
Andreas Schadschneider

Theoretische Physik: Elektrodynamik

Version: 25. Februar 2017

Wintersemester 2016/17

Inhaltsverzeichnis

III	Elektrodynamik	3
1	Mathematische Grundlagen	5
1.1	Vektorfelder	5
1.2	Ableitungen von Vektorfeldern	5
1.2.1	Gradient	6
1.2.2	Divergenz	8
1.2.3	Rotation	8
1.2.4	Höhere Ableitungen	9
1.3	Integralsätze	10
1.3.1	Integration von Skalar- und Vektorfeldern	10
1.3.2	Die Sätze von Gauß und Stokes	12
1.4	Die Delta-Funktion	13
1.4.1	Eindimensionale δ -Funktion	13
1.4.2	Dreidimensionale δ -Funktion	15
2	Elektrostatik	17
2.1	Das Coulomb-Gesetz	17
2.2	Das elektrische Feld	18
2.3	Das elektrostatische Potential	19
2.4	Die Feldgleichungen der Elektrostatik	20
2.5	Elektrostatische Energie	22
2.6	Multipol-Entwicklung	23
2.6.1	Herleitung	24
2.6.2	Abhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems	25
2.6.3	Punktdipol	26
2.7	Metallische Randbedingungen	27
3	Magnetostatik	31
3.1	Stationäre Ströme	32
3.2	Magnetfelder	33

3.3	Kontinuitätsgleichung	34
3.4	Vektorpotential	35
3.5	Feldgleichungen	36
3.6	Ampère'sches Gesetz	37
3.7	Magnetischer Dipol	39
3.7.1	Dipolfeld	39
3.7.2	Magnetischer Dipol im äußeren Feld	40
4	Die Maxwell'schen Gleichungen	41
4.1	Das Induktionsgesetz	41
4.2	Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom	43
4.3	Energie des elektromagnetischen Feldes	44
4.4	Impuls des elektromagnetischen Feldes	46
4.5	Maxwell-Gleichungen für die Potentiale	47
4.6	Ebene elektromagnetische Wellen	49
4.7	Retardierte Potentiale und Dipolstrahlung	51
5	Relativistische Elektrodynamik	53
5.1	Ein einfaches Beispiel: Strom in einem Draht	53
5.2	Elektrodynamik im Vierer-Formalismus	55

Teil III
Elektrodynamik

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

Bevor wir mit der Theorie der Elektrodynamik begonnen, wollen wir an einige wichtige mathematische Konzepte erinnern, die für die Theorie wesentlich sind.

1.1 Vektorfelder

In der Vorlesung *Mathematische Methoden* und im Mechanik-Teil der Vorlesung haben wir schon verschiedene Arten von Funktionen kennengelernt, z.B.

- Funktionen einer Variablen $f(x)$
- skalare Funktionen mehrerer Variablen $F(x_1, \dots, x_n)$, z.B. die Lagrange-Funktion
- vektorwertige Funktionen einer Variablen, z.B. die Bahnkurve $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eines Teilchens, seine Geschwindigkeit und Beschleunigung, ...
- **Vektorfelder**, also vektorwertige Funktionen des Ortes¹

$$\underline{V} : \underline{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \underline{V}(\underline{r}) \in \mathbb{R}^3 \quad (1.1.1)$$

mit den Komponenten $\underline{V} = (V_x, V_y, V_z)$.

Die Elektrodynamik benutzt vor allem Vektorfelder zur mathematischen Beschreibung der physikalischen Objekte. Anschaulich wird jedem Punkt \underline{r} des Raumes ein Vektorpfeil $\underline{V}(\underline{r})$ "angeheftet". Bei differenzierbaren Vektorfeldern kann man sich die Pfeile durch **Feldlinien** verbunden denken, die in jedem Punkt tangential zu den Vektoren laufen (Abb. 1.1.1).

1.2 Ableitungen von Vektorfeldern

Um die räumliche Veränderung von Vektorfeldern quantitativ zu beschreiben, kann man die jeweils drei partiellen Ableitungen der drei Komponenten V_x, V_y, V_z , also durch die 3×3 -Matrix

¹Die Felder können zusätzlich auch von der Zeit t abhängen.

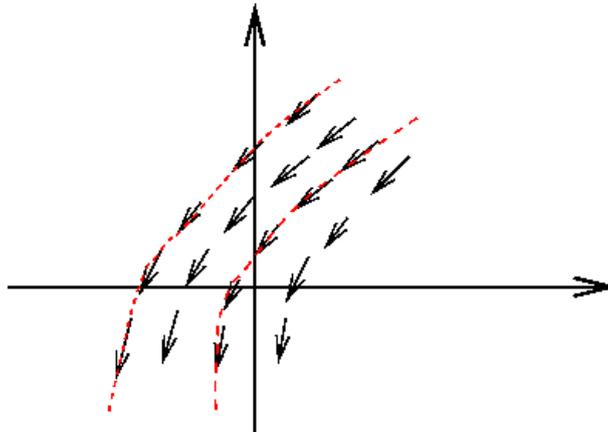


Abbildung 1.1.1: Ein Vektorfeld mit Feldlinien (rot).

$(\partial V_i / \partial x_j)_{i,j=1,2,3}$. In der Praxis spielen aber nur gewisse Kombinationen dieser Ableitungen eine Rolle, die sich elegant mit Hilfe des **Nabla-Operators**

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.2.1)$$

ausdrücken lassen. Dieser kann auf skalare Funktionen und Vektorfelder angewendet werden, was folgende Differentialoperationen liefert.

1.2.1 Gradient

Durch die Anwendung des Nabla-Operators auf eine skalare Funktion $F(\underline{r})$ des Ortes erhält man das Vektorfeld

$$\nabla F(\underline{r}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) =: \text{grad } F, \quad (1.2.2)$$

das man als den **Gradienten von F** bezeichnet. Das Vektorfeld ∇F hat folgende Eigenschaften:

- Der Gradient steht senkrecht auf den Flächen, auf denen F konstant ist.
- ∇F zeigt in die Richtung, in der F am stärksten zunimmt.

