathcal{F}[f(\cdot)]}{\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} \delta\mathcal{F} \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)]_{\epsilon=0}. \quad (8.4.16)$$

Im vorliegenden Fall ist

$$\mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \Phi(y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', x). \quad (8.4.17)$$

Wir leiten nach  $\epsilon$  ab und erhalten

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{d\epsilon} \Phi(y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', x) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \eta(x) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \eta'(x) \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right]. \quad (8.4.18)$$

Der zweite Term kann durch partielle Integration umgeschrieben werden:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d\eta}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \left[ \eta(x) \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'}, \quad (8.4.19)$$

da der Randterm wegen (8.4.15) verschwindet. Somit erhalten wir

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right]. \quad (8.4.20)$$

Dieser Ausdruck verschwindet nur dann für alle  $\eta(x)$ , wenn der Term in eckigen Klammern verschwindet. Dies liefert die **Euler-Lagrange-Gleichung**

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}}, \quad (8.4.21)$$

die als Differentialgleichung für  $y(x)$  zu interpretieren ist. Die Lösungen dieser DGL sind das Lösungen des Variationsproblems (8.4.14).

Zur Illustration betrachten wir einige Beispiele. Zunächst suchen wir die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Die Euler-Lagrange-Gleichung für das Funktional (8.4.10) lautet

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0, \quad (8.4.22)$$

da (8.4.10) nicht von  $y$  abhängt. Somit ist also  $\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$  konstant, und damit auch  $y'$  selbst. Die gesuchte Verbindung ist also eine Kurve mit konstanter Steigung, also eine Gerade. Der Wert der Steigung wird dann durch die Randwerte festgelegt.

Eine etwas anspruchsvolle Anwendung ist das **Brachistochronenproblem**, das von Jakob Bernoulli 1696 formuliert wurde. Tatsächlich gab es dann den Anstoss zur Entwicklung der Variationsrechnung. In dem Problem geht es um die Frage, auf welcher Kurve ein Massenpunkt unter Einfluss der Schwerkraft in der kürzesten Zeit zwischen zwei vorgegebenen Punkten gleitet. Anders formuliert soll eine Rutsche zwischen vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten gebaut werden, auf der man schnellstmöglich den Endpunkt erreicht (Abb. 8.4.1).

Wir nehmen an, dass die Punkte nicht auf gleicher Höhe oder übereinander liegen. Die Anfangsgeschwindigkeit soll verschwinden. Haben die Punkte eine Höhendifferenz  $h$  und einen horizontalen Abstand  $d$ , so hat das zu variierende Funktional die Form

$$\mathcal{F}[y(\cdot)] = \int_0^d dx \sqrt{\frac{1+(y')^2}{h-y(x)}} \quad (8.4.23)$$

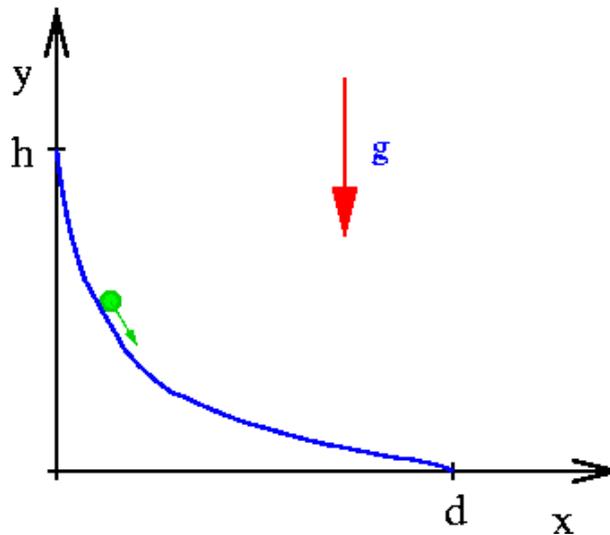


Abbildung 8.4.1: Das Brachistochronenproblem: Auf welcher Bahnkurve  $y(x)$  bewegt sich der Massenpunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft in minimaler Zeit von  $(0, h)$  nach  $(d, 0)$  ?.

mit den Randbedingungen  $y(0) = h$  und  $y(d) = 0$ . Dies kann man sich wie folgt klarmachen: Bezeichnen wir die Bogenlänge mit  $s(y)$ , so lautet der Energieerhaltungssatz wenn das Teilchen die Höhe  $y$  erreicht hat

$$mgh = mgy + \frac{1}{2}m\dot{s}^2. \quad (8.4.24)$$

Somit ist

$$\dot{s} = \sqrt{2g(h-y)}. \quad (8.4.25)$$

Hieraus erhalten wir schließlich

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}}. \quad (8.4.26)$$

Die benötigte Zeit ist dann

$$\tau = \int dt = \int \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \sqrt{\frac{1+(y')^2}{h-y}}, \quad (8.4.27)$$

wobei wir benutzt haben, dass wegen  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$  gilt  $ds = \sqrt{1+(y')^2}dx$ .

Wir wollen hier die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht explizit untersuchen. Deren Lösung ist eine **Zykloide**, also jene Kurve, die ein Punkt auf dem Umfang eines rollenden Rades beschreibt<sup>8</sup>.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich auf Variationsprobleme erweitern, bei denen das Funktional von  $K$  Funktionen  $y_1(x), \dots, y_K(x)$  abhängt:

$$\mathcal{F}[y_1(\cdot), \dots, y_K(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \Phi(y_1, \dots, y_K; y'_1, \dots, y'_K; x). \quad (8.4.28)$$

<sup>8</sup>Dieses Problem haben wir schon in den Übungen betrachtet!

Man erhält dann  $K$  Gleichungen der Form (8.4.21),

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} \quad (n = 1, \dots, K).} \quad (8.4.29)$$

### 8.4.3 Das Hamilton'sche Prinzip

Wenn wir in den Euler-Lagrange-Gleichungen (8.4.29) die Ersetzungen  $x \rightarrow t$ ,  $y_n \rightarrow q_n$  und  $\Phi \rightarrow L$  vornehmen, nehmen sie genau die bekannte Form (8.3.18) der Lagrange-Gleichungen 2. Art an. Hieraus kann man nun folgern:

**Hamilton'sches Prinzip der kleinsten Wirkung:** Die Bewegungen eines mechanischen Systems laufen so ab, dass die Wirkung

$$S[q_1(\cdot), \dots, q_f(\cdot)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad (8.4.30)$$

extremal ist. Dabei ist die Variation von  $S$  bei festen Endpunkten  $q_n(t_1)$ ,  $q_n(t_2)$  ( $n = 1, \dots, f$ ) durchzuführen.

Das Prinzip hat große konzeptionelle Bedeutung, aber auch praktischen Nutzen. Die in Kap. 7.3 erwähnten choreographischen Bahnen des  $N$ -Körperproblems wurden durch Minimierung der Wirkung gefunden.

Die Wirkung hat die Dimension<sup>9</sup> Energie  $\times$  Zeit. In der Quantenmechanik spielt das **Planck'sche Wirkungsquantum**

$$h \approx 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (8.4.31)$$

eine wichtige Rolle. Darauf werden wir im zweiten Teil der Vorlesung zurückkommen.

## 8.5 Hamilton'sche Mechanik

Die Lagrange-Gleichungen 2. Art (8.3.18) bestehen aus  $f$  Differentialgleichungen 2. Ordnung für die verallgemeinerten Koordinaten  $q_n(t)$ . Im Hamilton-Formalismus werden diese durch  $2f$  DGL 1. Ordnung für die Koordinaten  $q_n(t)$  und die zugehörigen verallgemeinerten Impulse  $p_n(t)$  ersetzt, wie wir im Folgenden sehen werden. Diese Formulierung ist besonders elegant und übersichtlich und erlaubt später auch die Verallgemeinerung auf den quantenmechanischen Fall.

### 8.5.1 Die Hamilton'schen Gleichungen

Zunächst wollen wir uns klar machen, dass man jede DGL 2. Ordnung auf ein System aus zwei DGL 1. Ordnung umschreiben kann. Dazu betrachten wir die allgemeine DGL 2. Ordnung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F(y, y', x). \quad (8.5.1)$$

<sup>9</sup>Da die Lagrange-Funktion die Dimension einer Energie hat.

Wir definieren nun zwei Funktionen

$$y_1(x) := y(x) \quad \text{und} \quad y_2(x) := y'(x) = \frac{dy}{dx}. \quad (8.5.2)$$

Dann ist die DGL 2. Ordnung (8.5.1) äquivalent zu dem System

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad (8.5.3)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = F(y_1, y_2, x), \quad (8.5.4)$$

aus zwei DGL 1. Ordnung.

Wir wollen diese Erkenntnis nun auf die Mechanik anwenden. Dazu nehmen wir an, dass sich die Beziehung (8.3.39), durch die die verallgemeinerten Impulse definiert sind, umkehrbar ist und man deshalb die verallgemeinerten Geschwindigkeiten durch die Koordinaten und Impulse ausdrücken kann:

$$\dot{q}_n = \dot{q}_n(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f) =: \dot{q}_n(q, p), \quad (8.5.5)$$

wobei wir die Abkürzungen  $q = (q_1, \dots, q_f)$  und  $p = (p_1, \dots, p_f)$  eingeführt haben.

Die **Hamilton-Funktion**  $H$  ist als Funktion der Koordinaten und Impulse durch

$$H(q, p) := \sum_{k=1}^f \dot{q}_k(q, p) p_k - L(q, \dot{q}(q, p)) \quad (8.5.6)$$

definiert. Mathematisch ist  $H$  die **Legendre-Transformierte**<sup>10</sup> der Lagrange-Funktion  $L$ . Die Legendre-Transformation ersetzt ganz allgemein eine unabhängige Variable einer Funktion durch die Ableitung der Funktion nach dieser Variablen und zwar so, dass keine Information verloren geht. Im vorliegenden Fall wird  $\dot{q}$  durch  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$  ersetzt.

Um zu den Bewegungsgleichungen zu gelangen, bilden wir zunächst die partiellen Ableitungen der Hamilton-Funktion nach  $q_n$  bzw.  $p_n$ . Die Ableitung nach den Koordinaten liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_n} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_n} p_k - \frac{\partial L}{\partial q_n} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_n} \\ &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_n} p_k - \frac{\partial L}{\partial q_n} - \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_n} = - \frac{\partial L}{\partial q_n} \\ &= - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = -\dot{p}_n, \end{aligned} \quad (8.5.7)$$

wobei der letzte Term in der ersten Zeile durch die Kettenregel zustande kommt und die  $q$ -Abhängigkeit der verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_n(q, p)$  berücksichtigt. In der zweiten

<sup>10</sup>Legendre-Transformationen werden in Teil II der Vorlesung im Rahmen der Thermodynamik eine wichtige Rolle spielen.

und dritten Zeile haben wir dann die Lagrange-Gleichungen 2. Art verwendet und schließlich die Definition (8.3.39) des verallgemeinerten Impulses.

Analog können wir die Ableitungen von  $H$  nach den verallgemeinerten Impulsen bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_n} &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_n} p_k + \dot{q}_n - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_n} \\ &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_n} p_k + \dot{q}_n - \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_n} \\ &= \dot{q}_n.\end{aligned}\tag{8.5.8}$$

Somit erhalten wir die **Hamilton'schen Gleichungen**

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \tag{8.5.9}$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}. \tag{8.5.10}$$

Wir wollen uns noch die physikalische Bedeutung der Hamilton-Funktion  $H$  klarmachen. Dazu betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes im Potential  $V(\underline{r})$ . Die Hamilton-Funktion ist dann

$$H(\underline{r}, \underline{p}) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L = 2T - (T - V) = T + V, \tag{8.5.11}$$

da  $p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 = 2T$  und  $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$ . Die Hamilton-Funktion ist also gerade die Gesamtenergie des Systems, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Koordinaten und Impulse.

Tatsächlich spiegelt die Struktur der Hamilton'schen Gleichungen den Energiesatz wider:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(q(t), p(t)) &= \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0,\end{aligned}\tag{8.5.12}$$

wobei wir zunächst die Kettenregel und dann die Hamilton-Gleichungen benutzt haben.

Diese Herleitung hat angenommen, dass  $H$  bzw.  $L$  nicht explizit von der Zeit abhängen, was z.B. für ein zeitunabhängiges Potential  $V(\underline{r})$  erfüllt ist. Im allgemeinen Fall gilt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.\tag{8.5.13}$$

## 8.5.2 Der Phasenraum

Als **Phasenraum** bezeichnet man den von den verallgemeinerten Koordinaten und verallgemeinerten Impulsen aufgespannten  $2f$ -dimensionalen Raum. Die Bewegung eines Systems im Phasenraum wird durch die Hamilton'schen Gleichungen bestimmt. Da diese DGL 1. Ordnung in

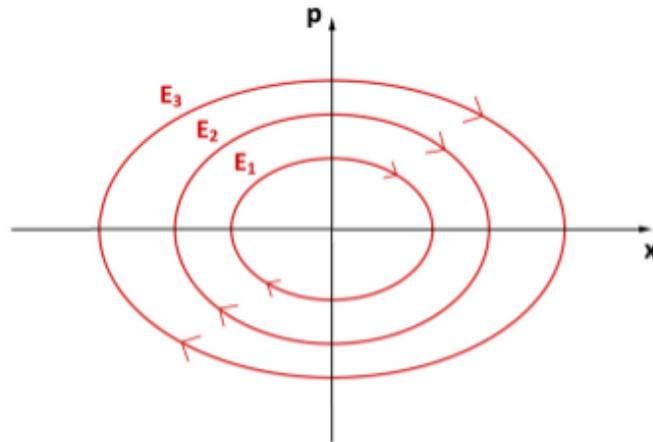


Abbildung 8.5.1: Phasenraumportrait des eindimensionalen harmonischen Oszillators [5].

der Zeit sind, ist die Bewegung bei Kenntnis der Anfangsbedingungen  $q(0)$  und  $p(0)$  für alle Zeiten festgelegt. Deshalb gilt:

Durch jeden Punkt des Phasenraumes verläuft (höchstens) eine mögliche Bahn. Phasenraumbahnen können sich nicht kreuzen.

Die Gesamtheit aller möglichen Phasenraumbahnen bezeichnet man als **Phasenraumportrait** des Systems.

Zur Veranschaulichung betrachten wir zwei Beispiele mit  $f = 1$ . In diesem Fall wird aus dem Phasenraum eine zweidimensionale Phaseebene.

- *Eindimensionaler harmonischer Oszillator:*

Die Lagrange-Funktion ist

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x^2, \quad (8.5.14)$$

woraus wir für den verallgemeinerten Impuls  $p = m\dot{x}$  erhalten. Die Hamilton-Funktion ist daher

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2. \quad (8.5.15)$$

Da die Bewegung bei konstanter Energie  $E$  verläuft, sind die Phasenraumbahnen Lösungen der Gleichung

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 = E, \quad (8.5.16)$$

d.h. Höhenlinien der Funktion  $H$ . Diese Gleichung hat zwei verschiedene Typen von Lösungen.

Für  $E = 0$  ist auch  $x = 0$  und  $p = 0$ . Dies entspricht der Ruhelage des Oszillators.

Für  $E > 0$  beschreibt (8.5.16) eine Ellipse im Phasenraum. In der oberen Halbebene, d.h. für  $p > 0$ , ist  $\dot{x} = p/m > 0$ . In der unteren Halbebene ( $p < 0$ ) ist dagegen  $\dot{x} < 0$ . Die

Ellipsen werden daher im Uhrzeigersinn durchlaufen (Abb. 8.5.1). Die Halbachsen der Ellipse<sup>11</sup> erhält man, wenn man (8.5.16) in die Form  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$  bringt:

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}, \quad b = \sqrt{2mE}. \quad (8.5.17)$$

Die von der Ellipse eingeschlossenen Fläche

$$A(E) = \pi ab = \frac{2\pi E}{\omega} \quad (8.5.18)$$

hat die Dimension einer Wirkung. Nach der **Quantenbedingung** von Nils Bohr sind quantenmechanisch nur solche Bahnen erlaubt, bei denen die eingeschlossene Phasenraumfläche ein ganzzahliges Vielfaches des Planck'schen Wirkungsquantums  $h$  ist<sup>12</sup>. Somit erhält man für den quantenmechanischen harmonischen Oszillator die Bedingung

$$E = E_n = n \frac{h\omega}{2\pi} = n\hbar\omega \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (8.5.19)$$

mit  $\hbar = h/2\pi$ . Dies stimmt fast mit dem exakten quantenmechanischen Ergebnis

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (8.5.20)$$

überein, das wir im zweiten Teil der Vorlesung herleiten werden.

- *Starres ebenes Pendel:*

Die verallgemeinerte Koordinate ist der Auslenkungswinkel  $\varphi$  und nach Kap. 8.3.2 ist die Lagrange-Funktion durch

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 - mg(z_0 - \ell \cos \varphi) \quad (8.5.21)$$

gegeben. Der verallgemeinerte Impuls ist daher

$$p = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi}. \quad (8.5.22)$$

Somit erhalten wir die Hamilton-Funktion

$$H(\varphi, p) = \frac{p^2}{2m\ell^2} + mg(z_0 - \ell \cos \varphi), \quad (8.5.23)$$

die wir durch die Wahl  $z_0 = -\ell$  vereinfachen können. In diesem Fall ist das Potential

$$V(\varphi) = -mg\ell(1 + \cos \varphi) \leq 0. \quad (8.5.24)$$

<sup>11</sup>Da  $x$  und  $p$  unterschiedliche Dimensionen haben, gilt dies auch für  $a$  und  $b$ . Daher ist es nicht sinnvoll, von der Exzentrizität dieser Ellipsen zu sprechen.

<sup>12</sup>In den Bohr'schen Postulaten wird der Drehimpuls quantisiert. Dieser hat aber auch die Dimension einer Wirkung!

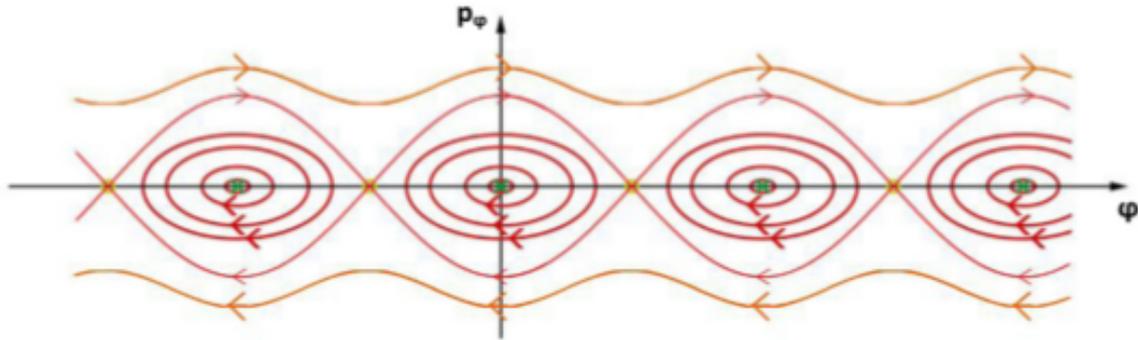


Abbildung 8.5.2: Phasenraumportrait des ebenen starren Pendels [5]. Die Bereiche mit Rotation bzw. Oszillation sind durch die Separatrix voneinander getrennt.

Die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi \quad (8.5.25)$$

hat zwei qualitativ unterschiedliche Lösungstypen.

- Für  $E < 0$  oszilliert das Pendel um die Ruhelage  $\varphi = 0$ . An den Umkehrpunkten ist  $E_{\text{kin}} = 0$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  ändert ihr Vorzeichen.
- Für  $E > 0$  rotiert das Pendel mit festem Umlaufsinn, d.h.  $\dot{\varphi} > 0$  oder  $\dot{\varphi} < 0$ . Die kinetische Energie ist stets von Null verschieden.

Im Phasenraumportrait (siehe Abb. 8.5.2) erkennt man diese beiden Bewegungstypen. Für die Darstellung wurde die Winkelvariable  $\varphi$  auf die ganze reelle Achse periodisch fortgesetzt. Die oszillierenden Lösungen mit  $E < 0$  bilden (für kleine Auslenkungen) Ellipsen um die stabilen Ruhelagen  $\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ . Sie sind gerade die Minima des Potentials (8.5.24) mit  $V''(\varphi) > 0$ .

Die Bereiche der oszillatorischen Lösungen werden von den Rotationen ( $E > 0$ ) durch die eine spezielle Bahnkurve, die **Separatrix**, getrennt. Diese verläuft durch die instabilen Ruhelagen  $\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ , den Maxima von  $V(\varphi)$ . Die Separatrix wird durchlaufen, wenn man das Pendel auf den Kopf stellt und mit infinitesimaler Geschwindigkeit anstößt.

Die Separatrix ist die Höhenlinie von  $H$  zur Energie  $E = 0$  und es gilt

$$p^2 = 2m^2\ell^3g(1 + \cos \varphi). \quad (8.5.26)$$

Mit Hilfe einer bekannten trigonometrischen Identität folgt hieraus

$$p = \pm 2m\sqrt{\ell^3g} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (8.5.27)$$

### 8.5.3 Hamilton'sches Chaos

In der Nähe der Separatrix hängt die Bewegung sehr empfindlich von den Anfangsbedingungen ab. Kleine Abweichungen von der instabilen Ruhelage können entweder zu oszillatorischer Bewegung oder einer Rotationen mit festem Umlaufsinn führen. Was passiert nun, wenn wir die Position des Aufhängepunktes zeitlich verändern? Wir betrachten dazu den Fall

$$z_0(t) = -\ell + a(t). \quad (8.5.28)$$

Wir leiten nun die Bewegungsgleichung aus dem Lagrange-Formalismus ab. Zunächst ist

$$\begin{aligned} x(t) &= \ell \sin \varphi(t), \\ z(t) &= z_0(t) - \ell \cos \varphi(t), \end{aligned} \quad (8.5.29)$$

woraus wir für die kinetische und potentielle Energie erhalten:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{a}^2 + m\dot{a}\dot{\varphi}\ell \sin \varphi \quad (8.5.30)$$

$$V = mgz = mg(z_0(t) - \ell \cos \varphi(t)). \quad (8.5.31)$$

Mit  $L = T - V$  ergibt sich dann

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m\ell^2\dot{\varphi} + m\dot{a}\ell \sin \varphi, \quad (8.5.32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -mgl \sin \varphi + m\dot{a}\dot{\varphi}\ell \cos \varphi \quad (8.5.33)$$

und somit aus den Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + m\dot{a}\ell \sin \varphi + m\dot{a}\dot{\varphi}\ell \cos \varphi = -mgl \sin \varphi + m\dot{a}\dot{\varphi}\ell \cos \varphi. \quad (8.5.34)$$

Dies führt auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{\ell}(g + \ddot{a}) \sin \varphi, \quad (8.5.35)$$

die sich für  $a = 0$  auf die bekannte Bewegungsgleichung des starren Pendels reduziert.

Wir betrachten nun speziell periodische Oszillationen mit Frequenz  $\tilde{\omega}$ :

$$a(t) = a_0 \cos(\tilde{\omega}t) \quad (8.5.36)$$

Zur Vereinfachung führen wir dimensionslose Variablen ein:

$$\tau := \omega t, \quad \alpha := \frac{a_0}{\ell}, \quad \Omega := \frac{\tilde{\omega}}{\omega} \quad (8.5.37)$$

mit  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ , der Eigenfrequenz des Pendels mit festem Aufhängepunkt. Mit den dimensionslosen Größen nimmt die Bewegungsgleichung die Form

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -[1 - \alpha\Omega^2 \cos(\Omega\tau)] \sin \varphi \quad (8.5.38)$$

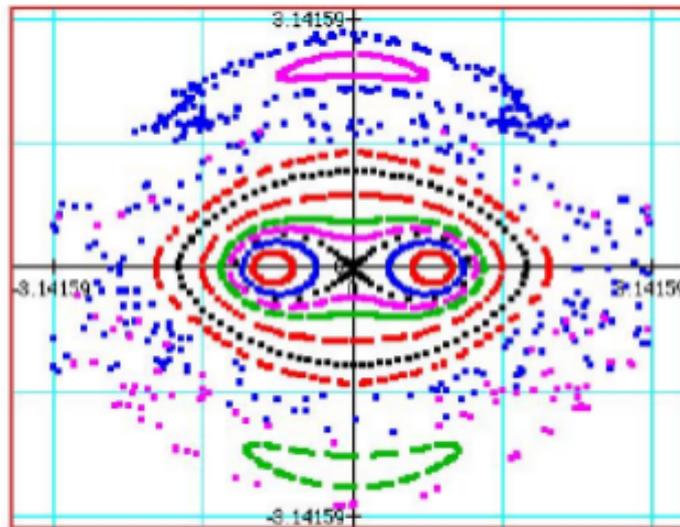


Abbildung 8.5.3: Phasenraumportrait des getriebenen ebenen Pendels [5].

an, die sich z.B. gut numerisch untersuchen lässt. Es zeigt sich, dass schon bei kleinen Störungsamplitude ( $\alpha \approx 0.01$ , d.h. 1% der Pendellänge) die Bewegung in einem flächenhaften Gebiet nahe der Separatrix irregulär wird (Abb. 8.5.3). Dies ist ein Beispiel für deterministisches Chaos in einem dynamischen System.

Allgemein definiert man: Ein dynamisches zeigt **deterministisches Chaos**, wenn kleine Abweichungen von den Anfangsbedingungen *exponentiell* mit der Zeit anwachsen. Solche Systeme sind im praktischen Sinne unverhersagbar, obwohl das Verhalten im Prinzip vollständig durch die Anfangsbedingungen und Bewegungsgleichungen bestimmt ist. Betrachtet man aber zwei Phasenraumbahnen  $(\varphi(t), p(t))$  und  $(\tilde{\varphi}(t), \tilde{p}(t))$  mit Anfangsbedingungen, die dicht beieinander liegen, d.h.

$$\begin{aligned}\delta\varphi(0) &= |\varphi(0) - \tilde{\varphi}(0)| \ll 1, \\ \delta p(0) &= |p(0) - \tilde{p}(0)| \ll 1,\end{aligned}\tag{8.5.39}$$

so gilt bei chaotischen Bahnen

$$\begin{aligned}\delta\varphi(t) &\approx \delta\varphi(0)e^{\lambda t}, \\ \delta p(t) &\approx \delta p(0)e^{\lambda t}\end{aligned}\tag{8.5.40}$$

mit dem **Lyapunov-Exponenten**  $\lambda > 0$  (siehe Abb. 8.5.3).

Dieses Verhalten hat praktische Konsequenzen: eine lineare Verlängerung der Vorhersagezeit erfordert eine exponentielle Zunahme der Rechengenauigkeit. Dies ist ein Grund, warum der Zeithorizont für eine zuverlässige Wettervorhersage trotz einer Leistungssteigerung der Computer um viele Größenordnungen nur wenig zugenommen hat.

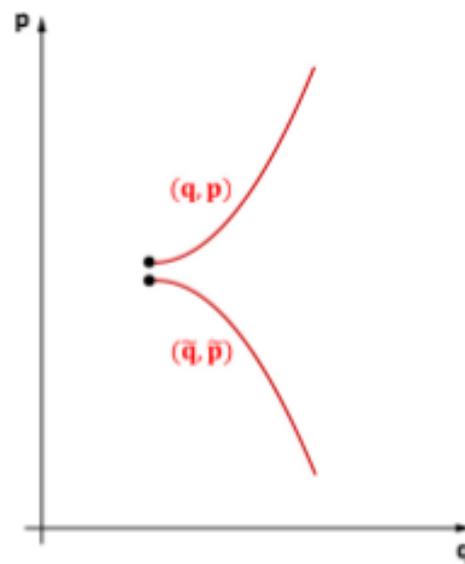


Abbildung 8.5.4: In Systemen, die deterministisches Chaos zeigen, laufen die Phasenraumtrajektorien zu benachbarten Anfangsbedingungen exponentiell schnell auseinander (aus [5]).

# **Teil II**

## **Spezielle Relativitätstheorie**



# Kapitel 9

## Historischer Hintergrund und Grundlagen

Die spezielle Relativitätstheorie (SRT) wird oft mit der Modifikation der Newton'schen Mechanik in Verbindung gebracht, wo sie die spektakulärsten Auswirkungen hat. Der Titel von Einstein's berühmter Arbeit aus dem Jahre 1905 lautet aber *Von der Elektrodynamik bewegter Körper*<sup>1</sup>. Hier deutet sich schon an, dass die Untersuchung elektrodynamischer Phänomene ein wesentlicher Aspekt der SRT ist.

Bis Anfang des 20. Jahrhunderts glaubte man, dass Licht zur Ausbreitung ein Medium benötigt, den **Äther**. Newton definierte den **absoluten Raum** als das Inertialsystem, in dem der Äther ruht. Allerdings scheiterten alle experimentellen Versuche, den Äther nachzuweisen. Der bekannteste Versuch ist dabei sicher das **Michelson-Morley-Experiment** (1881-1887). Es beruht auf der Vorstellung, dass Licht eine Welle ist, die sich im Äther in alle Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit  $c \approx 300.000 \text{ km/s}$  ausbreitet. Wenn sich die Erde mit einer Geschwindigkeit  $v$  durch den Äther bewegt (eine vernünftige Annahme), dann impiziert dies eine Richtungsabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit auf der Erde (Abb. 9.0.1). Parallel zur Erdbewegung würde man eine Lichtgeschwindigkeit  $c - v$  und antiparallel dazu die Geschwindigkeit  $c + v$  messen. Senkrecht zur Richtung der Erdbewegung erwartet man dagegen eine Geschwindigkeit  $c_{\perp} = \sqrt{c^2 - v^2}$ . Dies ist vollkommen analog zu einem Boot in einem Fluss, das mit, gegen oder quer zur Strömungsrichtung fährt (Abb. 9.0.2).

### 9.1 Das Michelson-Morley-Experiment

Das Michelson-Interferometer wurde von Albert A. Michelson (1852-1931, Nobelpreis 1907) entwickelt. Es basiert auf der Zweistrahlinterferenz. Nach dem Strahlteiler, einem halbdurchlässigen Spiegel, durchlaufen die beiden Strahlen jeweils einen Arm der Länge  $a$  bzw.  $b$  und werden dann an Spiegeln reflektiert (Abb. 9.1.1). Über den halbdurchlässigen Spiegel wird dann ein Teil in einen Detektor gelenkt, wo das Interferenzmuster der Strahlen analysiert wird. Beim Drehen sollte sich daher das Interferenzmuster deutlich ändern. Beim originalen **Michelson-Morley-Experiment** betrug die Armlänge  $l = 11 \text{ m}$ . Mit späteren Experimenten hätte man eine Erdbeschwindigkeit von  $v = 3 \text{ cm/s}$  relativ zum Äther nachweisen zu können, aber es wurde

---

<sup>1</sup>Annalen der Physik 17, 891-921 (1905).

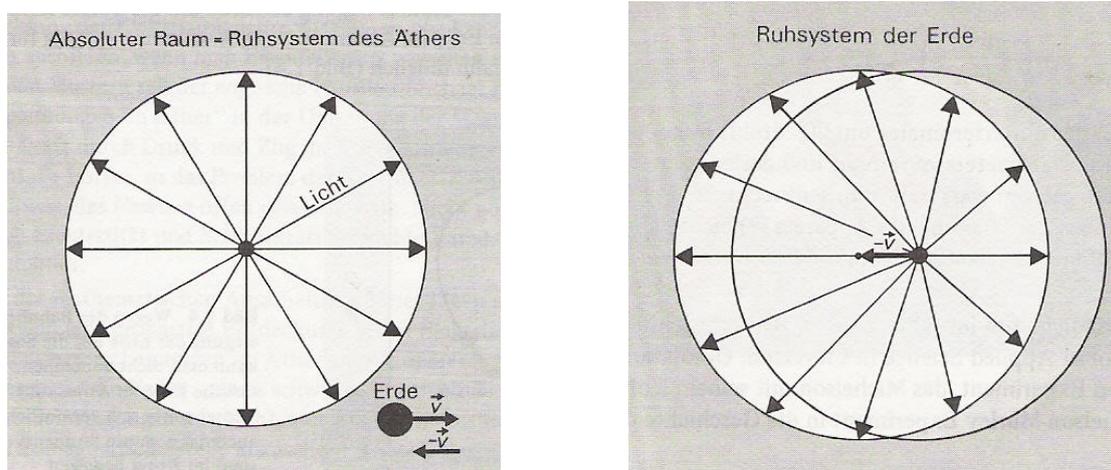


Abbildung 9.0.1: Im Äther breitet sich Licht in alle Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit  $c$  aus (links). Wenn sich die Erde mit der Geschwindigkeit  $v$  durch den Äther bewegt, müssen wir beim Übergang zum Ruhesystem der Erde  $-v$  zu allen Geschwindigkeit hinzu addieren. Dadurch hängt die Lichtgeschwindigkeit auf der Erde von der Richtung ab. Diesen Effekt versuchte das Michelson-Morley-Experiment nachzuweisen. (aus [8])

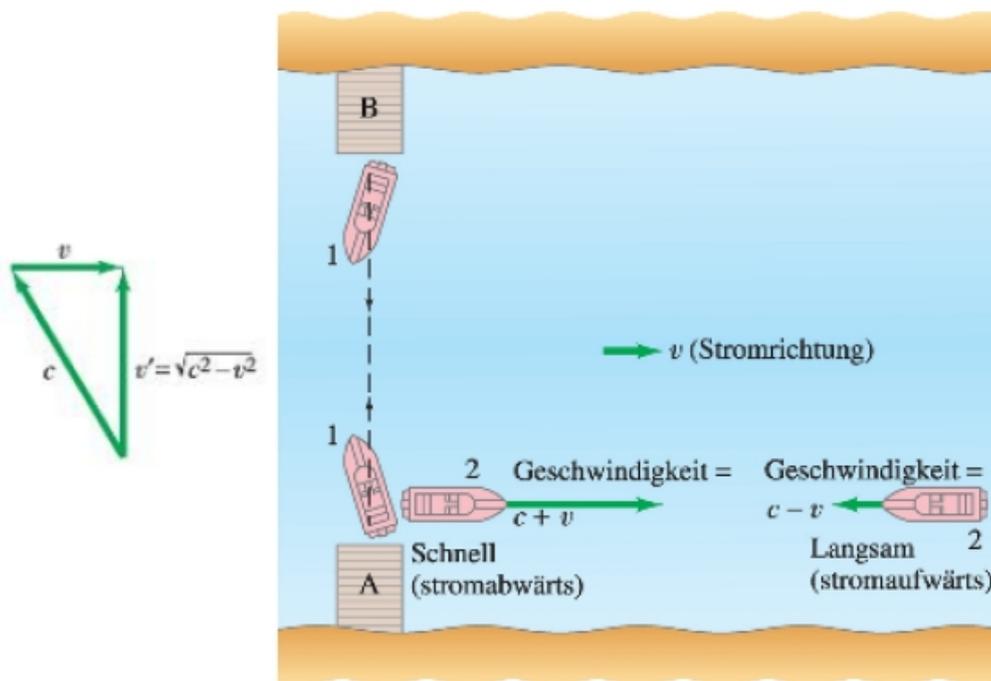


Abbildung 9.0.2: Die Situation beim Michelson-Morley-Experiment ist analog zu einem Boot, das sich auf einem Fluss mit, gegen oder quer zur Strömungsrichtung fährt (aus [3]).

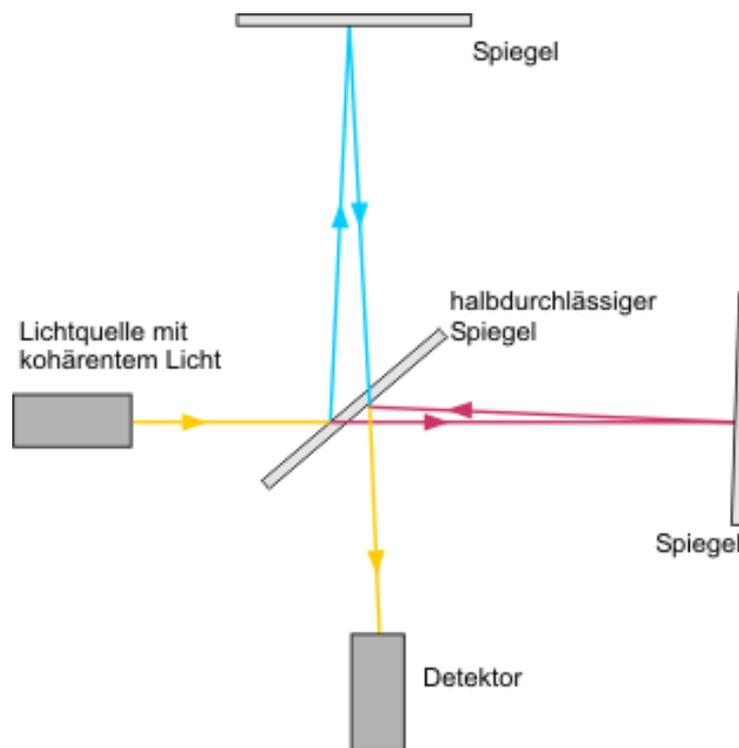


Abbildung 9.1.1: Strahlengang im Michelson-Interferometer.

kein Effekt gefunden. Eine schöne interaktive Animation des Michelson-Morley-Versuchs findet man z.B. bei<sup>2</sup>

[http://galileoandstein.physics.virginia.edu/more\\_stuff/flashlets/mmexpt6.htm](http://galileoandstein.physics.virginia.edu/more_stuff/flashlets/mmexpt6.htm).

Für das Scheitern des Michelson-Morley-Experimentes wurden verschiedene Erklärungen angeführt, z.B.

- eine Abhängigkeit der Lichtausbreitung von der Bewegung der Quelle. Dies ist aber mittlerweile durch Wiederholung des Versuches mit Sternenlicht widerlegt.
- die Mitführungshypothese. Sie nimmt an, dass der Äther von der Erde gewissermaßen "mitgerissen" wird und man daher im Labor keine Relativbewegung Labor - Äther sieht. Auch dies ist experimentell widerlegt, z.B. durch Versuche von Fizeau zur Lichtgeschwindigkeit in strömenden Medien.
- Ätherwirbel. Ähnlich wie im Weltbild von Descartes befindet die Erde hierbei im Mittelpunkt eines Ätherwirbels. Auch hier zeigten sich schnell Widersprüche zu den bekannten Gesetzen der Lichtausbreitung.

<sup>2</sup>Der Link befindet sich auch im Wikipedia-Beitrag zum Michelson-Morley-Experiment.

- die Längenkontraktion. Lorentz und Fitzgerald vermuteten, dass alle Längen in Richtung der Bewegung durch den Äther um den Faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  verkürzt sind. Nach Lorentz ist eine mögliche Ursache für diese Kontraktion in der Tatsache zu suchen, dass der Äther die Kräfte zwischen den Molekülen beeinflusst, die ja von elektrischer Natur sind. Wir werden später sehen, dass dies der Wahrheit schon recht nahe kommt, auch wenn die Längenkontraktion im Rahmen der Relativitätstheorie keinen Äther benötigt.

## 9.2 Das Einstein'sche Relativitätsprinzip

Eine der Kernfragen, die Einstein klären wollte, war "Was sehe ich, wenn ich neben einem Lichtstrahl herlaufe?" Er geht also nicht von einer rein mechanischen Fragestellung aus, sondern von einem elektrodynamischen Standpunkt. Hierzu ein einleitendes Zitat aus der Arbeit von Einstein:

*Die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum "Lichtmedium" zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriff der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen. [...] Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden "Prinzip der Relativität" genannt wird) zur Voraussetzung erheben.*

Mit "Lichtmedium" ist natürlich der Äther gemeint, den Einstein hiermit als überflüssig abschafft. Wenn es aber keinen Äther gibt, ist der Begriff der "Absolutbewegung" bedeutungslos und nur die Relativbewegung eines Körpers in Bezug auf einen anderen kann für die Physik von Bedeutung sein.

Wenn es nun möglich wäre, neben einem Lichtstrahl herzulaufen, so würde man statt laufender elektromagnetischer Wellen nur elektrische und magnetische Felder sehen, die sich in Ruhe befinden und deren Stärke sich im Raum, aber nicht in der Zeit ändert. Betrachten wir z.B. eine elektromagnetische Welle der Form

$$\underline{E}(x, t) = \underline{E}_0 \sin(kx - \omega t) \quad (9.2.1)$$

mit  $x(t) = x_0 + ct$ , so finden wir

$$\underline{E}(x(t), t) = \underline{E}_0 \sin(k(x_0 + ct) - \omega t) = \underline{E}_0 \sin(kx_0) \quad (9.2.2)$$

da  $kc = \omega$ . Analoge Überlegungen gelten für das zugehörige Magnetfeld. Dies führt zu einem Widerspruch zu den Maxwell-Gleichungen, da nicht beide Felder zeitlich konstant aber räumlich veränderlich sein können. Einstein wollte deshalb die Elektrodynamik so umformulieren, dass es (wie in der Newton'schen Mechanik) nur auf Relativbewegungen ankommt. Als Beispiel diskutiert er das Induktionsgesetz ähnlich wie wir das in Kap. 16.1 machen haben, aber aus Sicht des bewegten Leiters. Dort gibt es kein elektrisches Feld, die Ladungen werden durch die Lorentz-Kraft in Bewegung gesetzt. Er kommt zu dem Schluss, dass das Galilei'sche Relativitätsprinzip für die Elektrodynamik nicht gelten kann, denn es hat z.B. folgende Konsequenzen:

- Die Lichtgeschwindigkeit ändert sich unter Galilei-Transformationen

$$c \rightarrow c' = c + v_0. \quad (9.2.3)$$

- Der Äther definiert ein Bezugssystem absoluter Ruhe und somit wären nicht mehr alle Bezugssysteme äquivalent<sup>3</sup>.

Vor dem Hintergrund des negativen Ausgangs des Michelson-Morley-Experiments postulierte Einstein daher ein verallgemeinertes Relativitätsprinzip:

- Die Gesetze der Physik (d.h. der Mechanik und der Elektrodynamik) gelten in allen Inertialsystemen in der gleichen Form.
- Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert.

Die zweite Aussage folgt eigentlich aus der ersten, da die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ja in den Maxwell-Gleichungen auftritt. Wegen der überragenden Bedeutung wird diese Aussage aber i.a. separat formuliert.

Das Postulat hat weitreichende Konsequenzen:

- (i) Die Transformation zwischen Inertialsystemen kann nicht durch die Galilei-Transformation gegeben sein, da dies der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit widersprechen würde. Es muss daher eine neue, relativistische Kinematik entwickelt werden mit einem neuen Gesetz für die Addition von Geschwindigkeiten.
- (ii) Da die Galilei-Transformation den physikalischen Gehalt der Newton'schen Gesetze widerspiegelt, müssen auch diese abgeändert werden. Dies führt zur relativistischen Dynamik.

Es stellt sich heraus, dass die Gesetze der Elektrodynamik unverändert bleiben, lediglich deren Interpretation ändert sich.

---

<sup>3</sup>Es sollten daher ähnliche Effekte auftreten wie durch Reibungskräfte in einem viskosen Fluid, siehe Kap. 4.1.



# Kapitel 10

## Relativistische Kinematik

Wir wollen nun durch Gedankenexperimente mit Licht (bewegte Quellen,...) die wesentlichen kinematischen Beziehungen der SRT ableiten.

### 10.1 Relativität der Gleichzeitigkeit

Zunächst überlegen wir uns, wie sich Uhren synchronisieren lassen. Ein einfaches Verfahren besteht darin, genau in der Mitte zwischen den (ruhenden!) Uhren ein (Licht-)Signal auszulösen (Abb. 10.1.1). Wenn das Signal bei den Uhren ankommt, werden sie gestartet und sind dann synchron.

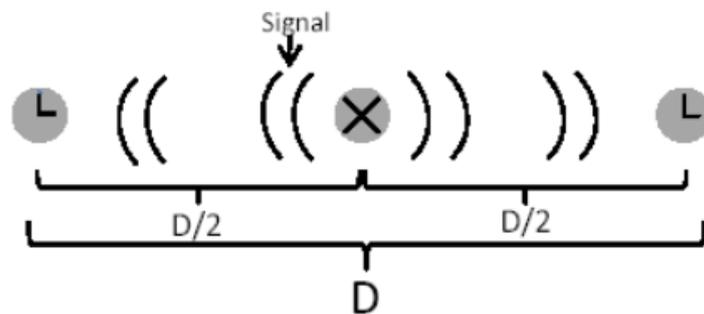


Abbildung 10.1.1: Synchronisation zweier Uhren durch ein Signal, welches in der Mitte zwischen den beiden (ruhenden) Uhren ausgesendet wird.

Was passiert aber bei bewegten Uhren? Als Beispiel betrachten wir Uhren in einem Zug, den wir als bewegtes System  $S'$  auffassen. Das ortsfeste System  $S$  ist dann der Bahnhof. Platziert man eine Lichtquelle in der Mitte des Zuges, so erreichen die Lichtstrahlen in  $S'$  die Enden zur gleichen Zeit  $t'_+ = t'_- = \frac{l'}{2c}$ , wobei  $l'$  die Länge des Zuges (gemessen in  $S'$ ) ist (Abb. 10.1.2). Vom Bahnhof aus gesehen bewegt sich das hintere Ende des Zuges dem Lichtstrahl entgegen, während sich das vordere Ende entfernt (Abb. 10.1.2). Unter Berücksichtigung der Konstanz der

Lichtgeschwindigkeit  $c$ , erreicht das Signal in  $S$  daher die Ende zu den Zeiten

$$t_+ = \frac{l}{2(c-v)}, \quad t_- = \frac{l}{2(c+v)}, \quad (10.1.1)$$

wobei  $l$  die Länge des Zuges gemessen in  $S$  ist<sup>1</sup>. Das Lichtsignal kommt in  $S$  also zu *verschiedenen* Zeiten an den Enden an. Somit sehen wir, dass Ereignisse, die in  $S'$  gleichzeitig sind, es in  $S$  nicht sind. Im Gegensatz zur Newton'schen Physik gibt es also **keine absolute Gleichzeitigkeit** und somit **keinen absoluten, vom Bezugssystem unabhängigen, Zeitbegriff**.

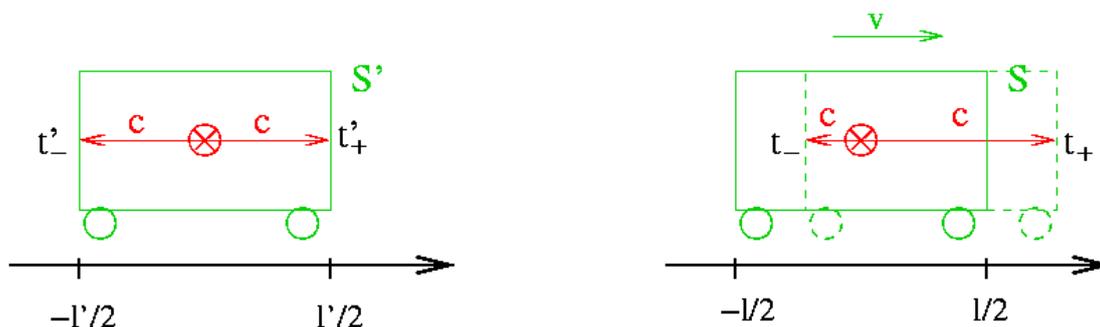


Abbildung 10.1.2: Synchronisation zweier Uhren betrachtet aus einem System  $S'$ , in dem die Uhren ruhen (links) und einem System  $S$ , in dem sich die Uhren mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegen. Die Ankunftszeiten der Signale sind  $t'_\pm$  bzw.  $t_\pm$

## 10.2 Zeitdilatation

Die Tatsache, dass es keine absolute Zeit gibt, hat weitreichende Konsequenzen. Als Beispiel betrachten wir einen einfachen Fall der Zeitmessung in einer Variante des Gedankenexperiments aus dem vorigen Abschnitt. Diesmal wird in dem Zug ein Lichtsignal nach unten geschickt (senkrecht zur Bewegungsrichtung), siehe Abb. 10.2.1. Wann erreicht das Licht den Boden?

Im System  $S'$  gilt  $\Delta t' = \frac{h}{c}$ . In  $S$  ist der Auftreffpunkt dagegen um die Strecke  $v\Delta t$  verschoben, die der Zug während der Laufzeit  $\Delta t$  des Lichtes zurücklegt. Die Laufstrecke in  $S$  ist daher  $d = \sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2} > h$  und die Laufzeit  $\Delta t = \frac{d}{c}$ . Somit erhalten wir zunächst

$$(\Delta t)^2 (c^2 - v^2) = h^2 \quad (10.2.1)$$

und hieraus

$$\Delta t = \frac{h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t' \quad (10.2.2)$$

mit dem Faktor

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1, \quad (10.2.3)$$

<sup>1</sup>Später werden wir sehen, dass  $l \neq l'$  ist.

der eine wichtige Rolle in der SRT spielt. Somit ergibt sich für die in den beiden Bezugssystemen gemessenen Zeiten

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \Delta t \quad (10.2.4)$$

d.h. der bewegte Beobachter misst eine kürzere Laufzeit. Dies bezeichnet man als **Zeitdilatation**. Anders ausgedrückt: **Bewegte Uhren gehen langsamer!**

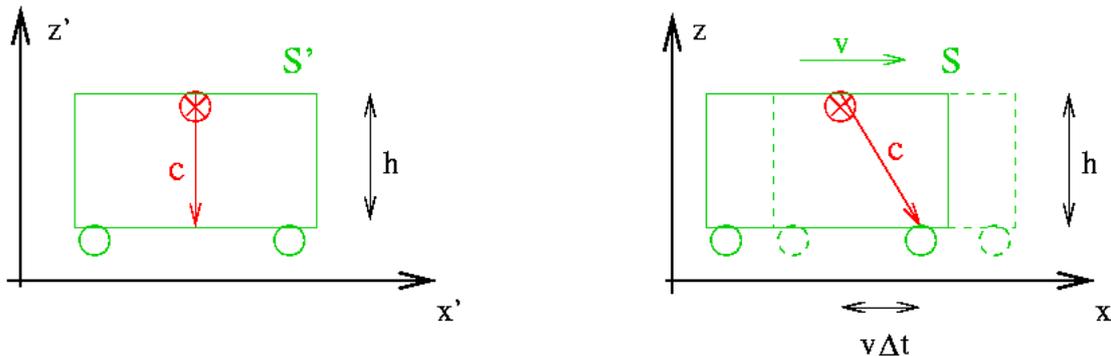


Abbildung 10.2.1: Synchronisation zweier Uhren betrachtet aus einem System  $S'$ , in dem die Uhren ruhen (links) und einem System  $S$ , in dem sich die Uhren mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegen. Die Ankunftszeiten der Signale sind  $t'_\pm$  bzw.  $t_\pm$ .

### 10.3 Längenkontraktion

Eine Längenmessung erfordert die *gleichzeitige* Bestimmung zweier Orte, nämlich der Anfangs- und Endpunkte. Da wir die Relativität der Gleichzeitigkeit schon eingesehen haben, wird sich diese auch auf Längenmessungen auswirken.

In einem Gedankenexperiment messen wir die Länges des Zuges über die Laufzeit von Lichtsignalen (Abb. 10.3.1). In  $S'$  beträgt die Laufzeit  $\Delta t' = \frac{2l'}{c}$ , während in  $S$  die Laufzeit durch die Summe der Laufzeiten  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$  für den Hin- und Rückweg, die nun unterschiedliche Längen haben, gegeben ist, mit

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - v}, \quad \Delta t_2 = \frac{l}{c + v}. \quad (10.3.1)$$

Somit haben wir

$$\Delta t = l \left( \frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v} \right) = \frac{2cl}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \gamma^2. \quad (10.3.2)$$

Lösen wir dies nach  $l$  auf und berücksichtigen die Zeitdilatation  $\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t$ , so folgt

$$l = \frac{c}{2} \frac{1}{\gamma^2} \Delta t = \frac{c}{2\gamma} \Delta t' = \frac{l'}{\gamma} < l'. \quad (10.3.3)$$

Der bewegte Wagen erscheint also in Bewegungsrichtung verkürzt. Dies bezeichnet man als **Längenkontraktion**. Quantitativ gilt

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (10.3.4)$$

wobei  $l_0$  die Länge im Ruhesystem ist.

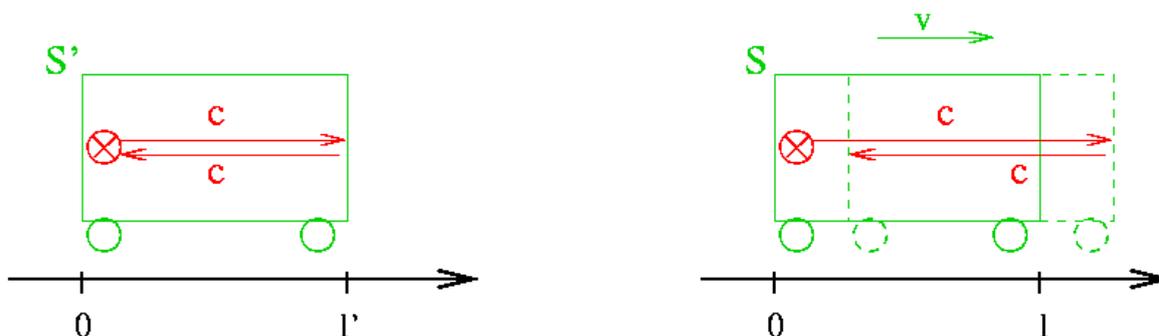


Abbildung 10.3.1: Längenmessung über die Laufzeit von Lichtsignalen.