Wir machen uns diese Eigenschaften am Beispiel $F(\underline{r}) = |\underline{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ klar. In diesem Fall ist $\nabla F = (2x, 2y, 2z) = 2\underline{r}$. Die Flächen konstanten F 's sind Kugelschalen, und ∇F zeigt radial nach außen.

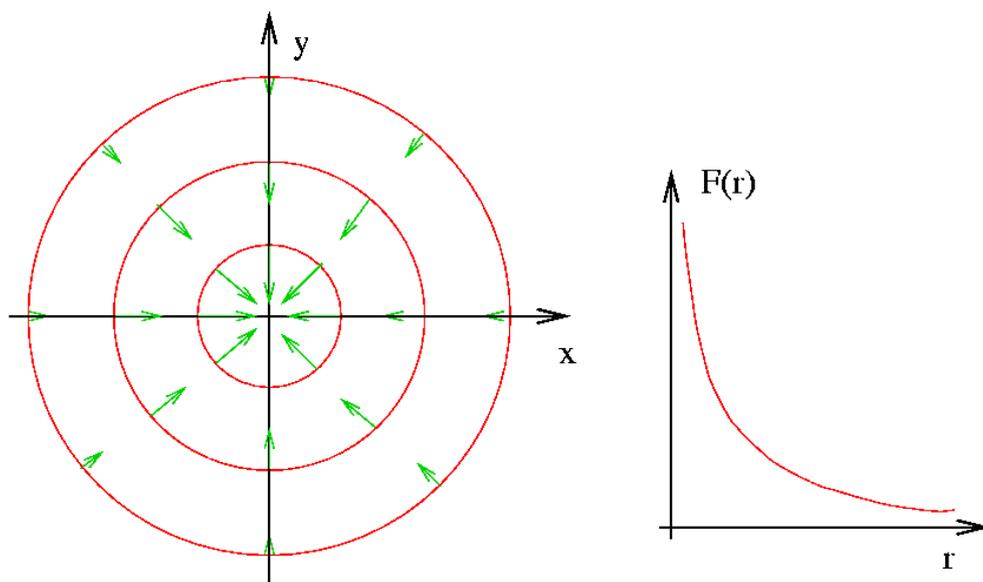


Abbildung 1.2.1: Gradientenfeld einer monoton fallenden radialsymmetrischen Funktion.

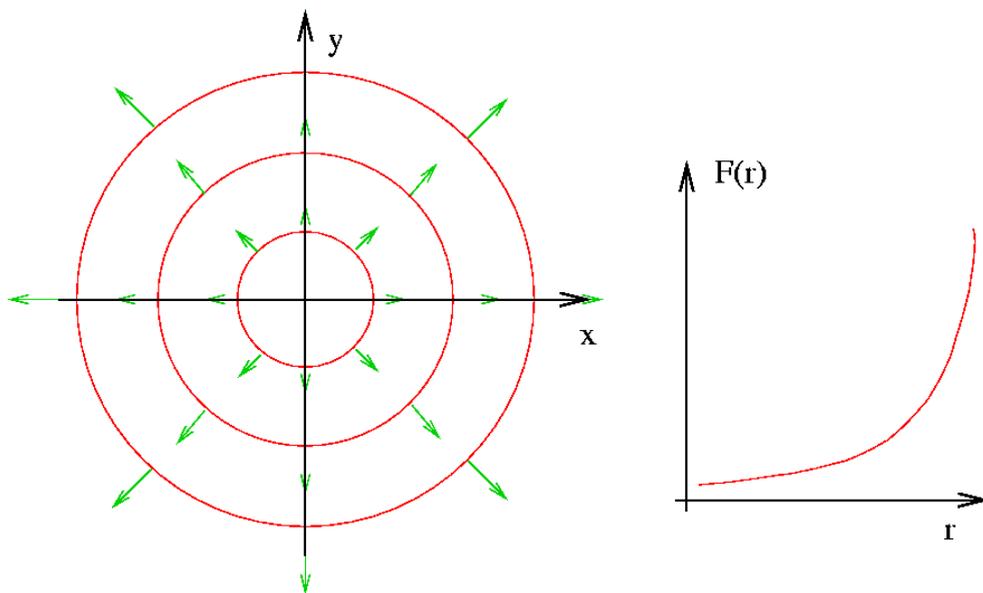


Abbildung 1.2.2: Gradientenfeld einer monoton wachsenden radialsymmetrischen Funktion.

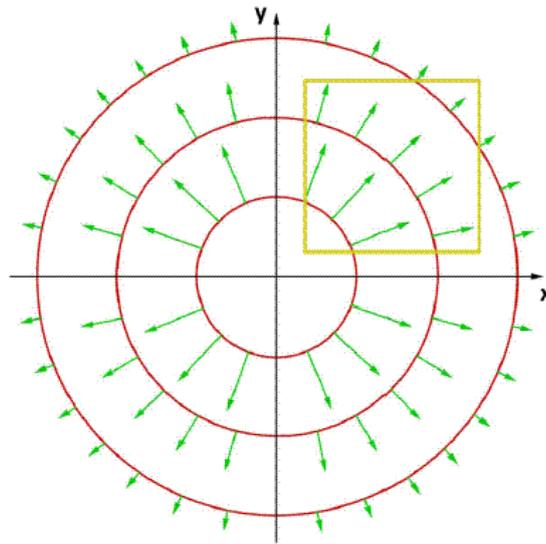


Abbildung 1.2.3: Illustration eines radialsymmetrischen Vektorfeldes, dessen Betrag mit zunehmendem Abstand vom Ursprung abnimmt. Je nach funktionaler Form des Abfalls ist die Divergenz positiv oder negativ. Für den Spezialfall $V(r) \sim 1/r^2$ (das Coulombfeld) ist die Divergenz außerhalb des Ursprung identisch Null, siehe (1.4.1).