Da die Situation symmetrisch in  $S$  und  $S'$  ist, erscheinen auch Maßstäbe in  $S$  aus Sicht von  $S'$  verkürzt. Dies ist aber nicht paradox, da die Längenmessung eine *gleichzeitige* Bestimmung von Anfangs- und Endpunkt erfordert, es aber keine absolute Gleichzeitigkeit gibt.

## 10.4 Die Lorentz-Transformation

Die Lorentz-Transformation (1904) ist die Verallgemeinerung der Galilei-Transformation auf relativistische Geschwindigkeiten. Wir betrachten zwei Inertialsysteme  $S$  und  $S'$ , deren Ursprünge zur Zeit  $t = 0$  zusammenfallen:

$$t = t' = 0 : \quad x = x', \quad y = y', \quad z = z'. \quad (10.4.1)$$

Das System  $S'$  bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in Richtung der  $x$ -Achse von System  $S$  (Abb. 10.4.1). Die Position des Ursprungs von  $S'$  zur Zeit  $t$  ist daher  $vt$ .

Wir betrachten nun den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $P = (x', 0, 0)$  im System  $S'$  (Abb. 10.4.1). Im System  $S$  misst man für den Abstand von  $P$  zum Ursprung von  $S'$  auf Grund der Längenkontraktion  $x'/\gamma$ . Somit gilt in  $S$

$$x = vt + \frac{x'}{\gamma} \quad (10.4.2)$$

bzw.

$$x' = \gamma(x - vt). \quad (10.4.3)$$

Für  $v \ll c$  ist  $\gamma \approx 1$  und wir erhalten das bekannte Ergebnis der Galilei-Transformation.

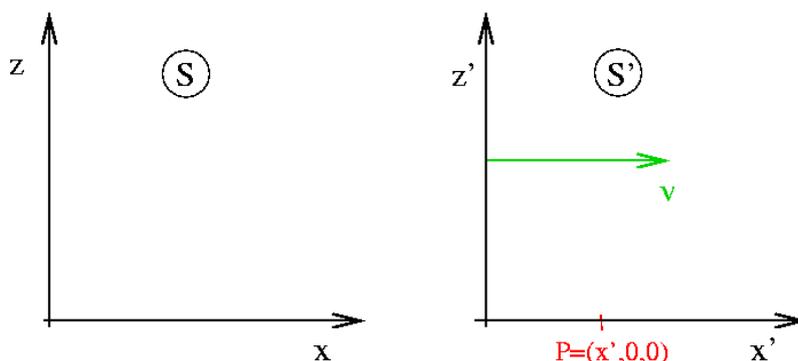


Abbildung 10.4.1: Zur Lorentz-Transformation. Das Inertialsystem  $S'$  bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v$  parallel zur  $x$ -Achse von System  $S$ .

Neu bei der Lorentz-Transformation ist aber, dass auch die Zeit transformiert werden muss, um der Zeitdilatation Rechnung zu tragen. Auf Grund der Symmetrie bewegt sich  $S$  von  $S'$  aus gesehen mit der Geschwindigkeit  $-v$ . Da  $\gamma(-v) = \gamma(v)$  gilt nun

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') = \gamma[\gamma(x - vt) + vt'] \\ &= \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt', \end{aligned} \quad (10.4.4)$$

wobei wir (10.4.3) benutzt haben. Lösen wir diese Gleichung nach  $t'$  auf, so erhalten wir

$$t' = \gamma t - \frac{1}{\gamma v} (\gamma^2 - 1) = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (10.4.5)$$

Die Koordinaten senkrecht zur Bewegungsrichtung ändern sich wie bei der Galilei-Transformation nicht. Zusammengefasst erhalten wir die **Lorentz-Transformation**

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.4.6)$$

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (10.4.7)$$

Die Umkehrung erhält man wie bei der Galilei-Transformation durch die Ersetzung  $v \rightarrow -v$  und  $x \leftrightarrow x'$  usw.:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.4.8)$$

$$y = y', \quad z = z'. \quad (10.4.9)$$

In der angegebenen Form wurde angenommen, dass sich die Inertialsysteme entlang ihrer  $x$ -Achsen bewegen. Sie ist daher zu modifizieren, wenn die Relativbewegung der Systeme unter einem anderem Winkel stattfindet.

Für kleine Geschwindigkeiten gilt (Taylor-Entwicklung)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (10.4.10)$$

Wenn die Geschwindigkeit  $v$  viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist folgt daraus, dass  $\gamma$  ungefähr 1 ist. Die Lorentz-Transformation geht dann in die Galilei-Transformation über.

Wir zeigen nun, dass sich die in Kap. 10 gefundenen Effekte auch direkt aus der Lorentz-Transformation ableiten lassen.

- **Zeitdilatation:** Wir betrachten eine Uhr am Ursprung von  $S'$  aus der Sicht von  $S$ . Dort befindet sich die Uhr zur Zeit  $t$  am Ort  $x = vt$  und zeigt die Zeit

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) = \gamma \left( t - \frac{v^2 t}{c^2} \right) = \frac{t}{\gamma}. \quad (10.4.11)$$

- **Längenkontraktion:** Die Enden eines Maßstabes liegen in  $S'$  bei  $x'_1, x'_2$  mit  $l' = x'_2 - x'_1$ . Misst man die Positionen der Enden *gleichzeitig* in  $S$  (zur Zeit  $t_1 = t_2$ ), so gilt

$$l' = x'_2 - x'_1 = \gamma ((x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1)) = \gamma(x_2 - x_1) = l. \quad (10.4.12)$$

### 10.4.1 Geschwindigkeitsaddition

Da die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist, können sich Geschwindigkeiten nicht wie in der Galilei-Transformation einfach addieren. Wir wollen daher das modifizierte Gesetz zur Addition von Geschwindigkeiten aus der Lorentz-Transformation ableiten.

Wie wir in den Übungen zeigen werden, hängen die Geschwindigkeit  $u_x = \frac{dx}{dt}$  eines Teilchens in  $S$  und die in  $S'$  gemessene Geschwindigkeit  $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$  zusammen gemäß

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}. \quad (10.4.13)$$

Dort werden wir auch sehen, dass auch die  $y$ - oder  $z$ -Komponenten der Geschwindigkeit zu transformieren sind, auch wenn die relative Bewegung von  $S$  und  $S'$  entlang der  $x$ -Achse erfolgt!

# Kapitel 11

## Die Geometrie der Raum-Zeit

### 11.1 Minkowski-Abstand

In der Newton'schen Physik gibt es getrennte Abstandsbegriffe für Raum und Zeit. Zwei Ereignisse  $(\underline{r}_1, t_1)$  und  $(\underline{r}_2, t_2)$  haben den **zeitlichen Abstand**

$$\Delta t = t_2 - t_1. \quad (11.1.1)$$

Ist  $\Delta t > 0$ , so findet Ereignis 1 früher als Ereignis 2 statt, ist  $\Delta t < 0$  so liegt Ereignis 2 vor Ereignis 1. Der **räumliche Abstand** der Ereignisse ist durch den euklidischen Abstand

$$\Delta r = |\underline{r}_2 - \underline{r}_1| = \sqrt{(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (11.1.2)$$

gegeben.

In der Relativitätstheorie ist der zeitliche Abstand der Ereignisse abhängig vom Bezugssystem. Wir suchen daher nach einem Abstandsbegriff, der invariant unter Lorentz-Transformationen ist! Dies leistet der **Minkowski-Abstand**

$$s_{12}^2 := c^2(t_2 - t_1)^2 - |\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^2, \quad (11.1.3)$$

der räumliche und zeitliche Abstände kombiniert. Man beachte, dass durchaus  $s_{12}^2 < 0$  sein kann, d.h. das Quadrat ist eher symbolisch zu interpretieren!

Zum Beweis der Invarianz betrachten wir den Abstand eines Ereignisses  $(x, t)$  vom Ursprung:

$$\begin{aligned} s'^2 &= c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 \gamma^2 \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)^2 - \gamma^2 (x - vt)^2 \\ &= c^2 \gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^2 - \gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x^2 = c^2 t^2 - x^2 = s^2. \end{aligned} \quad (11.1.4)$$

### 11.2 Minkowski-Diagramm

Da Raum und Zeit im Rahmen der Relativitätstheorie nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden können<sup>1</sup> spricht man im Zusammenhang mit der von Minkowski (auf einer

---

<sup>1</sup>Sie „mischen“ ja z.B. bei der Lorentz-Transformation.

Mathematiker-Konferenz 1908 in Köln) eingeführten vierdimensionalen Betrachtungsweise von der **Raumzeit** oder **Minkowski'schen Raumzeit**. Einen Punkt im Minkowski-Diagramm bezeichnet man auch als **Ereignis**.

Minkowski hat eine anschauliche (geometrische) Darstellung der Lorentz-Transformation eingeführt, die auf einer speziellen Form des Raum-Zeit-Diagramms beruhen, dem **Minkowski-Diagramm**. Üblicherweise sind gegenüber dem klassischen  $x - t$ -Diagramm die Achsen für Ort und Zeit vertauscht (Abb. 11.2.1). Formal kann man das **Minkowski-Diagramm** folgendermaßen definieren:

Das Minkowski-Diagramm ist ein Weg-Zeit-Diagramm, das die Postulate der speziellen Relativitätstheorie erfüllt. Es ist vierdimensional und weist drei Raumdimensionen  $x, y, z$  und eine Zeitdimension  $t$  auf.

Aus Dimensionsgründen sollte man statt der Zeit  $t$  als vierte Koordinate  $ct$  nehmen, da dann alle Koordinaten die Dimension einer Länge haben. Oft wird aber im Rahmen der Relativitätstheorie aus Bequemlichkeit  $c = 1$  gesetzt, d.h. man misst alle Geschwindigkeit in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit.

Gibt man die Position eines Objektes zu jeder Zeit an, so liefert das im Minkowski-Diagramm eine sog. **Weltlinie**. Eine Weltlinie meint also eine Kurve im Raum-Zeit-Diagramm, die die Bewegung eines Körpers oder die Ausbreitung eines Signals beschreibt. Für ein Teilchen, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  nach rechts bewegt, gilt

$$x = vt \quad \implies \quad ct = \frac{c}{v}x. \quad (11.2.1)$$

Es wird somit im Minkowski-Diagramm durch eine Gerade mit der Steigung  $\frac{c}{v} > 1$  repräsentiert. Speziell für Lichtstrahlen ist die Steigung 1. Da sich kein Teilchen oder Signal schneller als Licht bewegen kann, dürfen Weltlinien keine Steigung aufweisen, die kleiner als 1 ist. Sie liegen daher innerhalb des **Lichtkegels**  $|x| = |ct|$ , der alle Punkte umfasst, die vom Ursprung aus mit einem Lichtsignal (in der Zukunft oder Vergangenheit) erreicht werden können und daher den Minkowski-Abstand  $s^2 = 0$  vom Ursprung haben<sup>2</sup>.

Der Lichtkegel zerlegt die Raumzeit-Ebene in drei Gebiete:

- $s^2 > 0, t > 0$ : Das Innere des **Vorwärts-Lichtkegels**  $x = \pm ct, t > 0$  entspricht der **absoluten Zukunft** des Ereignisses  $(0, 0)$ . Ereignisse in diesem Gebiet finden in jedem Bezugssystem später als  $t = 0$  statt, d.h. unter Lorentz-Transformationen ist  $t' > 0$ .

Andererseits gibt es für jedes solche Ereignis ein Bezugssystem  $S'$ , in dem es im Ursprung  $x' = 0$  stattfindet. Die Koordinatenachsen von  $S'$  sind bestimmt<sup>3</sup> durch  $t' = 0$  ( $x'$ -Achse) und  $x' = 0$  ( $t'$ -Achse). In  $S$  sind diese daher durch die Gerade

$$\begin{aligned} ct &= \frac{c}{v}x && (t' - \text{Achse}) \\ ct &= \frac{v}{c}x && (x' - \text{Achse}) \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

<sup>2</sup>Im dreidimensionalen Raum werden diese Bereiche zu Hyperkegeln.

<sup>3</sup>Dies gilt ganz allgemein für jedes relativ zu  $S$  bewegte Bezugssystem.

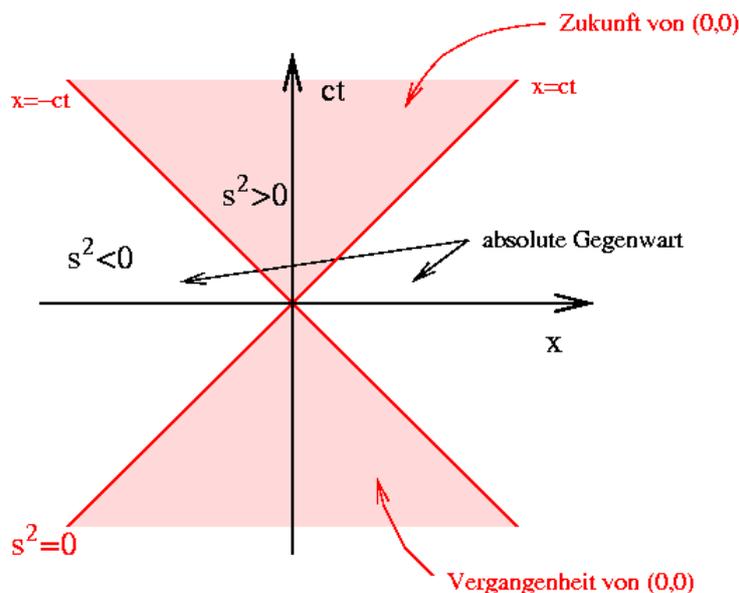


Abbildung 11.2.1: Minkowski-Diagramm: Der Lichtkegel zerlegt die Raumzeit-Ebene in drei Gebiete.

gegeben. Man sieht aus Abb. 11.2.2, dass die  $t'$ -Achse durch geeignete Wahl von  $v$  durch jeden Punkt im Inneren des Vorwärts-Lichtkegels von  $S$  gehen kann.

- $s^2 > 0$ ,  $t < 0$ : Das Innere des **Rückwärts-Lichtkegels** entspricht der **absoluten Vergangenheit** des Ereignisses  $(0, 0)$ . Ereignisse dort finden in jedem Bezugssystem vor  $t = t' = 0$  statt und für jedes Ereignis gibt es ein Bezugssystem, in dem es am Ursprung  $x' = 0$  stattfindet.
- $s^2 < 0$ : Das Gebiet außerhalb des Lichtkegels wird als **absolute Gegenwart** bezeichnet. Ereignisse dort sind räumlich vom Ursprung getrennt, es ist stets  $x' \neq 0$ . Es aber ein Bezugssystem, in dem das Ereignis bei  $t' = 0$  stattfindet, also gleichzeitig mit  $(x, t) = (0, 0)$ . Ereignisse in diesem Bereich sind aber kausal vom Ursprung getrennt und könnten nur durch Signale mit Überlichtgeschwindigkeit erreicht werden.

Die obigen Überlegungen lassen sich auf beliebige Ereignisse  $(r_1, t_1)$  und  $(r_2, t_2)$  verallgemeinern. Man unterscheidet folgende Fälle:

$s_{12}^2$	Abstand	Lage
$> 0$	zeitartig	in Zukunft ( $t > 0$ ) oder Vergangenheit ( $t < 0$ )
$= 0$	lichtartig	auf dem Lichtkegel
$< 0$	raumartig	Gegenwart

Bei **zeitartigen** Abständen können Beobachter an den beiden Ereignissen miteinander kommunizieren, wobei die Signalgeschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Für **lichtartige** Abstände geht dies nur mit Signalen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Beobachter mit einem **raumartigen** Abstand können dagegen überhaupt nicht miteinander kommunizieren.

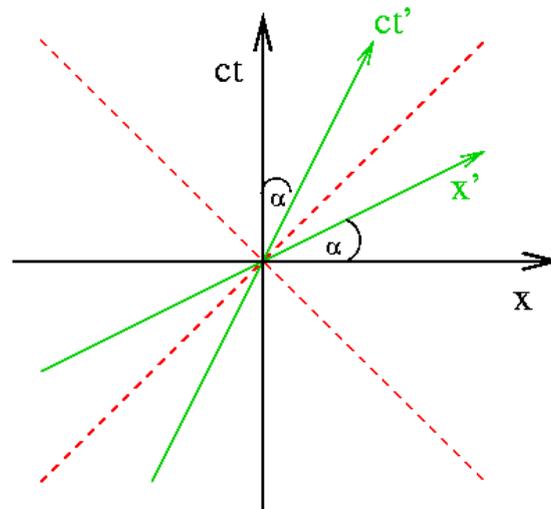


Abbildung 11.2.2: Die  $t'$ - und  $x'$ -Achsen eines relativ zu  $S$  bewegten Systems  $S'$  bilden mit den  $t$ - bzw.  $x$ -Achsen jeweils den gleichen Winkel. Der Lichtkegel bleibt daher auch in  $S'$  die Winkelhalbierende.

Wir sehen, dass die Relativität der Gleichzeitigkeit Grenzen hat. Die Reihenfolge zweier zeitartig getrennter Ereignisse kann durch einen Wechsel des Bezugssystems nicht verändert werden. Die Existenz von zeitartig getrennten Abständen ist daher konzeptionell wichtig, da sonst die Vorstellung der kausalen Verknüpfung zweier Ereignisse als Ursache und Wirkung nicht möglich wäre.

Die Linien konstanten Minkowski-Abstandes sind (in der zweidimensionalen Raumzeit) Hyperbeln (Abb. 11.2.3):

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 \implies \begin{cases} ct = \pm \sqrt{x^2 + s^2} & \text{für } s^2 > 0, \\ x = \pm \sqrt{c^2 t^2 - s^2} & \text{für } s^2 < 0. \end{cases} \quad (11.2.3)$$

Man spricht daher von einer **hyperbolischen Geometrie**. Abschliessend sei noch angemerkt, dass im Falle von mehr als einer Raumdimension die Symmetrie von Raum und Zeit der zweidimensionalen Raumzeit gebrochen wird.

### 11.2.1 Eigenzeit

Wir betrachten einen Beobachter in einer zweidimensionalen Raumzeit, der eine allgemeine Bewegung  $x(t)$  ausführt (Abb. 11.2.4). Welche Zeit misst er ?

Auf Grund der Zeitdilatation (10.2.4) ist

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (11.2.4)$$

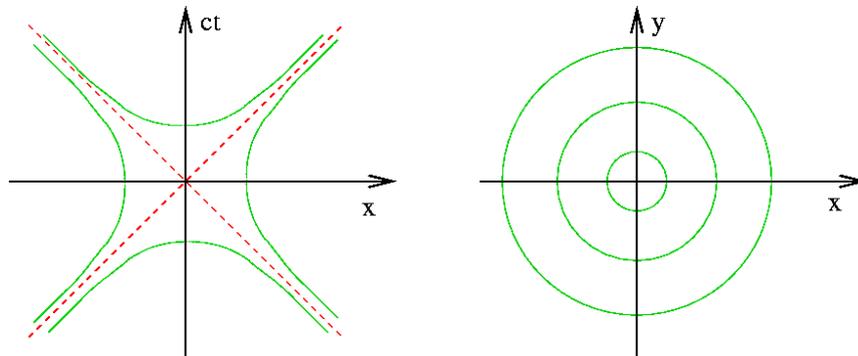


Abbildung 11.2.3: Die Linien konstanten Minkowski-Abstands vom Ursprung der zweidimensionalen Raumzeit sind Hyperbeln (links). In der euklidischen Geometrie der Newton'schen Mechanik sind liegen die Punkte mit gleichem euklidischen Abstand auf einem Kreis.

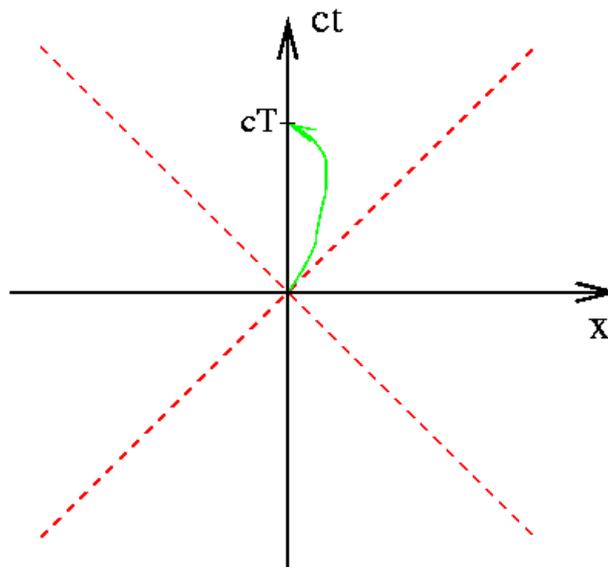


Abbildung 11.2.4: Ein Beobachter, der sich entlang der grünen Weltlinie bewegt, misst eine Zeit  $T'$ , die größer ist als die Zeit  $T$ , die für einen ruhenden Beobachter vergeht.

wobei hier die Momentangeschwindigkeit  $v = \frac{dx}{dt}$  einzusetzen ist. Daher gilt

$$\begin{aligned}(dt')^2 &= \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] (dt)^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2}(dx)^2 \\ &= \frac{1}{c^2} [c^2(dt)^2 - (dx)^2] = \frac{1}{c^2}(ds)^2,\end{aligned}\quad (11.2.5)$$

d.h.  $(dt')^2$  ist bis auf den Faktor  $1/c^2$  die infinitesimale Änderung des Minkowski-Abstandes  $ds^2$ . Deshalb definiert man das infinitesimale Inkrement der **Eigenzeit**  $\tau$  des Beobachters durch

$$d\tau := \frac{1}{c} ds = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \dot{x}^2} dt = \frac{dt}{\gamma}.\quad (11.2.6)$$

Man beachte, dass sich hierbei  $\gamma$  mit der Geschwindigkeit zeitlich ändern kann! Die vom Beobachter entlang des Weges gemessene Zeit ist daher

$$T' = \int_0^T dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} < T,\quad (11.2.7)$$

die auf Grund des Minuszeichens unter der Wurzel immer kleiner als  $T$  ist. Wir vergleichen (11.2.7) mit dem Ausdruck

$$\mathcal{F}_S[\underline{r}(\cdot)] := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx\quad (11.2.8)$$

(vgl. (8.4.10)) für die Bogenlänge in der euklidischen Ebene, Letztere wird durch eine Gerade minimiert. Durch das Minuszeichen in (11.2.7) ist die ‘Gerade’ ( $\dot{x} = 0$ ) in der hyperbolischen Geometrie die *längste* Verbindung zwischen den beiden Punkten!

Als Anwendung des Konzepts der Eigenzeit wollen wir das **Zwillingsparadoxon** diskutieren, das ursprünglich die SRT lächerlich machen sollte (siehe [9]). Es handelt von Zwillingen Alice und Bob, von denen Alice zu einem entfernten Planeten fliegt und dann zur Erde zurückkehrt. Für Bob vergeht zwischen Abflug und Rückkehr die Zeit  $T$ . Nehmen wir an, dass sich Alice, bis auf die beliebig kurze Umkehrphase, mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegt, so vergeht für sie die Zeit  $T' = \frac{1}{\gamma}T < T$ . Sie ist also nach der Rückkehr jünger als Bob!

Das ist zwar ungewohnt, aber noch nicht paradox. Das Paradoxon entsteht erst durch Umkehrung des Arguments: Alice befindet sich (bis auf die kurze Umkehrphase) in einem Inertialsystem und aus ihrer Sicht entfernt sich Bob und kehrt dann zurück. Also sollte er jünger sein als sie!

Die Auflösung des Paradoxons besteht darin, dass die Situation *nicht* symmetrisch ist! Alice muss mindestens einmal das Inertialsystem wechseln und ihre Weltlinie  $x(t)$  ist daher keine Gerade (Abb. 11.2.5). Wenn sie instantan umkehrt, ist ihre Weltlinie stückweise linear. Die Auswertung des Integrals (11.2.7) ergibt dann

$$T' = 2 \frac{T}{2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} T,\quad (11.2.9)$$

wie erwartet.

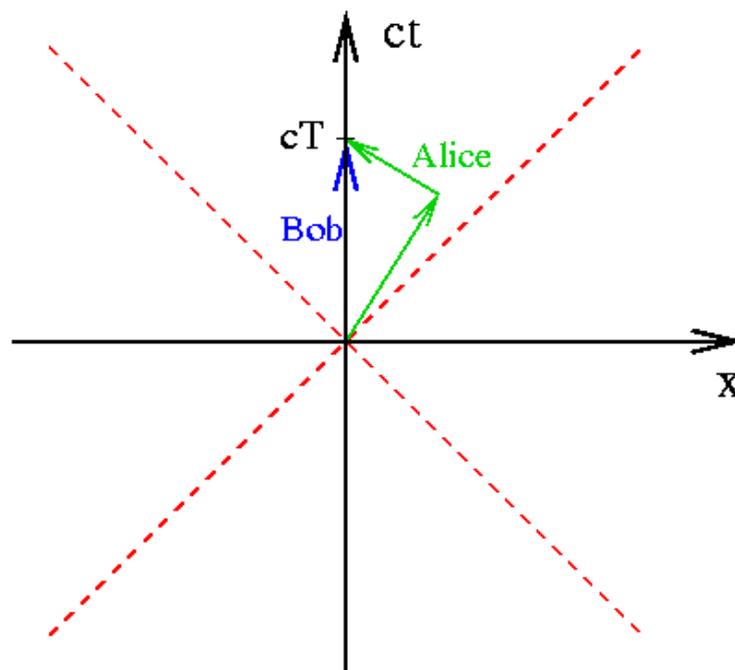


Abbildung 11.2.5: Zum Zwillingsparadoxon. Alice muss das Inertialsystem wechseln, ihre Weltlinie ist daher keine Gerade. Bob befindet sich dagegen die ganze Zeit im gleichen Inertialsystem.



# Kapitel 12

## Relativistische Dynamik

### 12.1 Vierervektoren

In der Newton'sche Dynamik haben wir gesehen, dass das Newton'sche Bewegungsgesetz (3.1.3) invariant unter Koordinatentransformation ist, insbesondere unter Drehungen (siehe Kap. 4.1). Es handelt sich um eine Beziehung zwischen **Vektoren**, die in diesem Zusammenhang folgendermaßen definiert sind:

Ein **Vektor** ist eine dreikomponentige Größe, die sich unter Drehungen wie ein Ortsvektor  $\underline{r} = (x, y, z)$  transformiert.

Ein **Skalar** ist eine (einkomponentige) Größe, die sich unter Drehungen nicht ändert.

In der Newton'schen Mechanik ist die Zeit  $t$  eine Größe, die global und unabhängig vom Bezugssystem definiert ist und daher ein Skalar<sup>1</sup>. Daher sind Zeitableitungen von Vektoren ebenfalls Vektoren, z.B. die Zeitableitungen von Ortsvektoren

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}, \quad \underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}, \quad \underline{p} = m\underline{v}. \quad (12.1.1)$$

In der Relativitätstheorie ist die Zeit aber abhängig vom Bezugssystem und daher kein Skalar mehr. Für eine relativistische Verallgemeinerung des Bewegungsgesetzes (3.1.3) verallgemeinern wir zunächst die Begriffe Vektor und Skalar auf **Lorentz-invariante Größen**:

- Ein **Lorentz-Vektor** (auch **Vierervektor**) ist eine vierkomponentige Größe, die sich unter Lorentz-Transformationen wie ein Raum-Zeit-Punkt<sup>2</sup>

$$X = (X^0, X^1, X^2, X^3) := (ct, x, y, z) = (ct, \underline{r}) \quad (12.1.2)$$

transformiert.

- Ein **Lorentz-Skalar** ist eine (einkomponentige) Größe, die unter Lorentz-Transformationen invariant ist.

---

<sup>1</sup>Ebenso ist die Masse  $m$  ein Skalar!

<sup>2</sup>Üblicherweise bezeichnet man Vierervektoren durch Grossbuchstaben mit hochgestellten Indizes. Deren Bedeutung wird später noch genauer erläutert.

## 12.2 Relativistischer Impuls und relativistische Energie

Die Zeit  $t$  ist zwar kein Lorentz-Skalar, allerdings ist die Eigenzeit  $\tau$  proportional zum invarianten Minkowski-Abstand (siehe (11.2.6)) und damit ein Lorentz-Skalar. Damit liegt es nahe, als Verallgemeinerung des Newton'schen Impulses  $\underline{p} = m\underline{\dot{x}}$  den **relativistischen Impuls** oder **Viererimpuls** eines Teilchens durch

$$P = (P^0, P^1, P^2, P^3) := m \frac{dX}{d\tau} = m\gamma \frac{dX}{dt} = m\gamma(c, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (12.2.1)$$

zu definieren. Im nichtrelativistischen Grenzfall  $|\dot{x}| \ll c$ ,  $\gamma \approx 1$  reduzieren sich die räumlichen Komponenten des Viererimpulses auf den Newton'schen Impuls

$$(P^1, P^2, P^3) \approx m\underline{\dot{x}}. \quad (12.2.2)$$

Um die physikalische Bedeutung der zeitlichen Komponente  $P^0$  zu verstehen, entwickeln wir  $P^0$  nach Ordnungen von  $v/c^2$ :

$$P^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx mc \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) = \frac{1}{c} \left( mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \right). \quad (12.2.3)$$

Der zweite Term ist offensichtlich die Newton'sche kinetische Energie. Den ersten Term diskutieren wir noch in Kap. 12.3. Es handelt sich dabei um die **Ruheenergie**  $mc^2$ . Die Größe  $cP^0$  können wir dann mit der Gesamtenergie  $E$  des Teilchens identifizieren,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (12.2.4)$$

Damit können wir den Viererimpuls schreiben als

$$\boxed{P = (E/c, \underline{p}), \quad \underline{p} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_r \underline{v},} \quad (12.2.5)$$

mit der **relativistischen Masse**

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (12.2.6)$$

Die Form des Viererimpulses ist nicht ganz überraschend, da nach dem Noether-Theorem die Energie mit zeitlichen und der Impuls mit räumlichen Translationen verknüpft sind.

Bei der Interpretation der relativistischen Masse ist Vorsicht geboten! So kann man nicht einfach in beliebigen klassischen Ausdrücken die Masse durch die relativistische Masse ersetzen, um so korrekte relativistische Ergebnisse zu erhalten!

Analog zum Minkowski-Abstand kann man für einen allgemeinen Vierervektor  $X = (X^0, X^1, X^2, X^3)$  den **Minkowski-Betrag**

$$|X|^2 = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 \quad (12.2.7)$$

einführen. Dieser ist per Konstruktion ein Lorentz-Skalar und damit invariant unter Lorentz-Transformationen.

Für den Viererimpuls ergibt sich daraus die invariante Größe

$$|P|^2 = (E/c)^2 - |\underline{p}|^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2\gamma^2|\underline{v}|^2 = m^2\gamma^2(c^2 - |\underline{v}|^2) = m^2c^2. \quad (12.2.8)$$

Löst man dies nach der Energie  $E$  auf, so erhält man die wichtige Beziehung

$$\boxed{E = \sqrt{m^2c^4 + c^2|\underline{p}|^2}} \quad (12.2.9)$$

zwischen Energie und Impuls eines relativistischen Teilchens.

Diese Beziehung ist auch für masselose Teilchen ( $m = 0$ ) sinnvoll:

$$E = c|\underline{p}|. \quad (12.2.10)$$

Solche Teilchen können aber nur dann nichtverschwindende Energie und Impuls haben, wenn man zugleich die Limites  $m \rightarrow 0$  und  $v \rightarrow c$  durchführt, d.h. masselose Teilchen *müssen* sich immer mit Lichtgeschwindigkeit bewegen!

## 12.3 Kräfte

Eine relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Bewegungsgleichung muss sich in Form einer Beziehung zwischen Vierervektoren schreiben lassen, d.h.

$$\frac{d}{d\tau}P = K \quad (12.3.1)$$

mit der **Minkowski-Kraft**  $K = (K^0, K^1, K^2, K^3)$ . Der räumlichen Anteil dieser Gleichung lautet

$$\gamma \frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{K} \quad (12.3.2)$$

mit  $\underline{K} = (K^1, K^2, K^3)$ . Diesen können wir durch Vergleich mit der Newton'schen Beziehung  $\dot{\underline{p}} = \underline{F}$  leicht identifizieren und erhalten

$$\underline{K} = \gamma \underline{F} \quad (12.3.3)$$

als Zusammenhang zwischen der Newton'schen Kraft  $\underline{F}$  und dem räumlichen Anteil  $\underline{K}$  der Minkowski-Kraft.

Zur Bestimmung des zeitlichen Anteils leiten wir (12.2.8) nach  $\tau$  ab:

$$0 = \frac{d}{d\tau} [ |P|^2 - (P^0)^2 ] = 2 \left( P^0 \frac{dP^0}{d\tau} - \underline{p} \cdot \frac{d\underline{p}}{d\tau} \right) = 2 (P^0 K^0 - \underline{p} \cdot \underline{K}). \quad (12.3.4)$$

Lösen wir nach  $K^0$  auf, so erhalten wir

$$K^0 = \frac{1}{P^0} \underline{p} \cdot \underline{K} = \frac{\gamma}{c} \underline{v} \cdot \underline{F}. \quad (12.3.5)$$

Damit kann man nun die zeitliche Komponente von (12.3.1) in eine vertrautere Form bringen:

$$\frac{dE}{dt} = c \frac{dP^0}{dt} = \frac{c}{\gamma} \frac{dP^0}{d\tau} = \frac{c}{\gamma} K^0 = \underline{v} \cdot \underline{F}. \quad (12.3.6)$$

Dies ist der weiter oben erwähnte Beleg für die Identifikation von  $cP^0$  mit  $E$ : Die Änderung der Energie ist gerade die von der Kraft erbrachte Leistung  $\underline{v} \cdot \underline{F}$ .

Zum Abschluss betrachten wir noch eine Anwendung von (12.3.1). Dazu betrachten wir eine konstante Kraft  $\underline{F} = (F_x, 0, 0)$  in  $x$ -Richtung. Die Bewegungsgleichung für  $p_x$  lautet dann

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = F_x. \quad (12.3.7)$$

Integration mit der Anfangsbedingung  $v_x(0) = 0$  liefert

$$\frac{mv_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = F_x t, \quad (12.3.8)$$

woraus man durch Auflösen nach  $v_x$  erhält

$$v_x(t) = \frac{F_x t}{\sqrt{m^2 + F_x^2 t^2 / c^2}}. \quad (12.3.9)$$

Für kurze Zeiten dominiert in der Wurzel der  $m^2$ -Term. Dann reduziert sich dies zum bekannten Newton'schen Verhalten  $v_x = F_x t / m$  für die Bewegung unter dem Einfluss einer konstanten Kraft. Für lange Zeiten strebt dagegen  $v_x \rightarrow c$ . Das Teilchen kann also trotz der konstant wirkenden Kraft nur bis zur Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden, die allerdings nie wirklich erreicht wird. Dies ist konsistent mit dem Verhalten der relativistischen Masse (12.2.6), die die Zunahme der Trägheit in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit impliziert, d.h. eine geringere Beschleunigung als bei gleicher Kraft bei niedrigeren Geschwindigkeiten.

**Teil III**  
**Elektrodynamik**



# Kapitel 13

## Mathematische Grundlagen

Bevor wir mit der Theorie der Elektrodynamik begonnen, wollen wir an einige wichtige mathematische Konzepte erinnern, die für die Theorie wesentlich sind.

### 13.1 Vektorfelder

In der Vorlesung *Mathematische Methoden* und im Mechanik-Teil der Vorlesung haben wir schon verschiedene Arten von Funktionen kennengelernt, z.B.

- Funktionen einer Variablen  $f(x)$
- skalare Funktionen mehrerer Variablen  $F(x_1, \dots, x_n)$ , z.B. die Lagrange-Funktion
- vektorwertige Funktionen einer Variablen, z.B. die Bahnkurve  $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  eines Teilchens, seine Geschwindigkeit und Beschleunigung, ...
- **Vektorfelder**, also vektorwertige Funktionen des Ortes<sup>1</sup>

$$\underline{V} : \underline{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \underline{V}(\underline{r}) \in \mathbb{R}^3 \quad (13.1.1)$$

mit den Komponenten  $\underline{V} = (V_x, V_y, V_z)$ .

Die Elektrodynamik benutzt vor allem Vektorfelder zur mathematischen Beschreibung der physikalischen Objekte. Anschaulich wird jedem Punkt  $\underline{r}$  des Raumes ein Vektorpfeil  $\underline{V}(\underline{r})$  "angeheftet". Bei differenzierbaren Vektorfeldern kann man sich die Pfeile durch **Feldlinien** verbunden denken, die in jedem Punkt tangential zu den Vektoren laufen (Abb. 13.1.1).

### 13.2 Ableitungen von Vektorfeldern

Um die räumliche Veränderung von Vektorfeldern quantitativ zu beschreiben, kann man die jeweils drei partiellen Ableitungen der drei Komponenten  $V_x, V_y, V_z$ , also durch die  $3 \times 3$ -Matrix

---

<sup>1</sup>Die Felder können zusätzlich auch von der Zeit  $t$  abhängen.

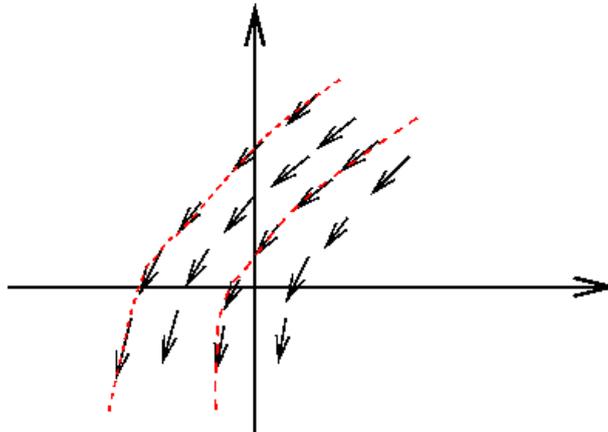


Abbildung 13.1.1: Ein Vektorfeld mit Feldlinien (rot).

$(\partial V_i / \partial x_j)_{i,j=1,2,3}$ . In der Praxis spielen aber nur gewisse Kombinationen dieser Ableitungen eine Rolle, die sich elegant mit Hilfe des **Nabla-Operators**

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (13.2.1)$$

ausdrücken lassen (vgl. Kap. 5.3.1). Dieser kann auf skalare Funktionen und Vektorfelder angewendet werden, was folgende Differentialoperationen liefert.

### 13.2.1 Gradient

Durch die Anwendung des Nabla-Operators auf eine skalare Funktion  $F(\underline{r})$  des Ortes erhält man das Vektorfeld

$$\nabla F(\underline{r}) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) =: \text{grad } F, \quad (13.2.2)$$

das man als den **Gradienten von  $F$**  bezeichnet. Das Vektorfeld  $\nabla F$  hat folgende Eigenschaften:

- Der Gradient steht senkrecht auf den Flächen, auf denen  $F$  konstant ist.
- $\nabla F$  zeigt in die Richtung, in der  $F$  am stärksten zunimmt.

Wir machen uns diese Eigenschaften am Beispiel  $F(\underline{r}) = |\underline{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$  klar. In diesem Fall ist  $\nabla F = (2x, 2y, 2z) = 2\underline{r}$ . Die Flächen konstanten  $F$ 's sind Kugelschalen, und  $\nabla F$  zeigt radial nach außen.

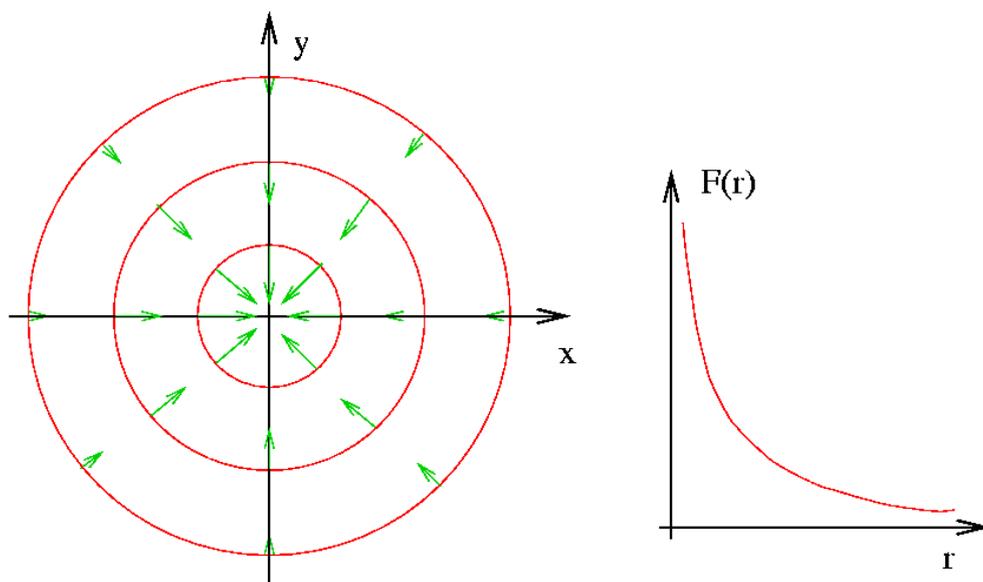


Abbildung 13.2.1: Gradientenfeld einer monoton fallenden radialsymmetrischen Funktion.

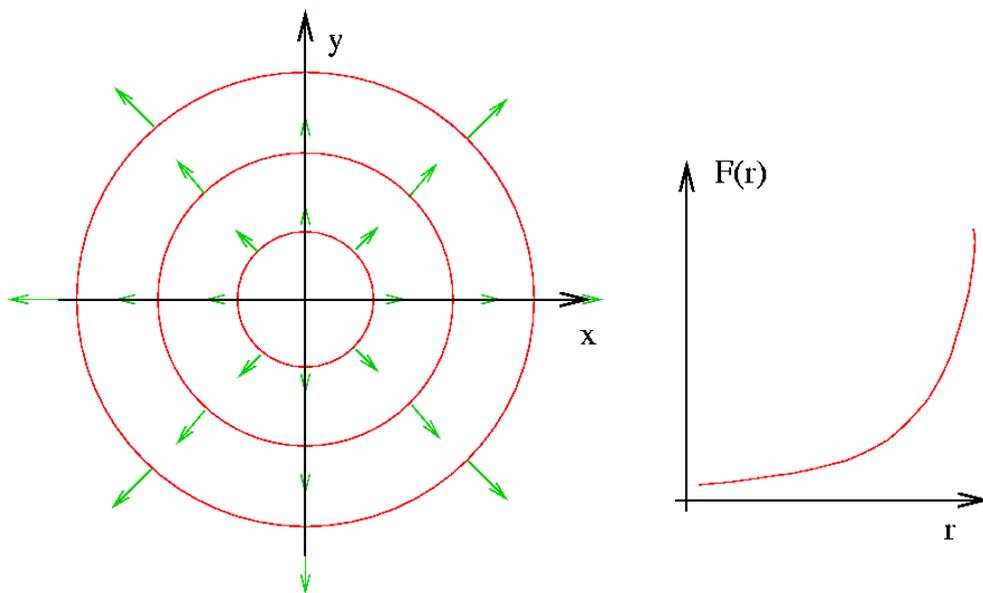


Abbildung 13.2.2: Gradientenfeld einer monoton wachsenden radialsymmetrischen Funktion.

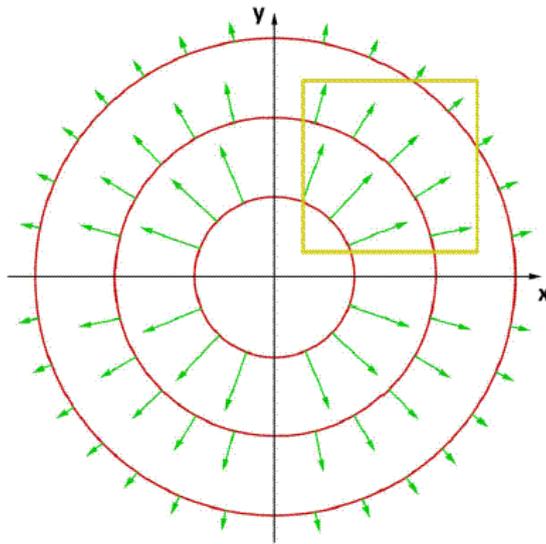


Abbildung 13.2.3: Illustration eines radialsymmetrischen Vektorfeldes, dessen Betrag mit zunehmendem Abstand vom Ursprung abnimmt. Je nach funktionaler Form des Abfalls ist die Divergenz positiv oder negativ. Für den Spezialfall  $V(r) \sim 1/r^2$  (das Coulombfeld) ist die Divergenz außerhalb des Ursprung identisch Null, siehe (13.4.1).

### 13.2.2 Divergenz

Die **Divergenz** entsteht durch skalare Multiplikation des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld  $\underline{V}$ . Sie liefert daher eine skalare Funktion

$$\nabla \cdot \underline{V}(\underline{r}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \text{div } \underline{V}. \quad (13.2.3)$$

Die Divergenz kann als Quellstärke des Vektorfeldes  $\underline{V}$  interpretiert werden. Sie beschreibt für  $\nabla \cdot \underline{V}(\underline{r}) > 0$  das Auseinanderlaufen und für  $\nabla \cdot \underline{V}(\underline{r}) < 0$  das Zusammenlaufen der Feldlinien. Als einfaches Beispiel betrachten wir das radiale Feld  $\underline{V}(\underline{r}) = a\underline{r}$  mit einer Konstanten  $a$ . Die Divergenz ergibt sich zu  $\nabla \cdot \underline{V} = 3a$ . Sie ist  $> 0$  für  $a > 0$  und  $< 0$  für  $a < 0$ .

### 13.2.3 Rotation

Die **Rotation** oder **Wirbelstärke** entsteht durch das ‘‘Vektorprodukt’’ des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld  $\underline{V}$  und liefert daher wieder ein Vektorfeld:

$$\nabla \times \underline{V} = \text{rot } \underline{V} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right). \quad (13.2.4)$$

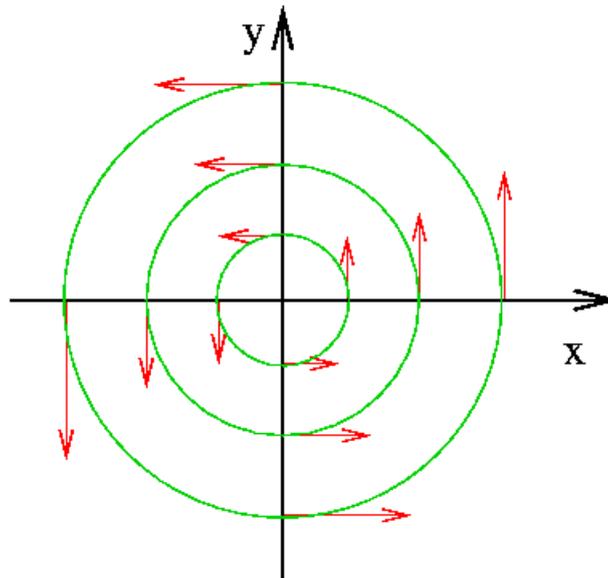


Abbildung 13.2.4: Das Vektorfeld (13.2.7).

Mit Hilfe des sog. **Levi-Cevità-Symbols**  $\epsilon_{ijk}$  können wir dies auch etwas kompakter als

$$(\text{rot } \underline{V})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} V_k \quad (13.2.5)$$

schreiben, wobei

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ zyklisch aus } (1, 2, 3) \\ -1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ antizyklisch aus } (1, 2, 3) \\ 0, & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases} \quad (13.2.6)$$

Als Beispiel betrachten wir das Vektorfeld

$$\underline{V}(\underline{r}) = (-y, x, 0), \quad (13.2.7)$$

dessen Rotation durch  $\nabla \times \underline{V} = (0, 0, 2) = 2\underline{e}_z$  gegeben ist.

### 13.2.4 Höhere Ableitungen

Höhere Ableitungen erhält man durch mehrfache Anwendung von  $\nabla$ , wobei aber zu beachten ist, ob man es mit einem Vektor- oder Skalarfeld zu tun hat.

Für eine skalare Funktion  $F$  hat man z.B.

$$\text{div}(\text{grad } F) = \nabla \cdot \nabla F = \nabla \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} =: \nabla^2 F \quad (13.2.8)$$

mit dem **Laplace-Operator**

$$\Delta := \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (13.2.9)$$

Außerdem gilt für jede skalare Funktion  $F$

$$\nabla \times \nabla F = \text{rot}(\text{grad } F) = 0 \quad (13.2.10)$$

wie wir in den Übungen zeigen werden.

Ähnlich gilt für jedes Vektorfeld  $\underline{V}$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{V}) = \text{div}(\text{rot } \underline{V}) = 0. \quad (13.2.11)$$

Unter schwachen Zusatzvoraussetzungen gilt auch die Umkehrung dieser Aussagen:

$$\nabla \times \underline{V} = 0 \implies \text{Es gibt eine skalare Funktion } F \text{ mit } \underline{V} = \nabla F, \quad (13.2.12)$$

$$\nabla \cdot \underline{V} = 0 \implies \text{Es gibt ein Vektorfeld } \underline{W} \text{ mit } \underline{V} = \nabla \times \underline{W}. \quad (13.2.13)$$

## 13.3 Integralsätze

Die Integralsätze können als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b dx \frac{df}{dx} = f(b) - f(a) \quad (13.3.1)$$

auf Vektorfelder aufgefasst werden. Zunächst wollen wir uns aber allgemein mit der Integration von Skalar- und Vektorfeldern beschäftigen.

### 13.3.1 Integration von Skalar- und Vektorfeldern

#### Wegintegral eines Vektorfeldes

Wir betrachten einen Weg, der durch seine Bogenlänge  $s$  parametrisiert sei (vgl. 2.2),

$$C = \{\underline{r}(s) \mid s_1 \leq s \leq s_2\}, \quad (13.3.2)$$

zwischen den Punkten  $\underline{r}(s_1)$  und  $\underline{r}(s_2)$ . Das Wegintegral eines Vektorfeldes  $\underline{V}$  entlang  $C$  ist dann definiert durch (vgl. 5.3.1)

$$\int_C d\underline{l} \cdot \underline{V} = \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \underline{V}(\underline{r}(s)) = \int_{s_1}^{s_2} ds \underline{\tau}(s) \cdot \underline{V}(\underline{r}(s)), \quad (13.3.3)$$

wobei wir  $d\underline{l} = \underline{\tau} ds$  durch den Tangentialvektor  $\underline{\tau}$  ausgedrückt haben.

Für geschlossene Wege, d.h.  $\underline{r}(s_1) = \underline{r}(s_2)$ , schreibt man auch

$$\oint_C d\underline{l} \cdot \underline{V}. \quad (13.3.4)$$

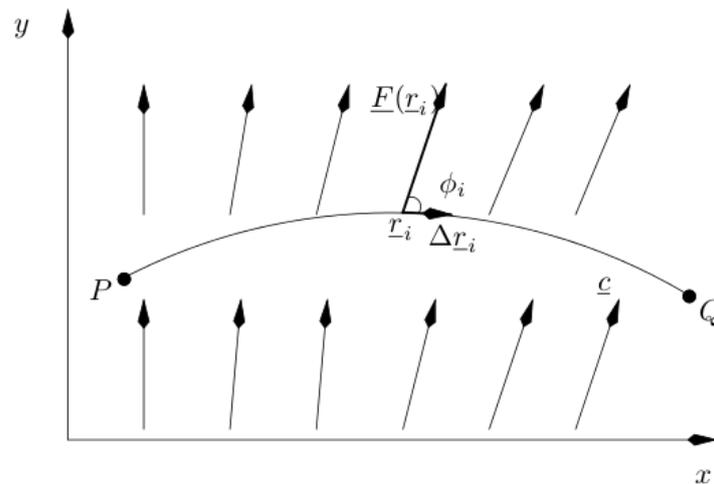


Abbildung 13.3.1: Zur Definition des Wegintegrals.

### Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche

Wir betrachten eine zweidimensionale Fläche  $\mathcal{F}$ , die von den Feldlinien eines Vektorfeldes  $\underline{V}$  durchdrungen wird (siehe Abb. 13.3.2). Wenn wir nun  $\mathcal{F}$  in infinitesimale Flächenelemente  $d\underline{f} = \underline{n}df$  mit der Flächennormalen  $\underline{n}$  zerlegen, können wir den Fluss von  $\underline{V}$  durch  $\mathcal{F}$  definieren:

$$\int_{\mathcal{F}} d\underline{f} \cdot \underline{V} = \int_{\mathcal{F}} df \underline{n} \cdot \underline{V}. \quad (13.3.5)$$

Für eine geschlossene Fläche, z.B. eine Kugelschale, schreibt man wieder

$$\oint_{\mathcal{F}} d\underline{f} \cdot \underline{V}. \quad (13.3.6)$$

### Volumenintegral einer skalaren Funktion $F$ über ein Volumen $V$

Das Volumenintegral einer skalaren Funktion ist als Mehrfachintegral

$$\int_V d^3r F(\underline{r}) \quad (13.3.7)$$

mit dem Volumenelement  $dV = d^3r$  definiert. In kartesischen Koordinaten ist  $d^3r = dx dy dz$ .