1.2.2 Divergenz

Die **Divergenz** entsteht durch skalare Multiplikation des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld \underline{V} . Sie liefert daher eine skalare Funktion

$$\nabla \cdot \underline{V}(\underline{r}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \text{div } \underline{V}. \quad (1.2.3)$$

Die Divergenz kann als Quellstärke des Vektorfeldes \underline{V} interpretiert werden. Sie beschreibt für $\nabla \cdot \underline{V}(\underline{r}) > 0$ das Auseinanderlaufen und für $\nabla \cdot \underline{V}(\underline{r}) < 0$ das Zusammenlaufen der Feldlinien. Als einfaches Beispiel betrachten wir das radiale Feld $\underline{V}(\underline{r}) = a\underline{r}$ mit einer Konstanten a . Die Divergenz ergibt sich zu $\nabla \cdot \underline{V} = 3a$. Sie ist > 0 für $a > 0$ und < 0 für $a < 0$.

1.2.3 Rotation

Die **Rotation** oder **Wirbelstärke** entsteht durch das ‘‘Vektorprodukt’’ des Nabla-Operators mit einem Vektorfeld \underline{V} und liefert daher wieder ein Vektorfeld:

$$\nabla \times \underline{V} = \text{rot } \underline{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right). \quad (1.2.4)$$

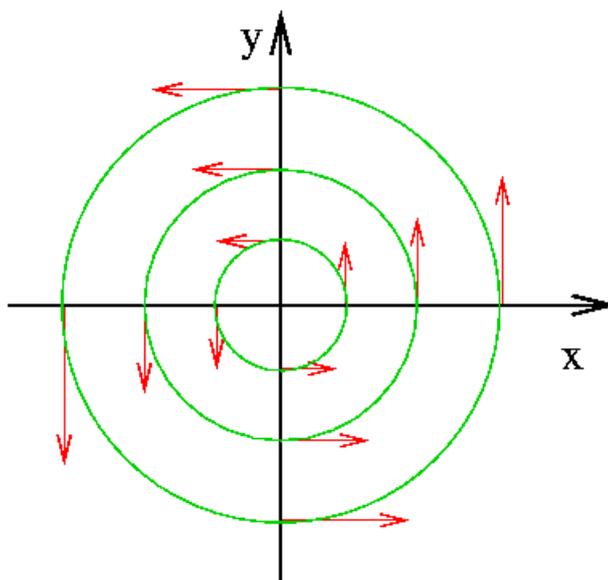


Abbildung 1.2.4: Das Vektorfeld (1.2.7).

Mit Hilfe des sog. **Levi-Cevit -Symbols** ϵ_{ijk} können wir dies auch etwas kompakter als

$$(\text{rot } \underline{V})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} V_k \quad (1.2.5)$$

schreiben, wobei

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ zyklisch aus } (1, 2, 3) \\ -1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ antizyklisch aus } (1, 2, 3) \\ 0, & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Als Beispiel betrachten wir das Vektorfeld

$$\underline{V}(\underline{r}) = (-y, x, 0), \quad (1.2.7)$$

dessen Rotation durch $\nabla \times \underline{V} = (0, 0, 2) = 2\underline{e}_z$ gegeben ist.

1.2.4 Höhere Ableitungen

Höhere Ableitungen erhält man durch mehrfache Anwendung von ∇ , wobei aber zu beachten ist, ob man es mit einem Vektor- oder Skalarfeld zu tun hat.

Für eine skalare Funktion F hat man z.B.

$$\text{div}(\text{grad } F) = \nabla \cdot \nabla F = \nabla \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} =: \nabla^2 F \quad (1.2.8)$$

mit dem **Laplace-Operator**

$$\Delta := \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.2.9)$$

Außerdem gilt für jede skalare Funktion F

$$\nabla \times \nabla F = \text{rot}(\text{grad } F) = 0 \quad (1.2.10)$$

wie wir in den Übungen zeigen werden.

Ähnlich gilt für jedes Vektorfeld \underline{V}

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{V}) = \text{div}(\text{rot } \underline{V}) = 0. \quad (1.2.11)$$

Unter schwachen Zusatzvoraussetzungen gilt auch die Umkehrung dieser Aussagen:

$$\nabla \times \underline{V} = 0 \implies \text{Es gibt eine skalare Funktion } F \text{ mit } \underline{V} = \nabla F, \quad (1.2.12)$$

$$\nabla \cdot \underline{V} = 0 \implies \text{Es gibt ein Vektorfeld } \underline{W} \text{ mit } \underline{V} = \nabla \times \underline{W}. \quad (1.2.13)$$

1.3 Integralsätze

Die Integralsätze können als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b dx \frac{df}{dx} = f(b) - f(a) \quad (1.3.1)$$

auf Vektorfelder aufgefasst werden. Zunächst wollen wir uns aber allgemein mit der Integration von Skalar- und Vektorfeldern beschäftigen.

1.3.1 Integration von Skalar- und Vektorfeldern

Wegintegral eines Vektorfeldes

Wir betrachten einen Weg, der durch seine Bogenlänge s parametrisiert sei (vgl. Mechanikteil),

$$C = \{\underline{r}(s) \mid s_1 \leq s \leq s_2\}, \quad (1.3.2)$$

zwischen den Punkten $\underline{r}(s_1)$ und $\underline{r}(s_2)$. Das Wegintegral eines Vektorfeldes \underline{V} entlang C ist dann definiert durch (vgl. Mechanikteil, Berechnung der Arbeit)

$$\int_C d\underline{l} \cdot \underline{V} = \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{d\underline{r}}{ds} \cdot \underline{V}(\underline{r}(s)) = \int_{s_1}^{s_2} ds \underline{\tau}(s) \cdot \underline{V}(\underline{r}(s)), \quad (1.3.3)$$

wobei wir $d\underline{l} = \underline{\tau} ds$ durch den Tangentialvektor $\underline{\tau}$ ausgedrückt haben.