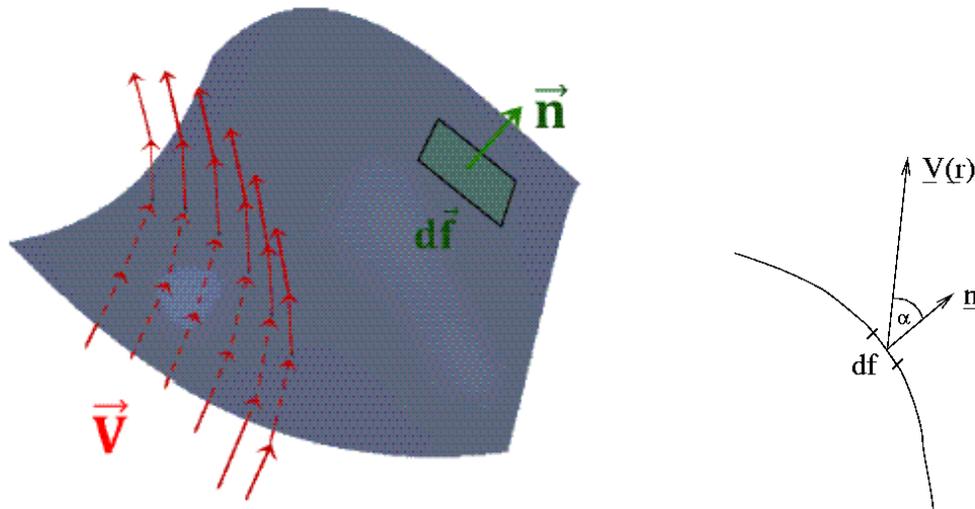


Abbildung 13.3.2: Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche.

### 13.3.2 Die Sätze von Gauß und Stokes

#### Gradientenfelder:

Für Gradientenfelder sind die Wegintegrale wegunabhängig, d.h. für jeden Weg  $C$  zwischen  $\underline{r}(s_1)$  und  $\underline{r}(s_2)$  gilt

$$\int_C d\underline{l} \cdot \nabla F = F(\underline{r}(s_2)) - F(\underline{r}(s_1)). \quad (13.3.8)$$

Dies ist offensichtlich analog zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung(13.3.1): Ein eindimensionales Integral wird auf die Differenz von zwei Funktionswerten, also ein 0-dimensionales Objekt, reduziert.

Speziell für geschlossene Wege gilt daher

$$\oint_C d\underline{l} \cdot \nabla F = 0. \quad (13.3.9)$$

#### Satz von Stokes:

Wir betrachten nun eine endliche Fläche  $\mathcal{F}$ . Deren Rand ist dann ein geschlossener Weg  $\partial\mathcal{F}$ . Für jedes Vektorfeld  $\underline{V}$  gilt dann der **Satz von Stokes**:

$$\boxed{\int_{\mathcal{F}} d\underline{f} \cdot (\nabla \times \underline{V}) = \oint_{\partial\mathcal{F}} d\underline{l} \cdot \underline{V},} \quad (13.3.10)$$

d.h. das zweidimensionale Integral über eine Ableitung von  $\underline{V}$  wird auf ein eindimensionales Integral über  $\underline{V}$  reduziert.

**Satz von Gauß:**

Wir betrachten nun ein beschränktes Volumen  $\mathcal{V}$ , dessen Rand daher eine geschlossene Fläche  $\partial\mathcal{V}$  bildet. Für jedes Vektorfeld  $\underline{V}$  gilt dann der **Satz von Gauß**:

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} d^3r \nabla \cdot \underline{V} = \oint_{\partial\mathcal{V}} d\underline{f} \cdot \underline{V}}, \quad (13.3.11)$$

d.h. das dreidimensionale Integral über eine Ableitung von  $\underline{V}$  wird auf ein zweidimensionales Integral über  $\underline{V}$  reduziert.

**13.4 Die Delta-Funktion**

Zur Motivation betrachten wir das Vektorfeld  $\underline{V}(\underline{r}) = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$ , das eine wichtige Rolle in der Elektrodynamik spielt. Man rechnet leicht nach, dass

$$\nabla \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} = 0 \quad \text{für alle } \underline{r} \neq 0. \quad (13.4.1)$$

Wir legen nun eine Vollkugel  $K_R$  vom Radius  $R$  um den Ursprung. Deren Oberfläche  $\partial K_R$  ist dann eine Kugelschale vom Radius  $R$ . Wir können nun den Fluss des Vektorfeldes  $\underline{V}$  durch diese Kugelschale bestimmen:

$$\oint_{\partial K_R} d\underline{f} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} = \int_{\partial K_R} d\Omega R^2 \frac{r^2}{r^4} = \int d\Omega = 4\pi, \quad (13.4.2)$$

wobei wir die Integration in Kugelkoordinaten durchgeführt und  $d\underline{f} = R^2 d\Omega \underline{n}$  und  $\underline{n} = \frac{\underline{r}}{r} = \hat{r}$  benutzt haben. Das Flussintegral ist also unabhängig vom Radius  $R$ ! Dies bedingt wegen (13.4.1) einen (scheinbaren) Widerspruch zum Gauß'schen Satz, denn

$$4\pi = \oint_{\partial K_R} d\underline{f} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} = \int_{K_R} d^3r \nabla \cdot \underline{V} \stackrel{?}{=} 0. \quad (13.4.3)$$

Dies lässt sich aber mit Hilfe der Dirac'schen Deltafunktion auflösen!

**13.4.1 Eindimensionale  $\delta$ -Funktion**

Wir betrachten eine kastenförmige Funktion (Abb. 13.4.1)

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{für } x \in [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (13.4.4)$$

Diese Funktionen sind normiert, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x) dx = 1. \quad (13.4.5)$$

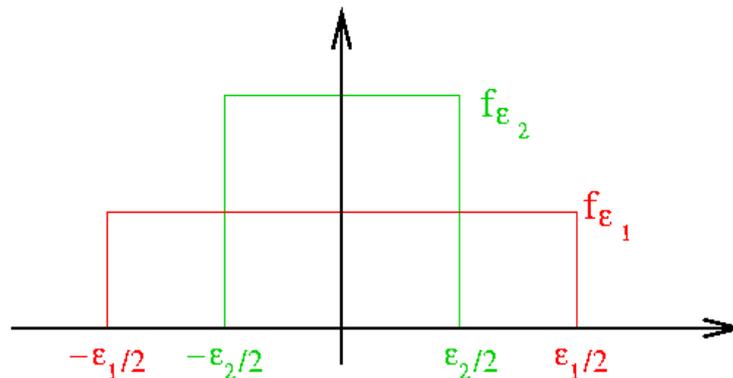


Abbildung 13.4.1: Die Delta-Funktion ist Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  einer Folge von Kastenfunktionen  $f_\epsilon(x)$ .

Für beliebige Funktionen  $g(x)$  gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x)g(x)dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} g(x)dx, \quad (13.4.6)$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x - x_0)g(x)dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0 - \epsilon/2}^{x_0 + \epsilon/2} g(x)dx, \quad (13.4.7)$$

wobei das letzte Integral als Mittelwert von  $g$  über das Intervall  $[x_0 - \epsilon/2, x_0 + \epsilon/2]$  interpretiert werden kann. Es gilt daher

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x - x_0)g(x)dx = g(x_0), \quad (13.4.8)$$

Wir definieren nun die **Delta-Funktion** durch

$$\delta(x - x_0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x - x_0), \quad (13.4.9)$$

die eigentlich gar keine Funktion ist, da formal

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & (x \neq x_0) \\ \infty & (x = x_0) \end{cases}. \quad (13.4.10)$$

Es handelt sich um eine verallgemeinerte Funktion oder **Distribution**, die durch ihre Wirkung auf eine Testfunktion  $g(x)$  definiert ist:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)g(x)dx = g(x_0)} \quad (13.4.11)$$

für jedes  $x_0$  und jede Funktion  $g(x)$ .

Alternativ kann man die Delta-Funktion über jede beliebige Folge von Funktionen  $f_\epsilon(x)$  mit den Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x) dx = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = 0 \quad (\text{für } x \neq 0) \quad (13.4.12)$$

definieren. In den Übungen werden wir hierzu weitere Beispiele kennenlernen.

### 13.4.2 Dreidimensionale $\delta$ -Funktion

Die dreidimensionale Delta-Funktion ist durch

$$\delta(\underline{r}) := \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (13.4.13)$$

gegeben<sup>2</sup>. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \delta(\underline{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y) \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(z) = 1 \quad (13.4.14)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3r \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) g(\underline{r}) = g(\underline{r}_0) \quad (13.4.15)$$

Mit Hilfe der Delta-Funktion kann nun der ‘‘Widerspruch’’ (13.4.3) aufgelöst werden:

$$\nabla \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} = 4\pi\delta(\underline{r}), \quad (13.4.16)$$

d.h. die Delta-Funktion entsteht in drei Dimensionen durch die Ableitung einer relativ harmlosen Funktion. Dies gilt aber nicht im eindimensionalen Fall!

---

<sup>2</sup>Man beachte, dass allgemeine Produkte von Delta-Funktionen nicht definiert sind!



# Kapitel 14

## Elektrostatik

### 14.1 Das Coulomb-Gesetz

Das **Coulomb-Gesetz** beschreibt die Kraft  $\underline{F}_{12}$  zwischen zwei Punktladungen  $q_1, q_2$  an den Orten  $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ :

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^2} \cdot \frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|}. \quad (14.1.1)$$

Es handelt sich also um eine Zentralkraft mit der gleichen Abstandsabhängigkeit ( $\propto 1/r^2$ ) wie bei der Gravitationskraft. Allerdings können die Ladungen unterschiedliche Vorzeichen haben, im Gegensatz zu Massen. Daher ist die Coulombkraft attraktiv für  $q_1 q_2 < 0$  und repulsiv für  $q_1 q_2 > 0$ .

Die Konstante  $k$  in (14.1.1) hängt von der Wahl der Ladungseinheit ab. Es gibt zwei wichtige Einheitensysteme:

- Das gesetzliche **SI-System** (oder **MKSA-System**) ist in der Experimentalphysik gebräuchlich. Die Ladungseinheit ist hier das **Coulomb C**. Sie wird aus der Stromeinheit Ampère (A) abgeleitet:  $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$ . Das Ampère wiederum wird über die Kraftwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen parallelen Drähten definiert. Im SI-System ist die Konstante  $k$  daher durch

$$k_{SI} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 \text{NA}^{-2} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{C}^{-2} \quad (14.1.2)$$

gegeben, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

- Im **Gauß-** oder **cgs-System**, das in der Theoretischen Physik bevorzugt wird, erhält die Ladung keine eigene Einheit. Stattdessen wird sie durch die Wahl

$$k_{cgs} = 1 \quad (14.1.3)$$

definiert. Die Ladungseinheit wird dann als **electrostatic unit (esu)** bezeichnet:

$$1 \text{ esu} = 1(\text{cm})^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}. \quad (14.1.4)$$

Die Umrechnung zum SI-System erfolgt über

$$1 \text{ esu} = 10c^{-1} \text{ cmA} \approx 3.3 \cdot 10^{-10} \text{ C} \quad (14.1.5)$$

und die Elementarladung hat den Wert

$$\begin{aligned} e &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ &= 4.803 \cdot 10^{-10} \text{ cm} . \end{aligned} \quad (14.1.6)$$

Der große Vorteil des Gauß'schen Systems liegt darin, dass elektrische Felder  $\underline{E}$  und magnetische Felder  $\underline{B}$  die gleiche Einheit haben<sup>1</sup>. Dies trägt der Äquivalenz von elektrischen und magnetischen Feldern Rechnung, die wir später im Rahmen der Relativitätstheorie erkennen werden.

Da Gravitations- und Coulomb-Gesetz die gleiche Struktur haben, können wir ihre Stärken über typische Massen und Ladungen direkt vergleichen. Betrachten wir z.B. die Wechselwirkung eines Protons mit einem Elektron, so erhalten wir

$$\frac{|\underline{F}_{\text{Coulomb}}|}{|\underline{F}_{\text{grav}}|} \approx 2 \cdot 10^{39} . \quad (14.1.7)$$

In diesem Sinne ist also die elektromagnetische Wechselwirkung viel stärker und wir können Gravitationseffekte z.B. in der Atom- und Festkörperphysik vernachlässigen. Auf großen Skalen (z.B. in der Astronomie) sieht dies aber anders aus! Hier dominiert die Gravitation, da makroskopische Körper weitgehend ladungsneutral sind.

## 14.2 Das elektrische Feld

Wir betrachten  $N$  Punktladungen  $q_1, \dots, q_N$  an den (festen) Orten  $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N$  und fragen nach der Kraft auf eine weitere Ladung  $q$  am Ort  $\underline{r}$ , die **Probeladung**. Auf Grund des Superpositionsprinzips für Kräfte gilt dann

$$\underline{F}(\underline{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i) . \quad (14.2.1)$$

Die Beziehung

$$\boxed{\underline{F}(\underline{r}) = q\underline{E}(\underline{r})} \quad (14.2.2)$$

definiert dann das von den Punktladungen  $q_1, \dots, q_N$  erzeugte **elektrische Feld**

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i)} \quad (14.2.3)$$

<sup>1</sup>Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir in erster Linie das cgs-System verwenden. Alle grundlegenden Gleichungen werden aber auch in ihrer SI-Form angegeben.

über die auf die Probeladung  $q$  wirkende Kraft. Wir nehmen hierbei an, dass  $q$  sehr klein ist und die anderen Ladungen daher nicht beeinflusst.

Der **Feldbegriff** ist ein wichtiges neues Konzept im Vergleich zur Newton'schen Mechanik. Dort fasst man die Kräfte zwischen Körpern als Fernwirkungen auf, auf deren physikalische Hintergründe nicht weiter eingegangen wird. In der Elektrodynamik ist aber das die elektromagnetischen Wechselwirkungen vermittelnde Feld ein eigenständiges physikalisches Objekt. Kräfte werden dabei als Nahwirkungen des Feldes am des betrachteten Körpers aufgefasst.

Wir gehen nun von Punktladungen zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen  $\rho(\underline{r})$  über. Ein infinitesimales Volumenelement  $dV$  am Ort  $\underline{r}$  enthält die infinitesimale Ladung  $\rho(\underline{r})dV$  und das elektrische Feld am Ort  $\underline{r}$  ergibt sich durch den entsprechenden Grenzübergang in (14.2.3) zu

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}') \quad (14.2.4)$$

Im SI-System hat man

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}'). \quad (14.2.5)$$

Betrachten wir speziell ein System aus Punktladungen, d.h. die Ladungsdichte

$$\rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\underline{r} - \underline{r}_i), \quad (14.2.6)$$

so erhält man wieder die Beziehung (14.2.3).

### 14.3 Das elektrostatische Potential

Die Coulombkraft ist eine Zentralkraft und daher konservativ. Somit existiert ein Potential  $V_{12}$  mit  $\underline{F}_{12} = -\nabla V_{12}$ :

$$V_{12}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}. \quad (14.3.1)$$

Hiermit können wir (14.2.4) umschreiben:

$$\underline{E}(\underline{r}) = - \int d^3r' \nabla_{\underline{r}} \left( \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) = -\nabla_{\underline{r}} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} =: -\nabla\phi(\underline{r}) \quad (14.3.2)$$

wobei der Nabla-Operator nur auf  $\underline{r}$  wirkt und daher vor das Integral gezogen werden kann.  $\phi(\underline{r})$  ist das **elektrostatische Potential**:

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}. \quad (14.3.3)$$

Im SI-System gilt

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}. \quad (14.3.4)$$

Die potentielle Energie einer Probeladung  $q$  am Ort  $\underline{r}$  ist

$$V(\underline{r}) = q\phi(\underline{r}), \quad (14.3.5)$$

womit klar wird, warum  $\phi$  als ‘‘Potential’’ bezeichnet wird.

## 14.4 Die Feldgleichungen der Elektrostatik

Das elektrische Feld  $\underline{E}$  bzw. das Potential  $\phi$  sind im Prinzip durch Integration aus der Ladungsverteilung bestimmbar. Manchmal ist es aber einfacher, sie mit Hilfe einer (partiellen) Differentialgleichung zu berechnen. Diese wollen wir im Folgenden ableiten. Dazu erinnern wir uns zunächst an den **Helmholtz’schen Fundamentalsatz** der Vektoranalysis:

Jedes Vektorfeld  $\underline{V}(\underline{r})$  ist durch Angabe seiner Wirbel  $\nabla \times \underline{V} = \text{rot } \underline{V}$  und seiner Quellen  $\nabla \cdot \underline{V} = \text{div } \underline{V}$  eindeutig festgelegt.

Damit ist das elektrische Feld  $\underline{E}$  vollständig durch Ausdrücke für  $\nabla \times \underline{E}$  und  $\nabla \cdot \underline{E}$  charakterisiert. In der Elektrostatik ist  $\underline{E}$  konservativ und somit

$$\boxed{\nabla \times \underline{E} = 0.} \quad (14.4.1)$$

Wir müssen daher nur noch  $\nabla \cdot \underline{E}$  bestimmen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{E} &= \int d^3r' \rho(\underline{r}') \nabla \cdot \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \\ &= \int d^3r' \rho(\underline{r}') 4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}') = 4\pi \rho(\underline{r}), \end{aligned} \quad (14.4.2)$$

wobei wir (13.4.16) benutzt haben.

Wir erhalten so als Feldgleichung für das elektrische Feld das **Gauß’sche Gesetz** (in differentieller Form)

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho} \quad (14.4.3)$$

Da  $\underline{E} = -\nabla\phi$  erfüllt das elektrostatische Potential die **Poisson-Gleichung**

$$\boxed{\nabla^2\phi = -4\pi\rho} \quad (14.4.4)$$

Im SI-System gilt  $\nabla \cdot \underline{E} = -\nabla^2\phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$ .

Als Anwendung des Gauß’sches Gesetzes berechnen wir das Feld einer homogen geladenen Kugel vom Radius  $R$ . Die Ladungsdichte ist

$$\rho(\underline{r}) = \begin{cases} \rho_0 & (|\underline{r}| < R) \\ 0 & (|\underline{r}| \geq R) \end{cases} \quad (14.4.5)$$

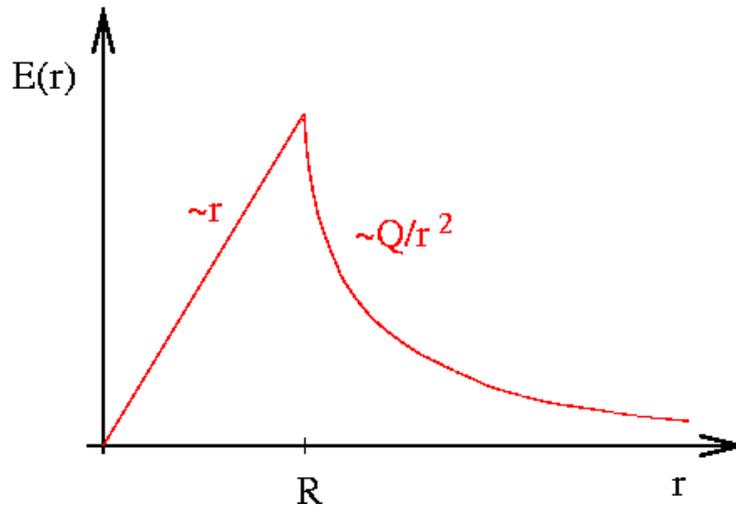


Abbildung 14.4.1: Betrag des elektrisches Feldes einer homogen geladenen Kugel vom Radius  $R$  und Gesamtladung  $Q$ .

Durch Kombination von Gauß'schem Gesetz und auß'schem Satz erhalten wir zunächst ganz allgemein

$$\int_V d^3r \rho(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r \nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}. \quad (14.4.6)$$

Wir integrieren nun speziell über eine Kugel  $K_r$  vom Radius  $r$  um den Ursprung. Dann gilt

$$\int_{K_r} d^3r \rho(\underline{r}) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 & (r < R) \\ \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 =: Q & (r \geq R) \end{cases}, \quad (14.4.7)$$

wobei  $Q$  die Gesamtladung der Kugel ist.

Den Fluss von  $\underline{E}$  durch  $\partial K_r$  können wir mittels eines Symmetriearguments leicht bestimmen.

- Die Ladungsverteilung  $\rho(\underline{r})$  ist radialsymmetrisch:  $\rho(\underline{r}) = \rho(r)$ .
- Aus der Poisson-Gleichung folgt, dass auch das Potential radialsymmetrisch ist:  $\phi(\underline{r}) = \phi(r)$ .
- Somit zeigt das elektrische Feld  $\underline{E} = -\nabla\phi$  als Gradient einer radialsymmetrischen Funktion in radiale Richtung.

Das elektrische Feld hat also die Form  $\underline{E}(\underline{r}) = E(r)\hat{r}$ .

Nun können wir das Flussintegral bestimmen. Das Flächenelement der Kugeloberfläche zeigt radial nach aussen:  $d\underline{f} = \hat{r}df$  und daher

$$\oint_{\partial K_r} d\underline{f} \cdot \underline{E} = \int_{\partial K_r} df E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} = E(r) \int_{\partial K_r} df = 4\pi r^2 E(r). \quad (14.4.8)$$

Dabei haben wir benutzt, dass  $E(r)$  auf der Kugeloberfläche konstant ist. Somit erhalten wir für das elektrische Feld

$$E(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\rho_0 r & (r < R) \\ \frac{Q}{r^2} & (r \geq R) \end{cases}. \quad (14.4.9)$$

Das Feld außerhalb der Kugel ist also identisch dem einer Punktladung im Mittelpunkt, deren Ladung  $Q$  gleich der Gesamtladung der Kugel ist.

## 14.5 Elektrostatische Energie

In Analogie zur Mechanik definiert man die potentielle Energie von  $N$  Punktladungen, die über die Coulombkraft miteinander wechselwirken, durch

$$V = \sum_{i,j (i < j)} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i,j (i \neq j)} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}. \quad (14.5.1)$$

Beim Übergang zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung wird hieraus

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int d^3 r \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(\underline{r}) \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(\underline{r})\phi(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r (\nabla \cdot \underline{E})\phi \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3 r \underline{E} \cdot \nabla \phi \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3 r |\underline{E}|^2. \end{aligned} \quad (14.5.2)$$

Dabei haben wir zunächst ausgenutzt, dass die Einschränkung  $\underline{r} \neq \underline{r}'$  im Integral nicht nötig ist. Danach wurden die Identitäten (14.3.3) und (14.4.3) verwendet und schließlich partiell integriert, wobei angenommen wurde, dass Potentiale und Felder im Unendlichen verschwinden.

Wir definieren daher die **Energiedichte des elektrostatischen Feldes** als

$$\boxed{u(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi} |\underline{E}(\underline{r})|^2} \quad (14.5.3)$$

bzw. im SI-System durch

$$u(\underline{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} |\underline{E}(\underline{r})|^2. \quad (14.5.4)$$

Die oben abgeleiteten unterschiedlichen Ausdrücke für die Energie entsprechen verschiedenen Standpunkten:

- In der Form  $V = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(\underline{r})\phi(\underline{r})$  wird die Energie, wie in der Mechanik, der Wechselwirkung zwischen den Teilchen zugeordnet.

- Die Form  $V = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\underline{r})\phi(\underline{r})$  kann als potentielle Energie der Ladungsverteilung  $\rho(\underline{r})$  im Potential  $\phi(\underline{r})$  interpretiert werden. Dabei berücksichtigt der Faktor  $\frac{1}{2}$ , dass es sich um das von der Ladungsverteilung selbst erzeugte Potential handelt. Handelt es sich um ein äußeres Potential, so fehlt dieser Faktor.
- Im Ausdruck  $V = \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\underline{E}|^2$  wird die Energie ganz dem (von  $\rho$  erzeugten) elektrischen Feld zugeordnet.

Bei den Interpretationen ist noch zu beachten, dass sich die auftretenden Volumenintegrale i.a. über verschiedenen Bereiche erstrecken. Bei räumlich beschränkten Ladungsverteilungen ist in der zweiten Form nur über diesen Bereich zu integrieren, während in der letzten Form immer über den ganzen Raum integriert wird.

Als Beispiel wollen wir die elektrostatische Energie einer homogen geladenen Kugel vom Radius  $R$  und der Gesamtladung  $Q$  bestimmen. Aus Dimensionsgründen erwarten wir, dass  $V \sim \frac{Q^2}{R}$  gilt. Die exakte Rechnung liefert wegen

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi} E^2(\underline{r}) = \frac{Q^2}{8\pi} \begin{cases} r^2/R^6 & (r < R) \\ 1/r^4 & (r \geq R) \end{cases} \quad (14.5.5)$$

und somit

$$V = \int u(\underline{r}) d^3r = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}. \quad (14.5.6)$$

Bei fester Gesamtladung  $Q$  divergiert  $V$  für  $R \rightarrow 0$ . Eine Punktladung hätte daher eine unendliche Energie. Ähnliche Divergenzen sind die Quelle vieler mathematischer und konzeptioneller Probleme in Feldtheorien und eine Motivation für die Stringtheorie, in der es keine Punktteilchen gibt.

Man kann einen **klassischen Elektronenradius**  $R_e$  definieren, indem man die Feldenergie mit der Ruheenergie  $m_e c^2$  des Elektrons identifiziert. Dies führt auf

$$R_e = \frac{3}{5} \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 1.7 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (14.5.7)$$

Experimentell erweist sich das Elektron aber (bisher) als punktförmig. Allerdings werden ab dem **Compton-Radius**

$$R_c = \frac{\hbar}{m_e c} \approx 4 \cdot 10^{-13} \text{ m} \quad (14.5.8)$$

quantenmechanische Effekte relevant und das Elektron wird durch Welleneffekte "unscharf".

## 14.6 Multipol-Entwicklung

Wir wollen nun das elektrostatische Potential (14.3.3) für beliebige beschränkte Ladungsverteilungen *näherungsweise* im sog. **Fernfeld** berechnen. Dazu betrachten wir Ladungsverteilungen endlicher Ausdehnung, d.h.  $\rho(\underline{r}) = 0$  für alle  $|\underline{r}| > R_0$ , wobei der Ursprung im Inneren der Verteilung liegen soll. Das Fernfeld bezeichnet dann den Bereich, in dem  $|\underline{r}| \gg R_0$  ist. Im Integranden ist dann auch  $|\underline{r}| \gg |\underline{r}'|$ , was zur Vereinfachung genutzt werden kann.

### 14.6.1 Herleitung

Wir entwickeln zunächst die Abstandsfunktion im Integranden

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\underline{r} \cdot \underline{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} \quad (14.6.1)$$

unter den Bedingungen  $|\underline{r} \cdot \underline{r}'| \ll r^2$  und  $\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \ll 1$  mit Hilfe der Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad (14.6.2)$$

wobei  $x = -2\frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} &= \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2} \right)^2 + \mathcal{O}(x^3) \right] \\ &\approx \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2} + \frac{3(\underline{r} \cdot \underline{r}')^2 - (rr')^2}{2r^4} \right], \end{aligned} \quad (14.6.3)$$

wobei wir zunächst die Klammern aufgelöst und dann nach Potenzen von  $1/r^2$  sortiert haben. Damit erhalten wir für das elektrostatische Potential

$$\begin{aligned} \phi(\underline{r}) &\approx \frac{1}{r} \left[ \int d^3r' \rho(\underline{r}') + \frac{\underline{r}}{r^2} \int d^3r' \rho(\underline{r}') \underline{r}' + \frac{1}{2r^4} \int d^3r' \rho(\underline{r}') [3(\underline{r} \cdot \underline{r}')^2 - (rr')^2] \right] \\ &= \frac{q}{r} + \frac{\underline{d} \cdot \underline{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} x_i x_j \end{aligned} \quad (14.6.4)$$

mit  $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$ , der Gesamtladung

$$q = \int d^3r' \rho(\underline{r}'), \quad (14.6.5)$$

dem **Dipolmoment**

$$\underline{d} = \int d^3r \rho(\underline{r}) \underline{r} \quad (14.6.6)$$

und dem **Quadrupoltensor**

$$Q_{ij} = \int d^3r \rho(\underline{r}) [3x_i x_j - |\underline{r}|^2 \delta_{ij}]. \quad (14.6.7)$$

Der Quadrupolbeitrag zum elektrostatischen Potential (14.6.4) ist also eine quadratische Form, die durch die Matrix  $(Q_{ij})$  definiert ist.