Für geschlossene Wege, d.h. $\underline{r}(s_1) = \underline{r}(s_2)$, schreibt man auch

$$\oint_C d\underline{l} \cdot \underline{V}. \quad (1.3.4)$$

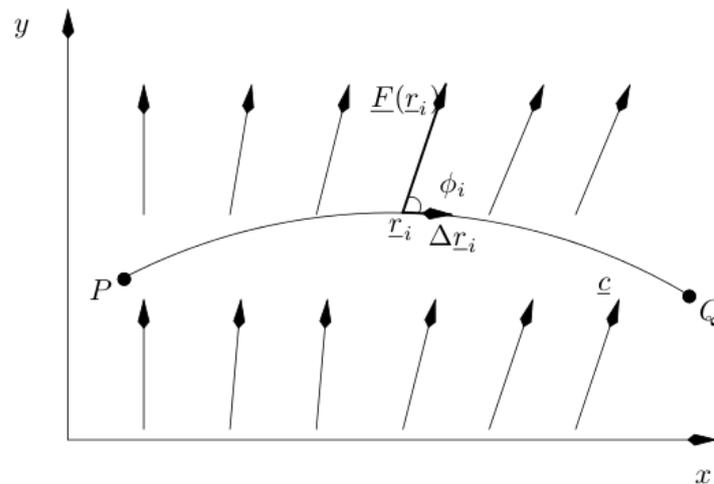


Abbildung 1.3.1: Zur Definition des Wegintegrals.

Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche

Wir betrachten eine zweidimensionale Fläche \mathcal{F} , die von den Feldlinien eines Vektorfeldes \underline{V} durchdrungen wird (siehe Abb. 1.3.2). Wenn wir nun \mathcal{F} in infinitesimale Flächenelemente $d\underline{f} = \underline{n}df$ mit der Flächennormalen \underline{n} zerlegen, können wir den Fluss von \underline{V} durch \mathcal{F} definieren:

$$\int_{\mathcal{F}} d\underline{f} \cdot \underline{V} = \int_{\mathcal{F}} df \underline{n} \cdot \underline{V}. \quad (1.3.5)$$

Für eine geschlossene Fläche, z.B. eine Kugelschale, schreibt man wieder

$$\oint_{\mathcal{F}} d\underline{f} \cdot \underline{V}. \quad (1.3.6)$$

Volumenintegral einer skalaren Funktion F über ein Volumen V

Das Volumenintegral einer skalaren Funktion ist als Mehrfachintegral

$$\int_V d^3r F(\underline{r}) \quad (1.3.7)$$

mit dem Volumenelement $dV = d^3r$ definiert. In kartesischen Koordinaten ist $d^3r = dx dy dz$.

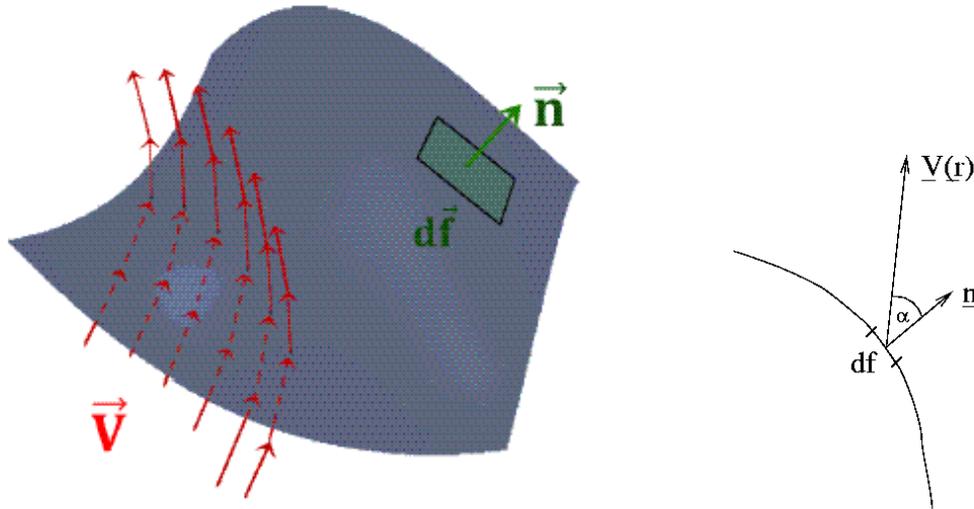


Abbildung 1.3.2: Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche.

1.3.2 Die Sätze von Gauß und Stokes

Gradientenfelder:

Für Gradientenfelder sind die Wegintegrale wegunabhängig, d.h. für jeden Weg C zwischen $\underline{r}(s_1)$ und $\underline{r}(s_2)$ gilt

$$\int_C d\underline{l} \cdot \nabla F = F(\underline{r}(s_2)) - F(\underline{r}(s_1)). \quad (1.3.8)$$

Dies ist offensichtlich analog zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung(1.3.1): Ein eindimensionales Integral wird auf die Differenz von zwei Funktionswerten, also ein 0-dimensionales Objekt, reduziert.

Speziell für geschlossene Wege gilt daher

$$\oint_C d\underline{l} \cdot \nabla F = 0. \quad (1.3.9)$$

Satz von Stokes:

Wir betrachten nun eine endliche Fläche \mathcal{F} . Deren Rand ist dann ein geschlossener Weg $\partial\mathcal{F}$. Für jedes Vektorfeld \underline{V} gilt dann der **Satz von Stokes**:

$$\boxed{\int_{\mathcal{F}} d\underline{f} \cdot (\nabla \times \underline{V}) = \oint_{\partial\mathcal{F}} d\underline{l} \cdot \underline{V}}, \quad (1.3.10)$$

d.h. das zweidimensionale Integral über eine Ableitung von \underline{V} wird auf ein eindimensionales Integral über \underline{V} reduziert.

Satz von Gauß:

Wir betrachten nun ein beschränktes Volumen \mathcal{V} , dessen Rand daher eine geschlossene Fläche $\partial\mathcal{V}$ bildet. Für jedes Vektorfeld \underline{V} gilt dann der **Satz von Gauß**:

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} d^3r \nabla \cdot \underline{V} = \oint_{\partial\mathcal{V}} d\underline{f} \cdot \underline{V}}, \quad (1.3.11)$$

d.h. das dreidimensionale Integral über eine Ableitung von \underline{V} wird auf ein zweidimensionales Integral über \underline{V} reduziert.