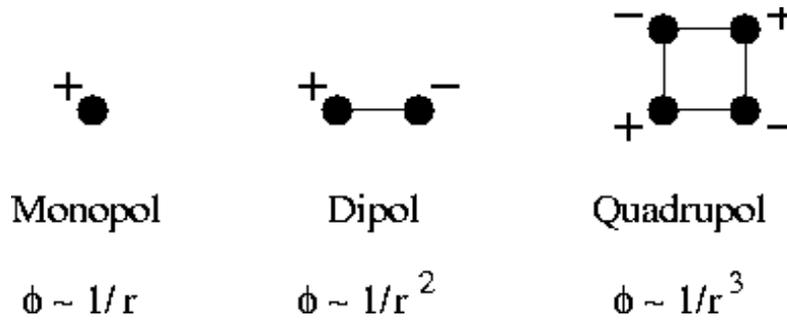


Abbildung 14.6.1: Systeme aus Punktladungen und ihre Multipolelemente.

Die Darstellung (14.6.4) hat den wesentlichen Vorteil, dass die kontinuierliche Ladungsverteilung  $\rho(\underline{r})$  durch wenige **Multipolmomente**  $q$ ,  $\underline{d}$ ,  $\underline{Q}$  ersetzt wird. Deren Beiträge zum elektrostatischen Potential fallen mit zunehmender Ordnung der Momente immer schneller ab:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Monopolbeitrag} & \frac{q}{r} \sim \frac{1}{r} \\
 \text{Dipolbeitrag} & \frac{\underline{d} \cdot \underline{r}}{r^2} \sim \frac{1}{r^2} \\
 \text{Quadrupolbeitrag} & \sim \frac{1}{r^3}.
 \end{array} \quad (14.6.8)$$

Die Multipolentwicklung lässt sich systematisch verbessern. (14.6.4) gilt bis auf Korrekturen der Ordnung  $\left(\frac{R_0}{r}\right)^4$ .

Für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen gibt es nur einen Multipolbeitrag, die höheren Ordnungen verschwinden exakt. Ihr Feld erscheint daher in großen Entfernungen als das einer Punktladung, die die gesamte Ladung der Verteilung in sich vereinigt.

## 14.6.2 Abhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems

Die Multipolmomente hängen i.a. von der Wahl des Koordinatensystems ab. Eine Verschiebung

$$\underline{r} \rightarrow \tilde{\underline{r}} = \underline{r} - \underline{r}_0 \quad (14.6.9)$$

des Ursprungs lässt zwar die Gesamtladung  $q$  unverändert, das Dipolmoment wird jedoch transformiert:

$$\begin{aligned}
 \underline{d} &\rightarrow \tilde{\underline{d}} = \int d^3\tilde{r} \tilde{\underline{r}} \rho(\tilde{\underline{r}}) - \underline{r}_0 \int d^3\tilde{r} \rho(\tilde{\underline{r}}) \\
 &= \underline{d} - q\underline{r}_0.
 \end{aligned} \quad (14.6.10)$$

Dies hat verschiedene Konsequenzen:

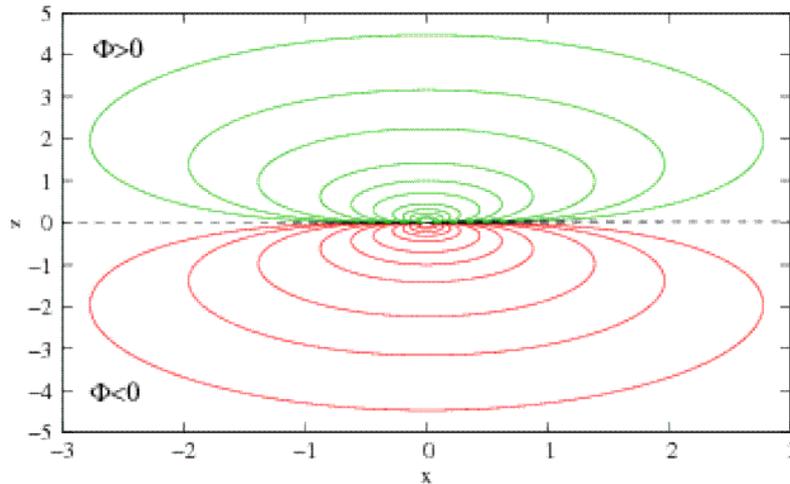


Abbildung 14.6.2: Äquipotentiallinien eines Punktdipols im Ursprung, dessen Dipolmoment entlang der  $z$ -Achse ausgerichtet ist. Das Dipolmoment  $\underline{d}$  ist entlang der  $z$ -Achse ausgerichtet, so dass  $\phi_{\text{dip}} > 0$  im oberen Halbraum ( $z > 0$ ) und  $\phi_{\text{dip}} < 0$  im unteren Halbraum ( $z < 0$ ). (aus [5])

- Für  $q \neq 0$  kann das Dipolmoment zum Verschwinden gebracht werden, indem der Koordinatenursprung in den Ladungsschwerpunkt gelegt wird, d.h. durch die Wahl  $\underline{r}_0 = \frac{\underline{d}}{q}$ . Der Ladungsschwerpunkt ist dabei analog zum Massenschwerpunkt definiert. Diese Analogie impliziert, dass Massenverteilungen (wie die der Erde) kein Dipolmoment besitzen. Die führende Abweichung vom Feld einer Punktmasse ist daher der Quadrupolbeitrag.
- Für  $q = 0$  ist  $\underline{d}$  unabhängig von der Wahl des Ursprungs, also ein invariantes Merkmal der Ladungsverteilung. Ein Beispiel hierfür sind die Dipolmomente von neutralen, polaren Molekülen wie  $\text{H}_2\text{O}$ . Allgemein gilt, dass das niedrigste nichtverschwindende Multipolmoment unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist, also z.B.  $\underline{Q}$  für  $q = 0$ ,  $\underline{d} = 0$ .

### 14.6.3 Punktdipol

Der erste Term in der Multipolentwicklung (14.6.4) entspricht dem Potential einer Punktladung. Das Fernfeld jeder Ladungsverteilung mit  $q \neq 0$  sieht daher in führender Ordnung wie eine Punktladung aus. Welche Ladungsverteilungen erzeugen die anderen Terme “in Reinform”? Dazu betrachten wir den Fall des **Dipolpotentials**

$$\phi_{\text{dip}}(\underline{r}) = \frac{\underline{d} \cdot \underline{r}}{r^3}, \quad (14.6.11)$$

dessen Äquipotentiallinien in Abb. 14.6.2 dargestellt sind. Die zugehörige Ladungsverteilung

lässt sich im Prinzip aus der Poisson-Gleichung (14.4.4) bestimmen.

$$\rho_{\text{dip}}(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \phi_{\text{dip}} = \dots = -\underline{d} \cdot \nabla \delta(\underline{r}), \quad (14.6.12)$$

wie wir in den Übungen zeigen werden<sup>2</sup>. Diese Ladungsverteilung entspricht einem **Punktdipol**, den man durch folgenden Grenzprozess erhält: Zwei Ladungen  $\pm q$  werden im Abstand  $a$  symmetrisch z.B. auf der  $z$ -Achse positioniert, also bei  $(0, 0, -a/2)$  und  $(0, 0, a/2)$ . Dann führt man den Grenzübergang  $a \rightarrow 0$  aus, wobei man das Dipolmoment  $d = qa$  konstant hält.

Als Anwendung bestimmen wir die Energie eines Punktdipols in einem äußeren elektrischen Feld. Wir betrachten zunächst ein System aus Punktladungen  $q_i$  in einem äußeren elektrischen Potential  $\phi_{\text{ext}}$ . Die potentielle Energie ist dann durch

$$V_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N q_i \phi_{\text{ext}}(\underline{r}_i) \quad (14.6.13)$$

gegeben. Dabei wurde die ‘‘Selbstergie’’ durch Wechselwirkungen der Ladungen untereinander vernachlässigt. Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ergibt sich

$$\begin{aligned} V_{\text{ext}} &= \int d^3r \rho(\underline{r}) \phi_{\text{ext}}(\underline{r}) = - \int d^3r \phi_{\text{ext}}(\underline{r}) (\underline{d} \cdot \nabla \delta(\underline{r})) = \int d^3r \delta(\underline{r}) (\underline{d} \cdot \nabla \phi_{\text{ext}}(\underline{r})) \\ &= -\underline{d} \cdot \underline{E}_{\text{ext}}(\underline{r} = 0), \end{aligned} \quad (14.6.14)$$

wobei wir zunächst (14.6.11) benutzt haben und dann partiell integriert. Die potentielle Energie wird also durch die Stärke des elektrischen Feldes am Ort  $\underline{r} = 0$  des Dipols bestimmt. Sie wird minimal, wenn das Dipolmoment parallel zum Feld steht, der Dipol wird also vom Feld ausgerichtet.

## 14.7 Metallische Randbedingungen

In einem metallischen Leiter gibt es frei bewegliche Ladungen. Diese verschieben sich unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes. In einer statischen (d.h. zeitunabhängigen) Situation kann es daher keine elektrischen Felder im Inneren des Leiters geben, da sich die Ladungen so lange verschieben, bis das Feld überall verschwindet:

$$\boxed{\underline{E} = 0 \quad \text{im Inneren von Leitern.}} \quad (14.7.1)$$

Somit ist dort das Potential  $\phi$  konstant. Insbesondere sind die Oberflächen eines Leiters Äquipotentialflächen. Alternativ kann man für (14.7.1) eine energetische Begründung geben: die beweglichen Ladungen ordnen sich so an, dass die Energie  $\frac{1}{8\pi} \int |\underline{E}|^2 d^3r$  minimal wird. Das ist für  $\underline{E} = 0$  der Fall.

Wir betrachten zwei Beispiele:

<sup>2</sup>Die Ableitung der Delta-Funktion ist durch  $\int dx f(x) \delta'(x - x_0) = -f'(x_0)$  definiert.

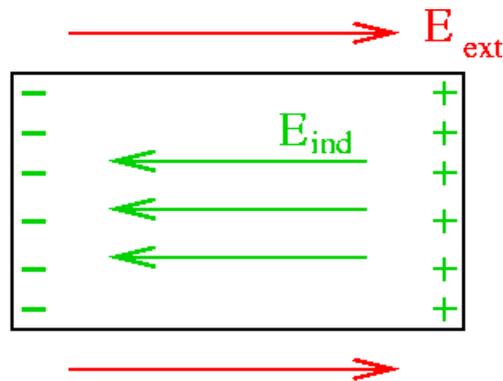


Abbildung 14.7.1: Ein neutraler metallischer Körper in einem äußeren elektrischen Feld.

- Bei einem neutralen metallischen Körper in einem äußeren elektrischen Feld  $\underline{E}_{\text{ext}}$  (siehe Abb. 14.7.1) sammeln sich die freien Ladungen an den Oberflächen. Dadurch entsteht im Leiter ein induziertes elektrisches Feld  $\underline{E}_{\text{ind}}$  bis es  $\underline{E}_{\text{ext}}$  kompensiert:

$$\underline{E}_{\text{ind}} = -\underline{E}_{\text{ext}}. \quad (14.7.2)$$

Im Inneren des Leiters ist dann

$$\underline{E} = \underline{E}_{\text{ext}} + \underline{E}_{\text{ind}} = 0. \quad (14.7.3)$$

- Bei einer metallischen Kugel mit der Gesamtladung  $Q$  wird die Energie  $V$  minimiert, wenn sich die Ladungen an der Oberfläche befinden. Dies kann man sich leicht durch Verallgemeinerung des Beispiels in Kap. 14.5 auf beliebige kugelsymmetrische Ladungsverteilungen klar machen. Die Energie ist dann

$$V = \frac{Q^2}{2R} \quad (14.7.4)$$

was z.B. kleiner ist als die Energie  $V = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{2R}$  einer homogenen Verteilung.

Wie sehen die Randbedingungen für das elektrische Feld an der Grenzfläche zwischen Außenraum und Leiter aus, wenn im Außenraum ein elektrisches Feld existiert und im Inneren des Leiters verschwindet? Die Orientierung der Grenzfläche können wir mit Hilfe des Flächennormalenvektors  $\underline{n}$  und des Tangentialvektors  $\underline{\tau}$  charakterisieren. Wir unterscheiden daher Randbedingungen an die Tangentialkomponente  $\underline{\tau} \cdot \underline{E}$  und die Normalkomponente  $\underline{n} \cdot \underline{E}$  des elektrischen Feldes. Da die Oberfläche eine Äquipotentialfläche ( $\phi = \text{const.}$ ) ist, steht das elektrische Feld  $\underline{E} = -\nabla\phi$  senkrecht auf der Leiteroberfläche (Abb. 14.7.2). Somit ist

$$\underline{\tau} \cdot \underline{E}|_{\text{Oberfläche}} = 0. \quad (14.7.5)$$

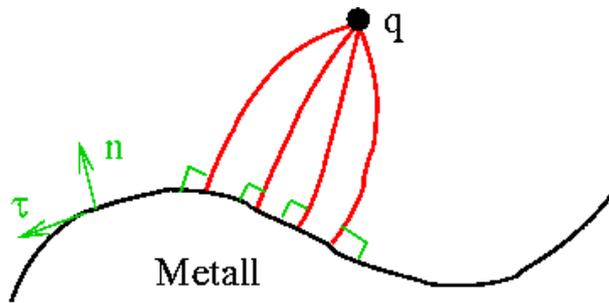


Abbildung 14.7.2: Feldlinien einer Punktladung in der Nähe einer Leiteroberfläche.

Wir leiten diese Aussage nun aus der Betrachtung des allgemeinen Falles einer Grenzfläche zwischen zwei Bereichen mit den elektrischen Feldern  $\underline{E}_1$  und  $\underline{E}_2$  her. Der Fall einer metallischen Oberfläche ist darin über  $\underline{E}_1 = 0$  enthalten.

- **Tangentialbedingung:** Wir betrachten einen geschlossenen Weg wie in Abb. 14.7.3 (links), der die Grenzfläche umschließt. Die Länge tangential zur Oberfläche sei  $l$ , die Dicke (senkrecht zur Oberfläche)  $d$  mit  $d \ll l$ . Bezeichnet man die vom Weg eingeschlossene Fläche mit  $A$ , so gilt nach dem Stokes'schen Satz

$$0 = \int_A d\underline{f} \cdot (\nabla \times \underline{E}) = \oint_{\partial A} d\underline{l} \cdot \underline{E}. \quad (14.7.6)$$

da in der Elektrostatik  $\nabla \times \underline{E} = 0$  (siehe (14.4.1)). Für  $d \rightarrow 0$  tragen nur die tangentialen Stücke bei:

$$0 = \oint_{\partial A} d\underline{l} \cdot \underline{E} = l\underline{\tau} \cdot \underline{E}_2 - l\underline{\tau} \cdot \underline{E}_1 = l\underline{\tau} \cdot (\underline{E}_2 - \underline{E}_1). \quad (14.7.7)$$

Somit ist die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche stetig:

$$\underline{\tau} \cdot \underline{E}_2 = \underline{\tau} \cdot \underline{E}_1 \quad (14.7.8)$$

und speziell an der Oberfläche eines Leiters gilt  $\underline{\tau} \cdot \underline{E} = 0$ , d.h. die Feldlinien stehen senkrecht auf der Leiteroberfläche.

- **Tangentialbedingung:** Wir betrachten das hutschachtelförmige Integrationsvolumen  $V$  in Abb. 14.7.3 (rechts). Nach dem Gauß'schen Gesetz gilt für die Ladung  $q$  in  $V$

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E} \quad (14.7.9)$$

wobei wir den Gauß'schen Satz angewendet haben. Für  $d \rightarrow 0$  tragen nur Deckel und Boden des Volumens bei, deren Fläche jeweils  $A$  sei:

$$4\pi q = \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E} = A\underline{n} \cdot (\underline{E}_2 - \underline{E}_1). \quad (14.7.10)$$

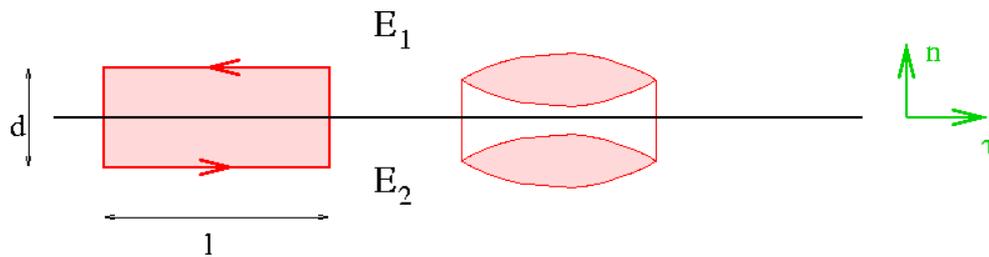


Abbildung 14.7.3: Zur Herleitung der Randbedingungen für ein elektrostatisches Feld. Die linke Skizze zeigt den Integrationsbereich für die tangentielle Bedingung, der rechte den für die normale Bedingung.

Damit springt die Normalkomponente des elektrischen Feldes um den Betrag  $4\pi\sigma$  mit der **Oberflächenladungsdichte**

$$\sigma = \frac{q}{A}. \quad (14.7.11)$$

Somit gilt an der Oberfläche eines Leiters

$$\underline{E} \cdot \underline{n}|_{\text{Leiter}} = 4\pi\sigma, \quad (14.7.12)$$

d.h. das elektrische Feld  $\underline{E}$  induziert die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma|_{\text{Leiter}} = \frac{1}{4\pi} \underline{E} \cdot \underline{n}. \quad (14.7.13)$$

# Kapitel 15

## Magnetostatik

Magnetische Phänomene sind seit langem bekannt. Hier wollen wir uns vor allem mit der magnetischen Wirkung von elektrischen Strömen beschäftigen, einer vergleichsweise jungen Entdeckung. Historisch waren folgende Erkenntnisse für die Entwicklung der Magnetostatik von Bedeutung:

- Permanentmagnete wurden in Form von magnetischen Mineralien z.B. in der Nähe der Stadt Magnesia in der heutigen Türkei gefunden. Eine der ersten wissenschaftliche Untersuchungen von Permanentmagneten stammt von Petrus Peregrinus, der bereits 1269 darauf hinwies, dass es keine isolierten magnetischen Pole (Monopole) gibt.
- Erdmagnetfeld: Die Existenz des Erdmagnetfeldes war spätestens seit der Erfindung des Kompass (im 11. Jh. in China) bekannt. William Gilbert stellte dann 1600 eine Analogie zwischen dem Erdmagnetfeld und dem Feld von Permanentmagneten her, die einen großen Einfluss auf Kepler's Vorstellung von der Wechselwirkung zwischen der Sonne und den Planeten hatte.
- Magnetische Wirkung von Strömen: Diese wurde 1820 von Hans Christian Ørsted entdeckt. Später postulierte André Marie Ampère, dass *alle* Magnetfelder durch Ströme erzeugt werden. Daher müssten in magnetischen Materialien Molekularströme vorhanden sein, deren Nachweis mit den Mitteln des frühen 19. J.h. aber nicht möglich war. Heute wissen wir, dass der atomare Magnetismus auf quantenmechanischen Effekten beruht.

Im Weiteren werden wir auf der Basis des Ampère'schen Standpunktes argumentieren, d.h. elektrische Ströme als einzige Quellen von Magnetfeldern betrachten. Da elektrische Ströme aus bewegten Ladungen bestehen können wir folgendes Grundpostulat formulieren:

Magnetfelder werden durch bewegte elektrische Ladungen erzeugt, und wirken auf bewegte Ladungen.

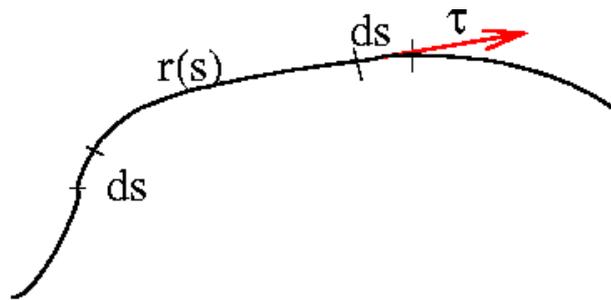


Abbildung 15.1.1: Zur Definition der Stromdichte für einen infinitesimal dünnen Draht.

## 15.1 Stationäre Ströme

In der **Magnetostatik** betrachtet man bewegte Ladungen, wobei die zugehörigen Ströme zeitunabhängig (stationär) sind. Die **Stromstärke**  $I$  wird definiert durch die zeitliche Änderung der Ladung

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (15.1.1)$$

Die **Stromdichte**  $\underline{j}$  beschreibt den Ladungsfluss durch eine Fläche und hat daher die Dimension  $\frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}}$ . Für eine genauere Definition betrachten wir einen infinitesimal dünnen Draht durch den ein Strom  $I$  fließt. Wir interpretieren den Draht als Kurve im Raum und parametrisieren ihn durch seine Bogenlänge  $s$ , d.h. der Draht wird durch die Kurve  $\underline{r}(s)$  beschrieben. Wir zerlegen den Draht nun in infinitesimale Linienelemente

$$d\underline{l} = \underline{\tau} ds \quad (15.1.2)$$

mit dem Tangentialvektor  $\underline{\tau}$  (Abb. 15.1.1). Bezeichnen wir die Querschnittsfläche des Drahtes mit  $df$ , so ist die Stromdichte ein Vektor mit Richtung  $\underline{\tau}$  und dem Betrag  $\frac{I}{df}$ , d.h.

$$\underline{j} = \frac{I}{df} \underline{\tau} \quad \text{bzw.} \quad I \underline{\tau} = \underline{j} df. \quad (15.1.3)$$

Da das infinitesimale Volumenelement durch  $dV = ds \cdot df$  gegeben ist, erhalten wir als Definition der **Stromdichte**

$$\boxed{\underline{j} dV = I d\underline{l}}. \quad (15.1.4)$$

Als Beispiel betrachten wir ein System aus Punktladungen  $q_i$  am Ort  $\underline{r}_i$ , die sich mit den Geschwindigkeiten  $\underline{v}_i$  bewegen. Dann ist

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)) \underline{v}_i. \quad (15.1.5)$$

Es sei noch angemerkt, dass sich auf diese Weise keine *stationäre* Stromdichte erzeugen lässt.

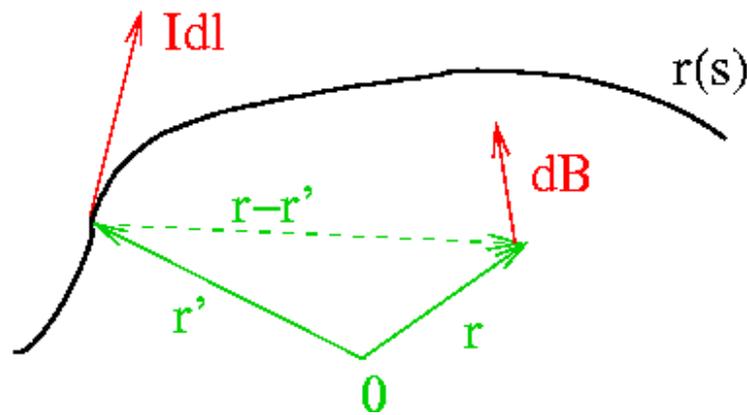


Abbildung 15.2.1: Das differentielle Biot-Savart-Gesetz.

## 15.2 Magnetfelder

Man kann die Magnetostatik in weitgehender formaler Analogie zur Elektrostatik entwickeln. Hierzu muss das Ladungselement  $\rho d^3r$  durch das Stromelement  $\underline{j} d^3r$  ersetzt werden. Durch den vektoriellen Charakter des Stromelements sind aber einige Zusatzüberlegungen bezüglich der Richtung erforderlich.

Wir definieren zunächst das **Magnetfeld** (die **magnetische Induktion**)  $\underline{B}(\underline{r})$  über seine Kraftwirkung auf ein Stromelement am Ort  $\underline{r}$ :

$$\underline{dF} = \frac{I}{c} \underline{dl} \times \underline{B}(\underline{r}) \quad (15.2.1)$$

Im SI-System gilt  $\underline{dF} = I \underline{dl} \times \underline{B}(\underline{r})$ , wobei  $\underline{B}$  in Tesla mit  $1 T = 1 \frac{Vs}{m^2}$  gemessen wird.

Die Kraft (15.2.1) steht senkrecht auf  $\underline{dl}$  (bzw.  $\underline{\tau}$ ) und  $\underline{B}$  und ist proportional zur Stromstärke  $I$  und dem Betrag des Magnetfeldes  $|\underline{B}|$ . Man sieht schnell (z.B. über (14.2.2)), dass das so definierte Magnetfeld die gleiche Einheit hat wie das elektrische Feld  $\underline{E}$ .

Nach dem Grundpostulat *erzeugt* das Stromelement am Ort  $\underline{r}'$  aber auch ein Magnetfeld am Ort  $\underline{r}$ . Dieses ist durch das (differentielle) **Biot-Savart-Gesetz**

$$\underline{dB} = \frac{I}{c} \underline{dl} \times \frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \quad (15.2.2)$$

gegeben. Im SI-System gilt

$$\underline{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \underline{dl} \times \frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \quad \text{mit} \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}. \quad (15.2.3)$$

Mit dem Superpositionsprinzip erhalten wir das von der gesamten Stromverteilung erzeugte Magnetfeld über das Biot-Savart-Gesetz in integraler Form

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}. \quad (15.2.4)$$

Das Biot-Savart-Gesetz übernimmt im Weiteren die Rolle des Coulomb-Gesetzes in der Elektrostatik.

Die Gesetze (15.2.1) und (15.2.2) definieren zusammen die magnetische Wechselwirkung zwischen zwei Stromelementen. Es handelt sich dabei aber nicht um eine Zentralkraft!