1.4 Die Delta-Funktion

Zur Motivation betrachten wir das Vektorfeld $\underline{V}(\underline{r}) = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}$, das eine wichtige Rolle in der Elektrodynamik spielt. Man rechnet leicht nach, dass

$$\nabla \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} = 0 \quad \text{für alle } \underline{r} \neq 0. \quad (1.4.1)$$

Wir legen nun eine Vollkugel K_R vom Radius R um den Ursprung. Deren Oberfläche ∂K_R ist dann eine Kugelschale vom Radius R . Wir können nun den Fluss des Vektorfeldes \underline{V} durch diese Kugelschale bestimmen:

$$\oint_{\partial K_R} d\underline{f} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} = \int_{\partial K_R} d\Omega R^2 \frac{r^2}{r^4} = \int d\Omega = 4\pi, \quad (1.4.2)$$

wobei wir die Integration in Kugelkoordinaten durchgeführt und $d\underline{f} = R^2 d\Omega$ und $\underline{n} = \frac{\underline{r}}{r} = \hat{r}$ benutzt haben. Das Flussintegral ist also unabhängig vom Radius R ! Dies bedingt wegen (1.4.1) einen (scheinbaren) Widerspruch zum Gauß'schen Satz, denn

$$4\pi = \oint_{\partial K_R} d\underline{f} \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} = \int_{K_R} d^3r \nabla \cdot \underline{V} \stackrel{?}{=} 0. \quad (1.4.3)$$

Dies lässt sich aber mit Hilfe der Dirac'schen Deltafunktion auflösen!

1.4.1 Eindimensionale δ -Funktion

Wir betrachten eine kastenförmige Funktion (Abb. 1.4.1)

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{für } x \in [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (1.4.4)$$

Diese Funktionen sind normiert, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x) dx = 1. \quad (1.4.5)$$

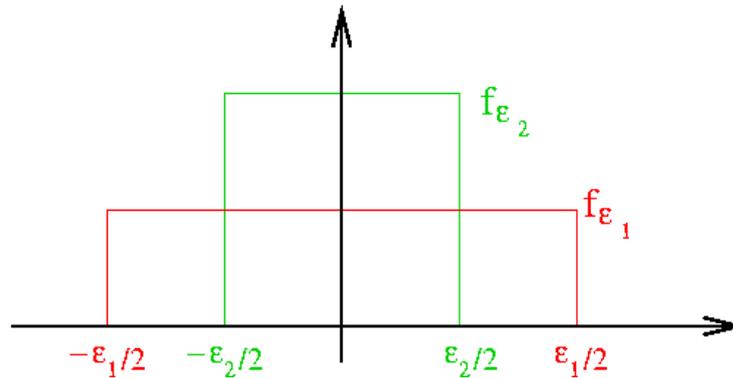


Abbildung 1.4.1: Die Delta-Funktion ist Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ einer Folge von Kastenfunktionen $f_\epsilon(x)$.

Für beliebige Funktionen $g(x)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x)g(x)dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} g(x)dx, \quad (1.4.6)$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x - x_0)g(x)dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0 - \epsilon/2}^{x_0 + \epsilon/2} g(x)dx, \quad (1.4.7)$$

wobei das letzte Integral als Mittelwert von g über das Intervall $[x_0 - \epsilon/2, x_0 + \epsilon/2]$ interpretiert werden kann. Es gilt daher

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x - x_0)g(x)dx = g(x_0), \quad (1.4.8)$$

Wir definieren nun die **Delta-Funktion** durch

$$\delta(x - x_0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x - x_0), \quad (1.4.9)$$

die eigentlich gar keine Funktion ist, da formal

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & (x \neq x_0) \\ \infty & (x = x_0) \end{cases}. \quad (1.4.10)$$

Es handelt sich um eine verallgemeinerte Funktion oder **Distribution**, die durch ihre Wirkung auf eine Testfunktion $g(x)$ definiert ist:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)g(x) = g(x_0)} \quad (1.4.11)$$

für jedes x_0 und jede Funktion $g(x)$.

Alternativ kann man die Delta-Funktion über jede beliebige Folge von Funktionen $f_\epsilon(x)$ mit den Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x) dx = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = 0 \quad (\text{für } x \neq 0) \quad (1.4.12)$$

definieren. In den Übungen werden wir hierzu weitere Beispiele kennenlernen.

1.4.2 Dreidimensionale δ -Funktion

Die dreidimensionale Delta-Funktion ist durch

$$\delta(\underline{r}) := \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (1.4.13)$$

gegeben². Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \delta(\underline{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y) \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(z) = 1 \quad (1.4.14)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3r \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) g(\underline{r}) = g(\underline{r}_0) \quad (1.4.15)$$

Mit Hilfe der Delta-Funktion kann nun der ‘‘Widerspruch’’ (1.4.3) aufgelöst werden:

$$\nabla \cdot \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} = 4\pi\delta(\underline{r}), \quad (1.4.16)$$

d.h. die Delta-Funktion entsteht in drei Dimensionen durch die Ableitung einer relativ harmlosen Funktion. Dies gilt aber nicht im eindimensionalen Fall!

²Man beachte, dass allgemeine Produkte von Delta-Funktionen nicht definiert sind!

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Das Coulomb-Gesetz

Das **Coulomb-Gesetz** beschreibt die Kraft \underline{F}_{12} zwischen zwei Punktladungen q_1, q_2 an den Orten $\underline{r}_1, \underline{r}_2$:

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^2} \cdot \frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|}. \quad (2.1.1)$$

Es handelt sich also um eine Zentralkraft mit der gleichen Abstandsabhängigkeit ($\propto 1/r^2$) wie bei der Gravitationskraft. Allerdings können die Ladungen unterschiedliche Vorzeichen haben, im Gegensatz zu Massen. Daher ist die Coulombkraft attraktiv für $q_1 q_2 < 0$ und repulsiv für $q_1 q_2 > 0$.

Die Konstante k in (2.1.1) hängt von der Wahl der Ladungseinheit ab. Es gibt zwei wichtige Einheitensysteme:

- Das gesetzliche **SI-System** (oder **MKSA-System**) ist in der Experimentalphysik gebräuchlich. Die Ladungseinheit ist hier das **Coulomb C**. Sie wird aus der Stromeinheit Ampère (A) abgeleitet: $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$. Das Ampère wiederum wird über die Kraftwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen parallelen Drähten definiert. Im SI-System ist die Konstante k daher durch

$$k_{SI} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \text{ c}^2 \text{ NA}^{-2} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \quad (2.1.2)$$

gegeben, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

- Im **Gauß-** oder **cgs-System**, das in der Theoretischen Physik bevorzugt wird, erhält die Ladung keine eigene Einheit. Stattdessen wird sie durch die Wahl

$$k_{cgs} = 1 \quad (2.1.3)$$

definiert. Die Ladungseinheit wird dann als **electrostatic unit (esu)** bezeichnet:

$$1 \text{ esu} = 1(\text{cm})^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}. \quad (2.1.4)$$

Die Umrechnung zum SI-System erfolgt über

$$1 \text{ esu} = 10c^{-1} \text{ cmA} \approx 3.3 \cdot 10^{-10} \text{ C} \quad (2.1.5)$$

und die Elementarladung hat den Wert

$$\begin{aligned} e &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ &= 4.803 \cdot 10^{-10} \text{ cm} . \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Der große Vorteil des Gauß'schen Systems liegt darin, dass elektrische Felder \underline{E} und magnetische Felder \underline{B} die gleiche Einheit haben¹. Dies trägt der Äquivalenz von elektrischen und magnetischen Feldern Rechnung, die wir später im Rahmen der Relativitätstheorie erkennen werden.

Da Gravitations- und Coulomb-Gesetz die gleiche Struktur haben, können wir ihre Stärken über typische Massen und Ladungen direkt vergleichen. Betrachten wir z.B. die Wechselwirkung eines Protons mit einem Elektron, so erhalten wir

$$\frac{|\underline{F}_{\text{Coulomb}}|}{|\underline{F}_{\text{grav}}|} \approx 2 \cdot 10^{39} . \quad (2.1.7)$$

In diesem Sinne ist also die elektromagnetische Wechselwirkung viel stärker und wir können Gravitationseffekte z.B. in der Atom- und Festkörperphysik vernachlässigen. Auf großen Skalen (z.B. in der Astronomie) sieht dies aber anders aus! Hier dominiert die Gravitation, da makroskopische Körper weitgehend ladungsneutral sind.

2.2 Das elektrische Feld

Wir betrachten N Punktladungen q_1, \dots, q_N an den (festen) Orten $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N$ und fragen nach der Kraft auf eine weitere Ladung q am Ort \underline{r} , die **Probeladung**. Auf Grund des Superpositionsprinzips für Kräfte gilt dann

$$\underline{F}(\underline{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i) . \quad (2.2.1)$$

Die Beziehung

$$\boxed{\underline{F}(\underline{r}) = q\underline{E}(\underline{r})} \quad (2.2.2)$$

definiert dann das von den Punktladungen q_1, \dots, q_N erzeugte **elektrische Feld**

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} (\underline{r} - \underline{r}_i)} \quad (2.2.3)$$

¹Im Rahmen dieser Vorlesung werden wir in erster Linie das cgs-System verwenden. Alle grundlegenden Gleichungen werden aber auch in ihrer SI-Form angegeben.

über die auf die Probeladung q wirkende Kraft. Wir nehmen hierbei an, dass q sehr klein ist und die anderen Ladungen daher nicht beeinflusst.

Der **Feldbegriff** ist ein wichtiges neues Konzept im Vergleich zur Newton'schen Mechanik. Dort fasst man die Kräfte zwischen Körpern als Fernwirkungen auf, auf deren physikalische Hintergründe nicht weiter eingegangen wird. In der Elektrodynamik ist aber das die elektromagnetischen Wechselwirkungen vermittelnde Feld ein eigenständiges physikalisches Objekt. Kräfte werden dabei als Nahwirkungen des Feldes am des betrachteten Körpers aufgefasst.

Wir gehen nun von Punktladungen zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen $\rho(\underline{r})$ über. Ein infinitesimales Volumenelement dV am Ort \underline{r} enthält die infinitesimale Ladung $\rho(\underline{r})dV$ und das elektrische Feld am Ort \underline{r} ergibt sich durch den entsprechenden Grenzübergang in (2.2.3) zu

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}') \quad (2.2.4)$$

Im SI-System hat man

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} (\underline{r} - \underline{r}'). \quad (2.2.5)$$

Betrachten wir speziell ein System aus Punktladungen, d.h. die Ladungsdichte

$$\rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\underline{r} - \underline{r}_i), \quad (2.2.6)$$

so erhält man wieder die Beziehung (2.2.3).

2.3 Das elektrostatische Potential

Die Coulombkraft ist eine Zentralkraft und daher konservativ. Somit existiert ein Potential V_{12} mit $\underline{F}_{12} = -\nabla V_{12}$:

$$V_{12}(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}. \quad (2.3.1)$$

Hiermit können wir (2.2.4) umschreiben:

$$\underline{E}(\underline{r}) = - \int d^3r' \nabla_{\underline{r}} \left(\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) = -\nabla_{\underline{r}} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} =: -\nabla \phi(\underline{r}) \quad (2.3.2)$$

wobei der Nabla-Operator nur auf \underline{r} wirkt und daher vor das Integral gezogen werden kann. $\phi(\underline{r})$ ist das **elektrostatische Potential**:

$$\phi(\underline{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}. \quad (2.3.3)$$

Im SI-System gilt

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}. \quad (2.3.4)$$

Die potentielle Energie einer Probeladung q am Ort \underline{r} ist

$$V(\underline{r}) = q\phi(\underline{r}), \quad (2.3.5)$$

womit klar wird, warum ϕ als ‘‘Potential’’ bezeichnet wird.