In Kap. 5.3.1 hatten wir die **Lorentzkraft**

$$\underline{F} = \frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B} \quad (15.2.5)$$

eines Magnetfeldes auf eine Punktladung  $q$  kennengelernt. Wir wollen diese nun noch aus (15.2.1) ableiten. Dazu überlegen wir uns zunächst, dass die Stromdichte einer Punktladung am Ort  $\underline{r}_0(t)$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\underline{v} = \frac{d\underline{r}_0}{dt}$  bewegt durch

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = q\underline{v}\delta(\underline{r} - \underline{r}_0(t)) \quad (15.2.6)$$

gegeben ist. Damit erhalten wir aus (15.2.1) für die Kraft auf diese Ladung

$$d\underline{F} = \frac{1}{c} (\underline{j} \times \underline{B}) d^3r = \frac{q}{c} (\underline{v} \times \underline{B}) \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) d^3r. \quad (15.2.7)$$

Da  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  die gleichen Einheiten habe, kann die Stärke der Lorentzkraft mit der elektrostatischen Kraft  $q\underline{E}$  verglichen werden<sup>1</sup>. Man sieht, dass sie sich um einen Faktor  $\frac{v}{c}$  unterscheiden. Dies deutet bereits an, dass sich das Magnetfeld als relativistische Korrektur zum elektrischen Feld auffassen lässt.

### 15.3 Kontinuitätsgleichung

Die Ladungserhaltung ist eine gut bestätigte Erfahrungstatsache: Elektrische Ladungen können weder erzeugt noch vernichtet werden. In allen bekannten Prozessen ist die Summe der beteiligten Ladungen vorher und nachher gleich. Die Änderung der elektrischen Ladung in einem beliebigen geschlossenen Volumen  $V$  muss daher gleich dem Fluss von Ladungen durch seine Oberfläche  $\partial V$  sein. Da der Ladungsfluss durch ein Flächenelement  $d\underline{f} = \underline{n}df$  durch  $\underline{j} \cdot d\underline{f}$  gegeben ist folgt für die Ladungsänderung in  $V$

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\underline{r}, t) = - \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{j}(\underline{r}, t) = - \int_V d^3r \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}, t), \quad (15.3.1)$$

<sup>1</sup>Wenn die Richtungen von  $\underline{v}$  und  $\underline{B}$  geeignet gewählt werden!

wobei wir den Gauß'schen Satz angewendet haben. Das Minuszeichen vor dem Oberflächenintegral rührt daher, dass der Normalenvektor  $\underline{n}$  einer geschlossenen Oberfläche per Konvention immer nach Außen zeigt und ein Strom aus dem Volumen heraus zu einer Verkleinerung der Ladungsmenge führen muss. Insgesamt muss also für beliebige geschlossene Volumina  $V$

$$\int_V d^3r \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} \right) = 0 \quad (15.3.2)$$

sein. Dies führt auf die **Kontinuitätsgleichung**

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0}, \quad (15.3.3)$$

die die elektrische Ladungsdichte mit dem elektrischen Strom verknüpft.

In einer statischen Situation ist  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  und  $\underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{j}(\underline{r})$ . In diesem statischen Fall ist daher

$$\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}) = 0, \quad (15.3.4)$$

d.h. stationäre Ströme in der Magnetostatik sind divergenzfrei.

## 15.4 Vektorpotential

In der Elektrostatik haben wir das elektrostatische Potential  $\phi$  eingeführt, aus dem sich über  $\underline{E} = -\nabla\phi$  das elektrische Feld ergibt. Gibt es ein ähnliches Potential für das Magnetfeld?

Dazu formen wir zunächst das Biot-Savart-Gesetz (15.2.4) analog zum Vorgehen in der Elektrostatik um:

$$\begin{aligned} \underline{B}(\underline{r}) &= \frac{I}{c} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \nabla \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \nabla \times \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \end{aligned} \quad (15.4.1)$$

wobei wir im letzten Schritt die Identität  $\nabla(g\underline{V}) = g\nabla \times \underline{V} + (\nabla g) \times \underline{V}$  benutzt haben, die für beliebige Skalarfelder  $g$  und Vektorfelder  $\underline{V}$  gilt. Dabei ist  $g(\underline{r}-\underline{r}') = 1/|\underline{r}-\underline{r}'|$  und  $\underline{V}(\underline{r}) = \underline{j}(\underline{r}')$  (unabhängig von  $\underline{r}$  !!). Somit können wir das Magnetfeld darstellen als

$$\boxed{\underline{B} = \nabla \times \underline{A}} \quad (15.4.2)$$

mit dem **Vektorpotential**

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}} \quad (15.4.3)$$

Das elektrostatische Potential  $\phi$  ist durch  $\underline{E} = -\nabla\phi$  nur bis auf eine additive Konstante festgelegt. Das Vektorpotential  $\underline{A}$  wird durch  $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$  nur bis auf eine beliebige skalare Funktion  $\Lambda(\underline{r})$  bestimmt, denn unter der **Eichtransformation**

$$\boxed{\underline{A} \rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \nabla\Lambda} \quad (15.4.4)$$

gilt wegen (13.2.10)

$$\nabla \times \underline{A}' = \nabla \times \underline{A} + \nabla \times (\nabla\Lambda) = \underline{B}. \quad (15.4.5)$$

Die Wahl von  $\Lambda$ , die zu (15.4.3) führt, heißt **Coulomb-Eichung**. Sie ist durch

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{A} = 0} \quad (15.4.6)$$

charakterisiert, denn

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{A} &= \frac{1}{c} \int d^3r' \nabla \cdot \left( \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) = \frac{1}{c} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \int d^3r' (\nabla' \cdot \underline{j}(\underline{r}')) \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = 0, \end{aligned} \quad (15.4.7)$$

wobei wir zunächst die allgemeine Identität  $\nabla(fV) = \underline{V} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \underline{V}$  verwendet haben und dann die Tatsache, dass stationäre Ströme in statischen Situationen divergenzfrei sind (siehe Kap. 15.3).  $\nabla'$  bezeichnet den Nabla-Operator bezüglich  $\underline{r}'$ .

## 15.5 Feldgleichungen

Analog zur Elektrostatik wollen wir nun das Magnetfeld  $\underline{B}$  durch  $\nabla \cdot \underline{B}$  und  $\nabla \times \underline{B}$  charakterisieren. Da  $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$  gilt wegen der allgemein gültigen Identität  $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{V}) = 0$

$$\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0 \quad (15.5.1)$$

und damit

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{B} = 0.} \quad (15.5.2)$$

Diese Identität drückt Abwesenheit von magnetischen Ladungen aus. Die Herleitung gilt streng genommen nur für Magnetfelder, die durch (stationäre) Ströme erzeugt werden. Die Existenz von Elementarteilchen mit magnetischen Ladungen ist damit noch nicht ausgeschlossen und Gegenstand aktueller Forschung.

Ein überzeugendes Argument für die Existenz von Monopolen wurde 1931 von Paul Dirac gegeben. Er zeigte, dass aus der Existenz von magnetischen Monopolen im Rahmen der Quantenmechanik zwangsläufig die Quantisierung der elektrischen Ladung (als Vielfaches einer Elementarladung) folgt. Dabei sind die elektrische Elementarladung  $e$  und die magnetische Elementarladung  $g$  über die Beziehung

$$ge = \frac{n}{2} \hbar c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (15.5.3)$$

miteinander verknüpft. Dabei ist  $\hbar = h/2\pi$  das Planck'sche Wirkungsquantum. Somit ist

$$g \geq \frac{\hbar c}{2e} = \frac{e}{2\alpha} \approx \frac{137}{2}e \quad (15.5.4)$$

mit der Feinstrukturkonstanten  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ . Sie stellt ein dimensionsloses Maß für die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung dar. Damit ist die magnetische Elementarladung (im Gauß'schen System) deutlich größer als die elektrische Elementarladung. Daher erwartet man, dass magnetische Monopole eine sehr große Masse haben. Aktuell liegt die untere Schranke für die Monopolmasse bei etwa 900 Protonenmassen ( $m_g > 900m_p$ ).

Wir wollen nun die Feldgleichung für  $\nabla \times \underline{B}$  ableiten. Wegen<sup>2</sup>

$$\nabla \times \underline{B} = \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A} = -\nabla^2 \underline{A}, \quad (15.5.5)$$

wobei (15.4.7) benutzt wurde, folgt mit (13.4.16)

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{B} &= -\nabla^2 \underline{A} = -\frac{1}{c} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \\ &= \frac{4\pi}{c} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \delta(\underline{r} - \underline{r}') = \frac{4\pi}{c} \underline{j}(\underline{r}). \end{aligned} \quad (15.5.6)$$

Wir erhalten so die zweite magnetostatische Feldgleichung

$$\boxed{\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}(\underline{r})} \quad (15.5.7)$$

bzw. im SI-System

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}(\underline{r}). \quad (15.5.8)$$

In Coulomb-Eichung erfüllt das Vektorpotential daher eine komponentenweise Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{j}(\underline{r}). \quad (15.5.9)$$

## 15.6 Ampère'sches Gesetz

Eine wichtige Folgerung aus (15.5.7) ist das Ampère'sche Gesetz, das für die konkrete Berechnung von Magnetfeldern ähnlich nützlich ist wie das Gauß'sche Gesetz bei elektrischen Feldern. Wir betrachten eine zweidimensionale Fläche  $F$  mit dem (eindimensionalen) Rand  $\partial F$ . Dann gilt

$$\oint_{\partial F} d\underline{l} \cdot \underline{B} = \int_F d\underline{f} \cdot (\nabla \times \underline{B}) = \frac{4\pi}{c} \int_F d\underline{f} \cdot \underline{j} = \frac{4\pi}{c} I_F, \quad (15.6.1)$$

<sup>2</sup>Dabei ist  $\nabla^2 \underline{A}$  komponentenweise definiert!

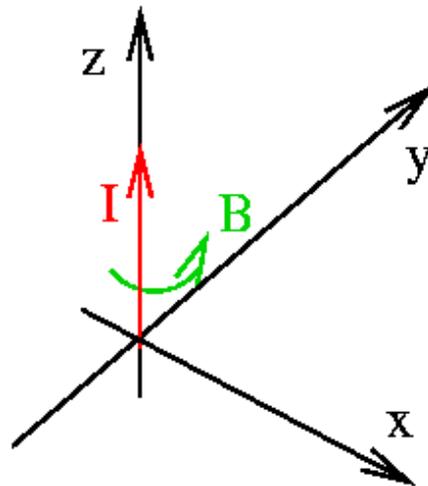


Abbildung 15.6.1: Magnetfeld einer geraden Drahtes.

wobei wir den Stokes'schen Satz benutzt haben.  $I_F$  ist der Gesamtstrom durch die Fläche  $F$ . Wir erhalten also das **Ampère'sche Gesetz**

$$\oint_{\partial F} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} I_F, \quad (15.6.2)$$

das das Wegintegral von  $\vec{B}$  längs einer geschlossenen Kurve mit dem Strom durch die von der Kurve  $\partial F$  berandete Fläche  $F$  in Verbindung bringt.

Als konkrete Anwendung betrachten wir das Magnetfeld eines unendlich langen, geraden, infinitesimal dünnen Drahtes. Dieser soll parallel zur  $z$ -Achse liegen. Wir verwenden Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$ , die der Symmetrie des Problems angemessen sind. Aus Symmetriegründen muss das Magnetfeld parallel zu  $\underline{e}_\varphi$  liegen und die Form

$$\vec{B} = B(\rho)\underline{e}_\varphi \quad (15.6.3)$$

haben. Wir wenden das Ampère'sche Gesetz auf einen Kreis  $K_\rho$  vom Radius  $\rho$  an, der senkrecht zur  $z$ -Richtung liegen soll:

$$\frac{4\pi}{c} I = \oint_{\partial K_\rho} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \oint_{\partial K_\rho} dl \underline{e}_\varphi \cdot \underline{e}_\varphi B(\rho) = 2\pi\rho B(\rho). \quad (15.6.4)$$

Daher ist

$$B(\rho) = \frac{2I}{c\rho}. \quad (15.6.5)$$

## 15.7 Magnetischer Dipol

Analog zum Vorgehen in der Elektrostatik wollen wir uns nun mit der Frage beschäftigen, wie das Fernfeld einer räumlich beschränkten Stromverteilung aussieht. Wir betrachten das Feld wieder in Abständen  $r > R_0$ , wobei  $R_0$  ein Maß für die Ausdehnung der Stromverteilung sein soll<sup>3</sup>. In der Elektrostatik war der führende Beitrag zum Fernfeld das Monopolfeld einer Punktladung. Da es keine magnetischen Monopole gibt, erwarten wir nun als führenden Beitrag ein Dipolfeld.

### 15.7.1 Dipolfeld

Wir entwickeln das Vektorpotential (15.4.3) für  $|\underline{r}| \gg |\underline{r}'|$  und integrieren die Taylorreihe Term für Term. Dann erhalten wir

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{A}_{\text{dip}}(\underline{r}) + \mathcal{O}(1/r^3) \quad (15.7.1)$$

mit

$$\underline{A}_{\text{dip}}(\underline{r}) = \frac{1}{r^3} (\underline{\mu} \times \underline{r}) \quad (15.7.2)$$

und dem **magnetischen Dipolmoment**

$$\underline{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3r \underline{r} \times \underline{j}(\underline{r}). \quad (15.7.3)$$

Das zugehörige Magnetfeld ist dann

$$\underline{B}_{\text{dip}} = \nabla \times \underline{A}_{\text{dip}} = -\nabla \left( \frac{\underline{\mu} \cdot \underline{r}}{r^3} \right) + 4\pi \underline{\mu} \delta(\underline{r}), \quad (15.7.4)$$

wobei der erste Term ein Beitrag analog zum elektrischen Dipolfeld (14.6.11) ist und der zweite Term außerhalb des Ursprungs verschwindet. Somit haben (außerhalb des Ursprungs) elektrische und magnetische Felder den gleichen Verlauf.

Eigentlich hätten wir auch bei der Herleitung des elektrischen Dipolpotentials auf singuläre Beiträge am Ort des Dipols (also dem Ursprung) achten müssen. Eine sorgfältige Rechnung ergibt

$$\underline{E}_{\text{dip}} = \frac{1}{r^3} \left( \frac{3(\underline{d} \cdot \underline{r})\underline{r}}{r^2} - \underline{d} \right) - \frac{4\pi}{3} \underline{d} \delta(\underline{r}) \quad (15.7.5)$$

bzw.

$$\underline{B}_{\text{dip}} = \frac{1}{r^3} \left( \frac{3(\underline{\mu} \cdot \underline{r})\underline{r}}{r^2} - \underline{\mu} \right) - \frac{8\pi}{3} \underline{\mu} \delta(\underline{r}). \quad (15.7.6)$$

Die singulären  $\delta$ -Beiträge entstehen, weil durch den Abbruch der Multipolentwicklung nach dem Dipolterm implizit ein Übergang zu einem Punktdipol durchgeführt wird. Bei einer realistischen Ladungs- oder Stromverteilung endlicher Ausdehnung bricht die Dipolnäherung zusammen, wenn  $|\underline{r}|$  vergleichbar mit der Ausdehnung wird. Daher gibt es in diesem Fall keine

<sup>3</sup>Man stelle sich z.B. ein kreisförmige Leiterschleife vom Radius  $R_0$  um den Ursprung vor!

Singularität bei  $r = 0$ . Wir machen uns dies für einen elektrischen Dipol mit der Ladungsverteilung

$$\rho(\underline{r}) = q \left[ \delta \left( \underline{r} - \frac{a}{2} \underline{e}_z \right) - \delta \left( \underline{r} + \frac{a}{2} \underline{e}_z \right) \right] \quad (15.7.7)$$

klar. Am Ursprung, also in der Mitte zwischen den beiden Ladungen bei  $\pm \frac{a}{2}$ , herrscht ein starkes Feld, das beim Übergang  $a \rightarrow 0$  zum Punktdipol wie  $\frac{d}{a^3}$  divergiert und so die  $\delta$ -Singularität erzeugt.

Im magnetischen Fall geht man analog vor, wobei man eine Leiterschleife vom Radius  $R$  betrachtet, die von einem Strom  $I$  durchflossen wird. Im Grenzfall  $R \rightarrow 0$  und  $I \rightarrow \infty$  erhält man dann einen magnetischen Punktdipol.

### 15.7.2 Magnetischer Dipol im äußeren Feld

Wir betrachten nun eine räumlich begrenzte Stromverteilung in einem *äußeren* Feld  $\underline{B}_{\text{ext}}(\underline{r})$ . Gemäss (15.2.7) ist die Kraft auf die Stromverteilung

$$\underline{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \left( \underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}_{\text{ext}}(\underline{r}) \right) . \quad (15.7.8)$$

Wir nehmen an, dass die Stromverteilung  $\underline{j}(\underline{r})$  um  $\underline{r}_0$  lokalisiert ist und das sich  $\underline{B}_{\text{ext}}(\underline{r})$  auf der Skala  $R_0$  der Stromverteilung nur langsam ändert und daher um  $\underline{r}_0$  entwickelt werden kann. Wir geben hier nur das Ergebnis einer solchen Rechnung an:

$$\underline{F} = \nabla \left( \underline{\mu} \cdot \underline{B}_{\text{ext}} \right) = -\nabla V_{\text{dip}} \quad (15.7.9)$$

mit der potentiellen Energie

$$V_{\text{dip}} = -\underline{\mu} \cdot \underline{B}_{\text{ext}} \quad (15.7.10)$$

des Dipols. Ist  $\underline{B}$  konstant, dann ist  $\underline{F} = 0$ , aber es wirkt ein Drehmoment

$$\underline{m} = \underline{\mu} \times \underline{B}_{\text{ext}} \quad (15.7.11)$$

auf den Dipol, der daher im Feld ausgerichtet wird. Der magnetische Dipol verhält sich also auch in dieser Hinsicht analog zu einem elektrostatischen Dipol in einem elektrischen Feld.

### 15.7.3 Das gyromagnetische Verhältnis

Elementarteilchen wie das Elektron besitzen ein intrinsisches magnetisches Dipolmoment, das z.B. auch für den atomaren Magnetismus verantwortlich ist. Da Elementarteilchen zusätzlich einen Spin<sup>4</sup> besitzen, kann man sich in einem einfachen Modell Elementarteilchen näherungsweise als geladene, rotierende Kugeln vorstellen. Diese Vorstellung kann nicht ganz richtig sein, da z.B. auch neutrale Teilchen wie das Neutron ein magnetisches Moment besitzen. Um weitere Grenzen auszuloten, betrachten wir eine homogen geladene Kugel vom Radius  $R$ , die die

<sup>4</sup>Eine Art Eigendrehimpuls, den wir im zweiten Teil der Vorlesung genauer untersuchen werden.

Ladung  $Q$  trägt und mit der Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}$  um eine ihrer Symmetrieachsen rotiert. Dadurch wird eine stationäre Stromverteilung mit dem magnetischen Moment

$$\underline{\mu} = \frac{1}{5c} QR^2 \underline{\omega} \quad (15.7.12)$$

erzeugt. Ist auch die Massenverteilung homogen, so hat die Kugel den Drehimpuls

$$\underline{L} = \frac{2}{5} MR^2 \underline{\omega} \quad (15.7.13)$$

mit der Gesamtmasse  $M$ . Es gilt daher

$$\underline{\mu} = \gamma \underline{L} \quad (15.7.14)$$

mit dem **gyromagnetischen Verhältnis**

$$\gamma = \frac{Q}{2Mc}. \quad (15.7.15)$$

Die letzten beiden Beziehungen gelten ganz allgemein für beliebige Anordnungen, bei denen Massendichte  $\rho_m(\underline{r})$  und Ladungsdichte  $\rho(\underline{r})$  proportional zueinander sind, d.h.  $\rho_m(\underline{r}) = C\rho(\underline{r})$  wobei sich die Konstante  $C$  aus  $M = \int \rho_m(\underline{r})d^3r$  und  $Q = \int \rho(\underline{r})d^3r$  zu  $C = \frac{M}{Q}$  ergibt. Bewegt sich das Volumenelement am Ort  $\underline{r}$  mit der Geschwindigkeit  $\underline{v}(\underline{r})$ , so gilt

$$\begin{aligned} \underline{j}(\underline{r}) &= \rho(\underline{r})\underline{v}(\underline{r}), \\ \underline{j}_m(\underline{r}) &= \rho_m(\underline{r})\underline{v}(\underline{r}) = \frac{M}{Q} \underline{j}(\underline{r}). \end{aligned} \quad (15.7.16)$$

Für den Drehimpuls gilt daher

$$\underline{L} = \int (\underline{r} \times \underline{j}_m) d^3r = \frac{M}{Q} \int (\underline{r} \times \underline{j}) d^3r = \frac{2cM}{Q} \underline{\mu}. \quad (15.7.17)$$

Der Betrag des Spins von Elementarteilchen ist quantisiert und kann nur Werte annehmen, die ein ganzzahliges Vielfaches von  $\frac{\hbar}{2}$  sind. Das Elektron hat z.B. den Spin  $\hbar/2$  und daher das magnetische Moment

$$|\underline{\mu}| = g \frac{e}{2m_e c} \frac{\hbar}{2} = \frac{g}{2} \frac{e\hbar}{2m_e c}. \quad (15.7.18)$$

Die Grösse  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$  bezeichnet man auch als **Bohr'sches Magneton**. Der dimensionslose **g-Faktor** oder **Landé-Faktor**  $g$  wurde dabei so eingeführt, dass er für eine rotierende klassische Ladungsverteilung  $g = 1$  wäre. Tatsächlich ist das  $g$  des Elektrons etwa doppelt so groß<sup>5</sup>:

$$g \approx 2.0023193043616. \quad (15.7.19)$$

Die Übereinstimmung des experimentell bestimmten mit dem aus der Quantenelektrodynamik berechneten  $g$ -Faktor ist extrem gut (bis auf neun Nachkommastellen).

Abschliessend sei noch bemerkt, dass zusammengesetzte Teilchen andere  $g$ -Faktoren haben. Protonen und Neutronen bestehen aus Quarks und die  $g$ -Faktoren

$$g_p \approx 5.58569, \quad g_n \approx -3.826085. \quad (15.7.20)$$

<sup>5</sup>Die quantenmechanische Dirac-Gleichung liefert  $g = 2$ .



# Kapitel 16

## Die Maxwell'schen Gleichungen

Bisher haben wir nur statische Situationen betrachtet, die durch die elektro- und magnetostatischen Feldgleichungen

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho, \quad (16.0.1)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0, \quad (16.0.2)$$

$$\nabla \times \underline{E} = 0, \quad (16.0.3)$$

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}, \quad (16.0.4)$$

für die Quellen (Gl. (16.0.1) und (16.0.2)) und Wirbel (Gl. (16.0.3) und (16.0.4)) der elektrischen und magnetischen Felder beschrieben. In diesem Fall sind elektrische und magnetische Vorgänge komplett entkoppelt, es gibt keine Gleichung, in der beide Felder zusammen auftauchen.

Wenn wir an zeitabhängigen Phänomenen interessiert sind, müssen die Gleichungen (16.0.3) und (16.0.4) ergänzt werden. Dies wird zu einer Kopplung von elektrischen und magnetischen Feldern führen.

### 16.1 Das Induktionsgesetz

M. Faraday hat 1831 in einer Reihe von Experimenten durchgeführt:

- Bewegung einer Leiterschleife in einem statischen Magnetfeld
- Bewegung eines Permanentmagneten durch eine statische Leiterschleife
- Änderung der Magnetfeldstärke eines Elektromagneten, der von von einer Leiterschleife umschlossen wird.

In allen drei Fällen wurde in der Leiterschleife ein elektrischer Strom induziert. Diese Beobachtungen lassen sich im **Induktionsgesetz** (oder **Flussregel**) zusammenfassen:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_F \underline{df} \cdot \underline{B} = -c \oint_{\partial F} \underline{dl} \cdot \underline{E}.} \quad (16.1.1)$$

Auf der linken Seite steht die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche  $F$  und auf der rechten Seite das Kreisintegral des elektrischen Feldes über den Rand von  $F$ , d.h. die in der Leiterschleife induzierte Ringspannung.

Eine Flussänderung kann durch die Änderung a) der Fläche  $F$  oder b) Magnetfeldstärke  $\underline{B}$  hervorgerufen werden. Wenn  $F$  zeitunabhängig ist, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_F d\underline{f} \cdot \underline{B} &= \int_F d\underline{f} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -c \oint_{\partial F} d\underline{l} \cdot \underline{E} \\ &= -c \int_F d\underline{f} \cdot (\nabla \times \underline{E}). \end{aligned} \quad (16.1.2)$$

Da dies für beliebige Flächen  $F$  gilt, erhält man die **differentielle Form des Induktionsgesetzes**

$$\boxed{\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}}. \quad (16.1.3)$$

Wir leiten nun das Induktionsgesetz (16.1.1) für eine spezielle Situation aus der Lorentzkraft (15.2.5) her. Dazu betrachten wir eine rechteckige Leiterschleife mit einem beweglichen Teilstück (Abb. 16.1.1), das sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $\underline{v} = v\underline{e}_x$  bewegt. Das Magnetfeld steht senkrecht dazu:  $\underline{B} = B\underline{e}_z$ . Auf die frei beweglichen Ladungen wirkt daher die Kraft

$$\underline{F} = \frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B} = -\frac{q}{c} v B \underline{e}_y. \quad (16.1.4)$$

Im Bezugssystem des bewegten Leiters wird diese Kraft als Wirkung eines induzierten elektrischen Feldes

$$\underline{E} = \frac{\underline{F}}{q} = -\frac{vB}{c} \underline{e}_y \quad (16.1.5)$$

interpretiert. Da dieses Feld nur im bewegten Teil der Leiterschleife vorhanden ist, kann das Linienintegral über die Schleife leicht ausgewertet werden:

$$\oint_{\partial F} d\underline{l} \cdot \underline{E} = -L_y \frac{vB}{c}. \quad (16.1.6)$$

Der magnetische Fluss durch die Leiterschleife ist

$$\int_F d\underline{f} \cdot \underline{B} = B L_x L_y. \quad (16.1.7)$$

Somit gilt

$$\frac{d}{dt} \int_F d\underline{f} \cdot \underline{B} = B L_y \frac{L_x}{dt} = B v L_y = -c \oint_{\partial F} d\underline{l} \cdot \underline{E}. \quad (16.1.8)$$

Dies stimmt mit Gleichung (16.1.1) überein. Das durch den induzierten Strom erzeugte Magnetfeld zeigt in negative  $y$ -Richtung, also entgegengesetzt zum angelegten Magnetfeld  $\underline{B}$ . Wird die Leiterschleife in negative  $x$ -Richtung bewegt (der Fluss wird dann kleiner!), so wird das angelegte Magnetfeld verstärkt. Dies ist ein Beispiel für die

**Lenz'sche Regel:** Der induzierte Strom erzeugt ein Magnetfeld, das der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt.