2.4 Die Feldgleichungen der Elektrostatik

Das elektrische Feld \underline{E} bzw. das Potential ϕ sind im Prinzip durch Integration aus der Ladungsverteilung bestimmbar. Manchmal ist es aber einfacher, sie mit Hilfe einer (partiellen) Differentialgleichung zu berechnen. Diese wollen wir im Folgenden ableiten. Dazu erinnern wir uns zunächst an den **Helmholtz’schen Fundamentalsatz** der Vektoranalysis:

Jedes Vektorfeld $\underline{V}(\underline{r})$ ist durch Angabe seiner Wirbel $\nabla \times \underline{V} = \text{rot } \underline{V}$ und seiner Quellen $\nabla \cdot \underline{V} = \text{div } \underline{V}$ eindeutig festgelegt.

Damit ist das elektrische Feld \underline{E} vollständig durch Ausdrücke für $\nabla \times \underline{E}$ und $\nabla \cdot \underline{E}$ charakterisiert. In der Elektrostatik ist \underline{E} konservativ und somit

$$\boxed{\nabla \times \underline{E} = 0.} \quad (2.4.1)$$

Wir müssen daher nur noch $\nabla \cdot \underline{E}$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{E} &= \int d^3r' \rho(\underline{r}') \nabla \cdot \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \\ &= \int d^3r' \rho(\underline{r}') 4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}') = 4\pi \rho(\underline{r}), \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

wobei wir (1.4.16) benutzt haben.

Wir erhalten so als Feldgleichung für das elektrische Feld das **Gauß’sche Gesetz** (in differentieller Form)

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \rho} \quad (2.4.3)$$

Da $\underline{E} = -\nabla\phi$ erfüllt das elektrostatische Potential die **Poisson-Gleichung**

$$\boxed{\nabla^2 \phi = -4\pi \rho} \quad (2.4.4)$$

Im SI-System gilt $\nabla \cdot \underline{E} = -\nabla^2 \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$.

Als Anwendung des Gauß’sches Gesetzes berechnen wir das Feld einer homogen geladenen Kugel vom Radius R . Die Ladungsdichte ist

$$\rho(\underline{r}) = \begin{cases} \rho_0 & (|\underline{r}| < R) \\ 0 & (|\underline{r}| \geq R) \end{cases} \quad (2.4.5)$$

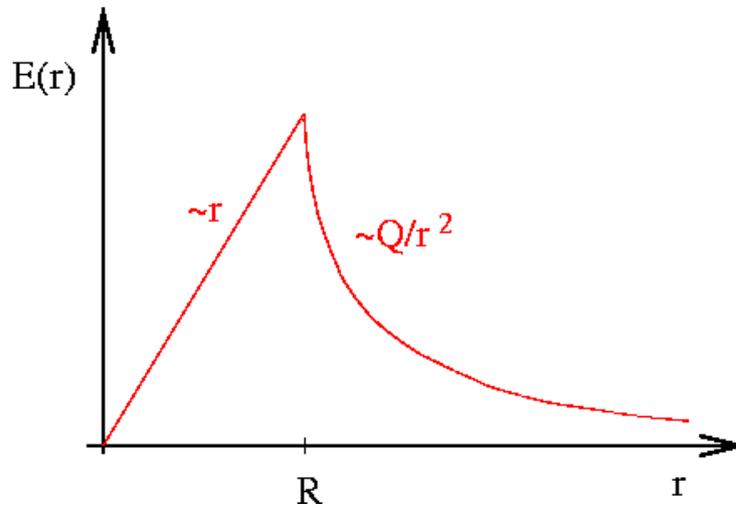


Abbildung 2.4.1: Betrag des elektrisches Feldes einer homogen geladenen Kugel vom Radius R und Gesamtladung Q .

Durch Kombination von Gauß'schem Gesetz und auß'schem Satz erhalten wir zunächst ganz allgemein

$$\int_V d^3r \rho(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r \nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E}. \quad (2.4.6)$$

Wir integrieren nun speziell über eine Kugel K_r vom Radius r um den Ursprung. Dann gilt

$$\int_{K_r} d^3r \rho(\underline{r}) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 & (r < R) \\ \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 =: Q & (r \geq R) \end{cases}, \quad (2.4.7)$$

wobei Q die Gesamtladung der Kugel ist.

Den Fluss von \underline{E} durch ∂K_r können wir mittels eines Symmetriearguments leicht bestimmen.

- Die Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$ ist radialsymmetrisch: $\rho(\underline{r}) = \rho(r)$.
- Aus der Poisson-Gleichung folgt, dass auch das Potential radialsymmetrisch ist: $\phi(\underline{r}) = \phi(r)$.
- Somit zeigt das elektrische Feld $\underline{E} = -\nabla\phi$ als Gradient einer radialsymmetrischen Funktion in radiale Richtung.

Das elektrische Feld hat also die Form $\underline{E}(\underline{r}) = E(r)\hat{r}$.

Nun können wir das Flussintegral bestimmen. Das Flächenelement der Kugeloberfläche zeigt radial nach aussen: $d\underline{f} = \hat{r}df$ und daher

$$\oint_{\partial K_r} d\underline{f} \cdot \underline{E} = \int_{\partial K_r} df E(r) \hat{r} \cdot \hat{r} = E(r) \int_{\partial K_r} df = 4\pi r^2 E(r). \quad (2.4.8)$$

Dabei haben wir benutzt, dass $E(r)$ auf der Kugeloberfläche konstant ist. Somit erhalten wir für das elektrische Feld

$$E(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\rho_0 r & (r < R) \\ \frac{Q}{r^2} & (r \geq R) \end{cases}. \quad (2.4.9)$$

Das Feld außerhalb der Kugel ist also identisch dem einer Punktladung im Mittelpunkt, deren Ladung Q gleich der Gesamtladung der Kugel ist.

2.5 Elektrostatische Energie

In Analogie zur Mechanik definiert man die potentielle Energie von N Punktladungen, die über die Coulombkraft miteinander wechselwirken, durch

$$V = \sum_{i,j (i < j)} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i,j (i \neq j)} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}. \quad (2.5.1)$$

Beim Übergang zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung wird hieraus

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int d^3 r \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(\underline{r}) \int d^3 r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(\underline{r})\phi(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r (\nabla \cdot \underline{E})\phi \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3 r \underline{E} \cdot \nabla \phi \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3 r |\underline{E}|^2. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Dabei haben wir zunächst ausgenutzt, dass die Einschränkung $\underline{r} \neq \underline{r}'$ im Integral nicht nötig ist. Danach wurden die Identitäten (2.3.3) und (2.4.3) verwendet und schließlich partiell integriert, wobei angenommen wurde, dass Potentiale und Felder im Unendlichen verschwinden.