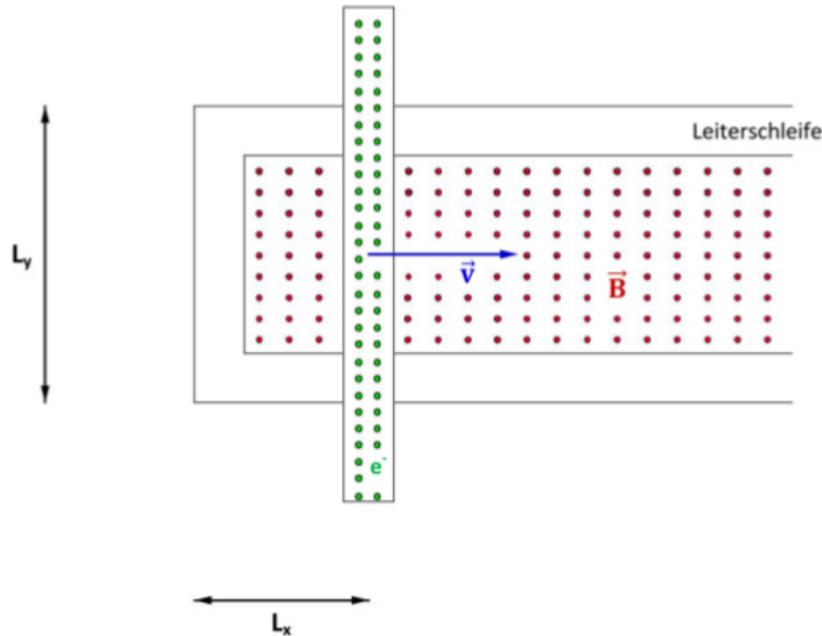


Abbildung 16.1.1: Leiterschleife mit einem beweglichen Teilstück. Das Magnetfeld tritt senkrecht aus der Zeichenebene heraus. Auf die freien Elektronen im beweglichen Teilstück wirkt die Lorentzkraft. (aus [5])

## 16.2 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Wegen  $\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}$  ist in der Magnetostatik die Stromdichte divergenzfrei. Dies ist aber nicht verträglich mit der Kontinuitätsgleichung (15.3.3) falls sich die Ladungsdichte zeitlich ändert. Daher muss in diesem Fall die Stromdichte um einen weiteren Beitrag  $\underline{j}_M$  ergänzt werden:

$$\underline{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \underline{B} - \underline{j}_M. \quad (16.2.1)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{j} &= -\nabla \cdot \underline{j}_M = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \underline{E}) \\ &= -\nabla \cdot \left( \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (16.2.2)$$

Die Ergänzung  $\underline{j}_M$  heisst **Maxwell'scher Verschiebungsstrom**

$$\underline{j}_M = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad (16.2.3)$$

und wurde von Maxwell auf Grund theoretische Überlegungen (aber nicht der Ladungserhaltung!) postuliert. Er wird später wichtig für die Existenz elektromagnetischer Wellen. Die Feldgleichung für die Wirbel des magnetischen Feldes lautet daher vollständig  $\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$ . Damit haben wir die vollständigen **Maxwell-Gleichungen** abgeleitet:

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho, \quad (16.2.4)$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}, \quad (16.2.5)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0, \quad (16.2.6)$$

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}. \quad (16.2.7)$$

Die Gleichungen (16.2.5) und (16.2.6) nennt man auch **homogene Maxwell-Gleichungen**, da in ihnen die Quellen  $(\rho, \underline{j})$  nicht auftauchen. Die Gleichungen (16.2.4) und (16.2.7) heißen daher **inhomogene Maxwell-Gleichungen**. Im SI-System sind die Maxwell-Gleichungen von der Form

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (16.2.8)$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}, \quad (16.2.9)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0, \quad (16.2.10)$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}. \quad (16.2.11)$$

In den Gleichungen tritt die Lichtgeschwindigkeit  $c$  gar nicht explizit auf! Tatsächlich gilt im Vakuum

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (16.2.12)$$

### 16.3 Energie des elektromagnetischen Feldes

Wir verallgemeinern nun die elektrostatische Energiedichte (14.5.3) auf zeitabhängige Situationen. Dazu betrachten wir ein System aus  $N$  geladenen Punktteilchen in äußeren elektrischen und magnetischen Feldern, so dass sich die Begriffe der klassischen Mechanik anwenden lassen. In der Zeit  $dt$  ändert sich die Gesamtenergie  $E_{\text{mat}}$  des Systems durch die elektrischen und magnetischen Kräfte:

$$\begin{aligned} dE_{\text{mat}} &= \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{r}_i = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{v}_i dt \\ &= \sum_i q_i \left[ \underline{E}(\underline{r}_i, t) + \frac{1}{c} (\underline{v}_i \times \underline{B}(\underline{r}_i, t)) \right] \cdot \underline{v}_i dt \\ &= \sum_i q_i \underline{E}(\underline{r}_i, t) = \int d^3r \underline{j} \cdot \underline{E} dt, \end{aligned} \quad (16.3.1)$$

wobei wir die Stromdichte  $\underline{j} = \sum_i q_i \underline{v}_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$  eingeführt haben. Der Beitrag des Magnetfeldes verschwindet, da ganz allgemein  $\underline{a} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = 0$  gilt. Somit ist die Änderung der Gesamtenergie

$$\frac{dE_{\text{mat}}}{dt} = \int d^3r \underline{j} \cdot \underline{E}. \quad (16.3.2)$$

Wir wollen nun mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen den Integranden ganz durch die Felder  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  ausdrücken. Zunächst gilt

$$\underline{j} \cdot \underline{E} = \frac{c}{4\pi} \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{B}) - \frac{1}{4\pi} \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{B}) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} |\underline{E}|^2, \quad (16.3.3)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} |\underline{B}|^2 = 2\underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -2c\underline{B} \cdot (\nabla \times \underline{E}). \quad (16.3.4)$$

Da außerdem gilt

$$\nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot (\nabla \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \quad (16.3.5)$$

erhalten wir schließlich

$$\underline{j} \cdot \underline{E} = -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{B}) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2). \quad (16.3.6)$$

Wir betrachten nun zwei verschiedene Situationen.

- Für eine Konfiguration von Teilchen und Feldern, die ganz in einem abgeschlossenen Raumbereich  $V$  liegen, integrieren wir (16.3.6) über das Volumen  $V$ :

$$\frac{dE_{\text{mat}}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2) - \frac{c}{4\pi} \int_V d^3r \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{B}) \quad (16.3.7)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2) - \frac{c}{4\pi} \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot (\underline{E} \times \underline{B}) = 0, \quad (16.3.8)$$

wobei wir zunächst den Gauß'schen Satz benutzt haben und  $V$  so groß gewählt wurde, dass  $\underline{E} = \underline{B} = 0$  auf dem Rand  $\partial V$ . Somit ist die Gesamtenergie erhalten,

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{mat}} + E_{\text{em}}) = 0, \quad (16.3.9)$$

wobei wir die **elektromagnetische Feldenergie**

$$E_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2) = \int_V d^3r u(\underline{r}) \quad (16.3.10)$$

eingeführt haben, mit der **Energiedichte des elektromagnetischen Feldes**

$$\boxed{u(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi} (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2)}. \quad (16.3.11)$$

Im SI-System ist

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 |\underline{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\underline{B}|^2 \right). \quad (16.3.12)$$

- Nun betrachten wir ein elektromagnetisches Feld in Abwesenheit von Materie. Da dann  $\frac{d}{dt}E_{\text{mat}} = 0$ , muss die rechte Seite von (16.3.7) für beliebige Volumina  $V$  verschwinden. Dies liefert

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{S} = 0} \quad (16.3.13)$$

mit dem **Poynting-Vektor** (oder **Energiestromdichte**)

$$\boxed{\underline{S} = \frac{c}{4\pi} (\underline{E} \times \underline{B})} . \quad (16.3.14)$$

Gleichung (16.3.13) hat die Form einer Kontinuitätsgleichung und drückt die lokale Erhaltung der Feldenergie  $\int u(\underline{r})d^3r$  aus.

Die allgemeine Form der lokalen Energiebilanz in Gegenwart einer Stromverteilung  $\underline{j}(\underline{r})$  lautet dann

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{S} = -\underline{j} \cdot \underline{E}} \quad (16.3.15)$$

wobei der Ausdruck auf der rechten Seite ein Verlustterm ist, den man auch als **Ohm'sche Wärme** bezeichnet.

## 16.4 Impuls des elektromagnetischen Feldes

Da elektromagnetische Felder Energie besitzen liegt die Vermutung nahe, dass man ihnen auch einen Impuls zuordnen kann. Wir machen hierzu ein Gedankenexperiment, bei dem wir zwei Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  betrachten, die sich mit den Geschwindigkeiten  $\underline{v}_1 = -v_1\underline{e}_x$  bzw.  $\underline{v}_2 = -v_2\underline{e}_z$  in Richtung der negativen  $x$ - bzw.  $z$ -Achse bewegen (Abb. 16.4.1). Stellen wir uns die Ladungen als kleine Stromelemente vor, so können wir mit dem Biot-Savart-Gesetz (15.2.2) die Richtung der von den Ladungen erzeugten Magnetfelder bestimmen:  $q_1$  erzeugt am Ort von  $q_2$  das Magnetfeld  $\underline{B}_1 = B_1\underline{e}_y$  und  $q_2$  am Ort von  $q_1$  das Feld  $\underline{B}_2 = -B_2\underline{e}_y$ . Der magnetische Anteil der entsprechenden Lorentz-Kraft ist daher

$$\begin{aligned} \underline{F}_{21} &= \frac{q_2}{c} (\underline{v}_2 \times \underline{B}_1) = F_{21}\underline{e}_x, \\ \underline{F}_{12} &= \frac{q_1}{c} (\underline{v}_1 \times \underline{B}_2) = F_{12}\underline{e}_z. \end{aligned} \quad (16.4.1)$$

Diese Kräfte sind nicht antiparallel, daher ist das 3. Newton'sche Gesetz (und damit der mechanische Impulssatz) verletzt! Das mechanische System tauscht mit dem elektromagnetischen Feld nicht nur Energie, sondern auch Impuls aus!

Quantitative Überlegungen zeigen, dass die **Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes** durch

$$\underline{g}_{\text{em}} = \frac{1}{4\pi c} (\underline{E} \times \underline{B}) = \frac{1}{c^2} \underline{S} \quad (16.4.2)$$

gegeben ist. Sie ist also proportional zur Energiedichte.

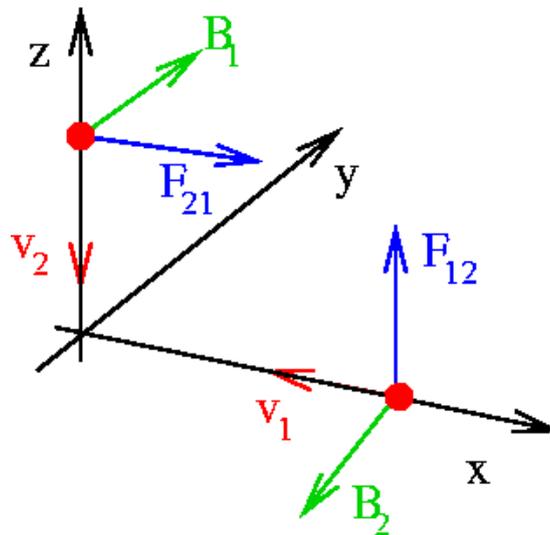


Abbildung 16.4.1: Gedankenexperiment zur Verletzung des 3. Newton'schen Gesetzes durch die magnetische Wechselwirkung.

## 16.5 Maxwell-Gleichungen für die Potentiale

Wir wollen nun den Potentialbegriff auf zeitabhängige Situationen verallgemeinern. Die Darstellbarkeit  $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$  des Magnetfeldes durch ein Vektorpotential  $\underline{A}$  folgte aus der Divergenzfreiheit von  $\underline{B}$ . Da diese auch im zeitabhängigen Fall erhalten bleibt, muss der Zusammenhang zwischen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  nicht modifiziert werden. Das gilt aber nicht für den Zusammenhang  $\underline{E} = -\nabla\phi$  zwischen dem elektrostatischen Potential  $\phi$  und dem elektrischen Feld  $\underline{E}$ , der auf der Beziehung  $\nabla \times \underline{E} = 0$  beruhte. In zeitabhängigen Situationen müssen wir dies modifizieren (siehe (16.2.9)):

$$0 = \nabla \times \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \nabla \times \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{A}) = \nabla \times \left( \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right). \quad (16.5.1)$$

Somit existiert für  $\underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$  ein Skalarpotential  $\phi$ :

$$\boxed{\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}}. \quad (16.5.2)$$

In SI-Einheiten lautet diese Beziehung  $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$ . Sie geht im statischen Fall in die bekannte Form  $\underline{E} = -\nabla\phi$  über.

Wie wir schon früher gesehen haben, gibt es bei der Wahl der Potentiale gewisse Freiheiten (**Eichfreiheit**). In der Magnetostatik war  $\underline{A}$  nur bis auf den Gradienten einer skalaren Funktion festgelegt:  $\underline{A} \rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \nabla\Lambda$ . Eine allgemeine **Eichtransformation** soll nun  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  invariant

lassen:

$$\begin{aligned}\underline{E} &\rightarrow \underline{E}' = -\nabla\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\underline{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(\phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial\underline{A}}{\partial t} \\ &\stackrel{!}{=} -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\underline{A}}{\partial t}\end{aligned}\quad (16.5.3)$$

liefert die Transformation für das Skalarpotential

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}. \quad (16.5.4)$$

Mit (16.5.4) und  $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$  sind die homogenen Maxwell-Gleichungen (16.2.5) und (16.2.6) automatisch erfüllt! Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (16.2.4) und (16.2.7) liefern dann einen Zusammenhang zwischen den Potentialen  $\phi$  und  $\underline{A}$  und den Quellen  $\rho$  und  $\underline{j}$ :

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\underline{E}}{\partial t} &= \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\underline{A}}{\partial t}\right) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2\underline{A} + \nabla\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{A}}{\partial t^2} \\ &= -\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{A} + \nabla\left(\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \\ &\stackrel{!}{=} \frac{4\pi}{c}\underline{j},\end{aligned}\quad (16.5.5)$$

wobei wir die Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{V}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{V}) - \nabla^2\underline{V} \quad (16.5.6)$$

benutzt haben, die für beliebige Vektorfelder  $\underline{V}$  gilt.

Das oben abgeleitete Ergebnis lässt sich vereinfachen, wenn man die **Lorentz-Eichung**

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0,} \quad (16.5.7)$$

die man als Verallgemeinerung der Coulomb-Eichung  $\nabla \cdot \underline{A} = 0$  verstehen kann. Dann erhält man die **Maxwell-Gleichung für das Vektorpotential**

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{A} = -\frac{4\pi}{c}\underline{j},} \quad (16.5.8)$$

die im SI-System die Form

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{A} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2}\underline{j} \quad (16.5.9)$$

annimmt.

In analoger Weise kann man einen Zusammenhang zwischen  $\phi$  und  $\rho$  ableiten:

$$\begin{aligned} 4\pi\rho &= \nabla \times \underline{E} = -\nabla \left( \nabla\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\nabla^2\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \underline{A}), \end{aligned} \quad (16.5.10)$$

woraus dann die **Maxwell-Gleichung für das Skalarpotential**

$$\boxed{\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -4\pi\rho} \quad (16.5.11)$$

folgt. Im SI-System hat diese Gleichung die Form

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (16.5.12)$$

Die Maxwell-Gleichungen für die Potentiale sind direkte Verallgemeinerungen der statischen Beziehungen (14.4.4) und (15.5.9), bei denen der Laplace-Operator  $\nabla^2$  durch den **d'Alembert-Operator**

$$\boxed{\square := \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \quad (16.5.13)$$

ersetzt wird. Hier deutet sich die Symmetrie zwischen Raum und Zeit, die charakteristisch für die Relativitätstheorie ist, schon an.

## 16.6 Ebene elektromagnetische Wellen

Die Maxwell-Gleichungen (16.5.8) und (16.5.11) implizieren die Existenz von elektromagnetischen Wellen. Im Vakuum ist  $\rho = 0$  und  $\underline{j} = 0$ , so dass sich die Gleichungen zu

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A} = 0, \quad (16.6.1)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0 \quad (16.6.2)$$

vereinfachen. Wir machen nun einen Ansatz in Form einer ebenen Welle, die sich in  $x$ -Richtung ausbreitet. Die Wellenfronten verlaufen daher parallel zur  $(y, z)$ -Ebene und  $\underline{A}$  und  $\phi$  sind unabhängig von  $y$  und  $z$ :

$$\underline{A} = \underline{A}(x, t), \quad \text{und} \quad \phi = \phi(x, t). \quad (16.6.3)$$

Wir erhalten dann vier eindimensionale Wellengleichungen

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A} = 0, \quad (16.6.4)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0 \quad (16.6.5)$$

für die drei Komponenten von  $\underline{A}$  und  $\phi$ . Deren allgemeine Lösungen sind aus der Vorlesung *Mathematische Methoden* bekannt:

$$A_j(x, t) = a_j^{(r)}(x - ct) + a_j^{(l)}(x + ct) \quad (j = x, y, z), \quad (16.6.6)$$

$$\phi(x, t) = \phi^{(r)}(x - ct) + \phi^{(l)}(x + ct) \quad (16.6.7)$$

also einer Kombination von links- und rechtslaufenden Wellen. Die Funktionen  $a_j^{(r,l)}$  und  $\phi^{(r,l)}$  hängen nur noch von *einer* Variablen  $x - ct$  bzw.  $x + ct$  ab.

Wir betrachten im folgenden nur den rechtslaufenden Anteil<sup>1</sup>. Es bleiben dann vier frei wählbare Funktionen  $a_j(\xi)$  und  $\phi(\xi)$  mit  $\xi = x - ct$ . Diese sind allerdings über die Lorentz-Eichung (16.5.7) miteinander verknüpft:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (16.6.8)$$

woraus

$$\frac{da_x}{d\xi} = \frac{d\phi}{d\xi} \quad (16.6.9)$$

folgt. Die beiden Funktionen sind daher bis auf eine additive Konstante gleich und wir setzen daher

$$\phi(\xi) = a_x(\xi). \quad (16.6.10)$$

Das elektrische Feld erhalten wir aus (16.5.2):

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \phi(x - ct) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} a_x(x - ct) = -\frac{d\phi}{d\xi} + \frac{da_x}{d\xi} = 0 \quad (16.6.11)$$

und

$$E_y = \frac{da_y}{d\xi}, \quad E_z = \frac{da_z}{d\xi}. \quad (16.6.12)$$

Für das Magnetfeld folgt aus (15.4.2)

$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{da_z}{d\xi} = -E_z, \quad B_z = -\frac{da_y}{d\xi} = E_y. \quad (16.6.13)$$

Hieraus lassen sich die wichtigsten Eigenschaften elektromagnetische Wellen ablesen (Abb. 16.6.1):

- Elektromagnetische Wellen sind **transversal**:  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung (hier: der  $x$ -Achse).
- $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  stehen senkrecht aufeinander:  $\underline{E} \perp \underline{B}$ , d.h.  $\underline{E} \cdot \underline{B} = 0$ .
- Ihre Beträge sind gleich<sup>2</sup>:  $|\underline{E}| = |\underline{B}|$ .

<sup>1</sup>Der entsprechende Index wird daher unterdrückt.

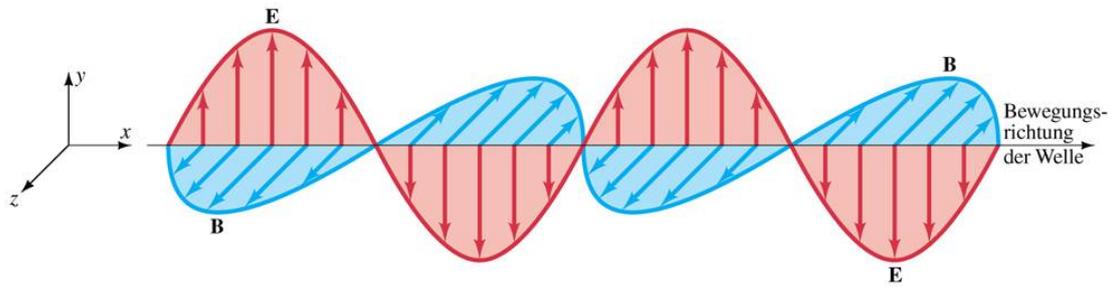


Abbildung 16.6.1: Elektromagnetische Welle: Elektrisches und magnetisches Feld sind stets senkrecht zueinander und stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. [3]

Diese Ergebnisse kann man leicht auf beliebige Ausbreitungsrichtungen  $\underline{e}$  verallgemeinern. Eine ebene Welle in  $\underline{e}$ -Richtung ist durch

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \underline{a}(\underline{r} \cdot \underline{e} - ct) = \underline{a}(\xi), \quad (16.6.14)$$

$$\phi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r} \cdot \underline{e} - ct) = \phi(\xi) \quad (16.6.15)$$

mit  $\xi = \underline{r} \cdot \underline{e} - ct$  gegeben. Die Felder ergeben sich dann zu

$$\underline{B} = \underline{e} \times \underline{a}', \quad \underline{E} = \underline{B} \times \underline{e} \quad \text{mit} \quad \underline{a}' = \frac{d\underline{a}}{d\xi}. \quad (16.6.16)$$

Die Energiedichte des Feldes einer elektromagnetischen Welle ist

$$u = \frac{1}{8\pi} (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2) = \frac{1}{4\pi} |\underline{E}|^2 = \frac{1}{4\pi} |\underline{B}|^2, \quad (16.6.17)$$

denn wegen  $|\underline{E}| = |\underline{B}|$  tragen beide Felder gleich viel zur Energiedichte bei. Die Energiestromdichte ergibt sich aus (16.3.14) zu

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi} (\underline{E} \times \underline{B}) = \frac{c}{4\pi} ((\underline{B} \times \underline{e}) \times \underline{B}) = \frac{c}{4\pi} |\underline{B}|^2 \underline{e} = c u \underline{e}. \quad (16.6.18)$$

Dieser Ausdruck hat eine einfache Interpretation: Die Energiedichte fließt mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  in Richtung des Ausbreitungsvektors  $\underline{e}$ .

## 16.7 Retardierte Potentiale und Dipolstrahlung

Wir wollen nun unsere früheren Überlegungen zum Fernfeld auf den Fall zeitabhängiger Ladungs- und Stromverteilungen verallgemeinern. Wir gehen dabei von den inhomogenen Maxwellgleichungen (16.5.8) und (16.5.11) für die Potentiale aus. Die Lösungen im statischen Fall haben wir bereits früher abgeleitet, siehe (14.3.3) für das elektrostatische Potential und (15.4.3) für das Vektorpotential in Coulomb-Eichung. Lösungen von (16.5.8) und (16.5.11), die den statischen Fall in natürlicher Art und Weise verallgemeinern, sind die **retardierte Potentiale**

$$\phi(\underline{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}', t - \frac{1}{c}|\underline{r} - \underline{r}'|)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}, \quad (16.7.1)$$

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}', t - \frac{1}{c}|\underline{r} - \underline{r}'|)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}. \quad (16.7.2)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Felder am Ort  $\underline{r}$  zur Zeit  $t$  durch die Ladungs- und Stromverteilung zu einer *früheren* Zeit

$$t' = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c} \quad (16.7.3)$$

bestimmt sind.  $\frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$  ist gerade die Laufzeit einer elektromagnetischen Welle von  $\underline{r}'$  nach  $\underline{r}$ .

Wir führen nun in (16.7.2) eine Multipolentwicklung durch. Dazu nehmen wir wieder an, dass  $|\underline{r}'| \ll |\underline{r}|$  und erhalten in führender Ordnung

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \approx \frac{1}{|\underline{r}|} = \frac{1}{r}, \quad t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c} \approx t - \frac{r}{c}. \quad (16.7.4)$$

Damit ergibt sich für das retardierte Vektorpotential

$$\underline{A}(\underline{r}, t) \approx \frac{1}{cr} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}', t - r/c), \quad (16.7.5)$$

das die Form eines Monopolterms hat. Dieser verschwindet in der Magnetostatik, wie wir in Kap. 15.7 gesehen haben. Wir drücken nun das Integral über die Stromdichte mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung durch die Zeitableitung des elektrischen Dipolmoments (14.6.6) aus:

$$\frac{d}{dt} \underline{d} = \frac{d}{dt} \int d^3r' \underline{r}' \rho(\underline{r}', t) = \int d^3r' \underline{r}' \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int d^3r' \underline{r}' (\nabla' \cdot \underline{j}). \quad (16.7.6)$$

Im Integral können wir komponentenweise partiell integrieren:

$$\int d^3r' x' (\nabla' \cdot \underline{j}) = \int d^3r' x' \left( \frac{\partial j_x}{\partial x'} + \frac{\partial j_y}{\partial y'} + \frac{\partial j_z}{\partial z'} \right) = - \int d^3r' j_x \quad (16.7.7)$$

und analog für die  $y'$ - und  $z'$ -Komponente. Somit erhalten wir für das Vektorpotential

$$\underline{A}(\underline{r}, t) \approx \frac{1}{cr} \frac{d}{dt} \underline{d}(t - r/c) = \frac{1}{cr} \dot{\underline{d}}(t - r/c). \quad (16.7.8)$$

Bis auf die  $r$ -Abhängigkeit des Koeffizienten  $1/cr$  (die zu Korrekturen höherer Ordnung führt), hat das Vektorpotential die Form (16.6.15) einer ebenen Welle, die sich in radialer Richtung  $\underline{e} = \underline{e}_r = \underline{r}/r$  ausbreitet. Wir können daher die Beziehungen aus (16.6.16) übernehmen und erhalten für die **Dipolstrahlung**

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = -\frac{1}{c^2 r} \left( \underline{e}_r \times \ddot{\underline{d}}(t - r/c) \right), \quad \underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{B} \times \underline{e}_r. \quad (16.7.9)$$

Die Feldstärken nehmen in radialer Richtung wie  $1/r$  ab, d.h. viel langsamer als bei statischen Feldern! Die Energiestromdichte fällt wie  $1/r^2$  ab und somit fließt ein endlicher Energiestrom ins Unendliche.

# Literaturverzeichnis

- [1] A.P. French: *Newtonsche Mechanik*, de Gruyter (1996)
- [2] K. Simonyi: *Kulturgeschichte der Physik*, Harri Deutsch (2001)
- [3] D.C. Giancoli: *Physik*, Pearson Studium (2009)
- [4] Abbildung aus Wikipedia
- [5] J. Krug: Skript zur Vorlesung *Theoretische Physik in 2 Semestern*
- [6] [www.astrophoto.de](http://www.astrophoto.de)
- [7] R. Montgomery: *A New Solution to the Three-Body Problem*, Notices of the AMS, Mai 2001, S. 471 ([www.ams.org/notices/200105/fea-montgomery.pdf](http://www.ams.org/notices/200105/fea-montgomery.pdf))
- [8] R. Sexl, H.K. Schmidt: *Raum - Zeit - Relativität*, Vieweg (1979)
- [9] L. Marder: *Reisen durch die Raum-Zeit*, Vieweg (1982)