Wir definieren daher die **Energiedichte des elektrostatischen Feldes** als

$$\boxed{u(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi} |\underline{E}(\underline{r})|^2} \quad (2.5.3)$$

bzw. im SI-System durch

$$u(\underline{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} |\underline{E}(\underline{r})|^2. \quad (2.5.4)$$

Die oben abgeleiteten unterschiedlichen Ausdrücke für die Energie entsprechen verschiedenen Standpunkten:

- In der Form $V = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho(\underline{r})\phi(\underline{r})$ wird die Energie, wie in der Mechanik, der Wechselwirkung zwischen den Teilchen zugeordnet.

- Die Form $V = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\underline{r})\phi(\underline{r})$ kann als potentielle Energie der Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$ im Potential $\phi(\underline{r})$ interpretiert werden. Dabei berücksichtigt der Faktor $\frac{1}{2}$, dass es sich um das von der Ladungsverteilung selbst erzeugte Potential handelt. Handelt es sich um ein äußeres Potential, so fehlt dieser Faktor.
- Im Ausdruck $V = \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\underline{E}|^2$ wird die Energie ganz dem (von ρ erzeugten) elektrischen Feld zugeordnet.

Bei den Interpretationen ist noch zu beachten, dass sich die auftretenden Volumenintegrale i.a. über verschiedenen Bereiche erstrecken. Bei räumlich beschränkten Ladungsverteilungen ist in der zweiten Form nur über diesen Bereich zu integrieren, während in der letzten Form immer über den ganzen Raum integriert wird.

Als Beispiel wollen wir die elektrostatische Energie einer homogen geladenen Kugel vom Radius R und der Gesamtladung Q bestimmen. Aus Dimensionsgründen erwarten wir, dass $V \sim \frac{Q^2}{R}$ gilt. Die exakte Rechnung liefert wegen

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi} E^2(\underline{r}) = \frac{Q^2}{8\pi} \begin{cases} r^2/R^6 & (r < R) \\ 1/r^4 & (r \geq R) \end{cases} \quad (2.5.5)$$

und somit

$$V = \int u(\underline{r}) d^3r = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}. \quad (2.5.6)$$

Bei fester Gesamtladung Q divergiert V für $R \rightarrow 0$. Eine Punktladung hätte daher eine unendliche Energie. Ähnliche Divergenzen sind die Quelle vieler mathematischer und konzeptioneller Probleme in Feldtheorien und eine Motivation für die Stringtheorie, in der es keine Punktteilchen gibt.

Man kann einen **klassischen Elektronenradius** R_e definieren, indem man die Feldenergie mit der Ruheenergie $m_e c^2$ des Elektrons identifiziert. Dies führt auf

$$R_e = \frac{3}{5} \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 1.7 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (2.5.7)$$

Experimentell erweist sich das Elektron aber (bisher) als punktförmig. Allerdings werden ab dem **Compton-Radius**

$$R_c = \frac{\hbar}{m_e c} \approx 4 \cdot 10^{-13} \text{ m} \quad (2.5.8)$$

quantenmechanische Effekte relevant und das Elektron wird durch Welleneffekte "unscharf".

2.6 Multipol-Entwicklung

Wir wollen nun das elektrostatische Potential (2.3.3) für beliebige beschränkte Ladungsverteilungen *näherungsweise* im sog. **Fernfeld** berechnen. Dazu betrachten wir Ladungsverteilungen endlicher Ausdehnung, d.h. $\rho(\underline{r}) = 0$ für alle $|\underline{r}| > R_0$, wobei der Ursprung im Inneren der Verteilung liegen soll. Das Fernfeld bezeichnet dann den Bereich, in dem $|\underline{r}| \gg R_0$ ist. Im Integranden ist dann auch $|\underline{r}| \gg |\underline{r}'|$, was zur Vereinfachung genutzt werden kann.

2.6.1 Herleitung

Wir entwickeln zunächst die Abstandsfunktion im Integranden

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\underline{r} \cdot \underline{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} \quad (2.6.1)$$

unter den Bedingungen $|\underline{r} \cdot \underline{r}'| \ll r^2$ und $\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \ll 1$ mit Hilfe der Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad (2.6.2)$$

wobei $x = -2\frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2} \right)^2 + \mathcal{O}(x^3) \right] \\ &\approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^2} + \frac{3(\underline{r} \cdot \underline{r}')^2 - (rr')^2}{2r^4} \right], \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

wobei wir zunächst die Klammern aufgelöst und dann nach Potenzen von $1/r^2$ sortiert haben. Damit erhalten wir für das elektrostatische Potential

$$\begin{aligned} \phi(\underline{r}) &\approx \frac{1}{r} \left[\int d^3r' \rho(\underline{r}') + \frac{\underline{r}}{r^2} \int d^3r' \rho(\underline{r}') \underline{r}' + \frac{1}{2r^4} \int d^3r' \rho(\underline{r}') [3(\underline{r} \cdot \underline{r}')^2 - (rr')^2] \right] \\ &= \frac{q}{r} + \frac{\underline{d} \cdot \underline{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} x_i x_j \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

mit $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$, der Gesamtladung

$$q = \int d^3r' \rho(\underline{r}'), \quad (2.6.5)$$

dem **Dipolmoment**

$$\underline{d} = \int d^3r \rho(\underline{r}) \underline{r} \quad (2.6.6)$$

und dem **Quadrupoltensor**

$$Q_{ij} = \int d^3r \rho(\underline{r}) [3x_i x_j - |\underline{r}|^2 \delta_{ij}]. \quad (2.6.7)$$

Der Quadrupolbeitrag zum elektrostatischen Potential (2.6.4) ist also eine quadratische Form, die durch die Matrix (Q_{ij}) definiert ist.

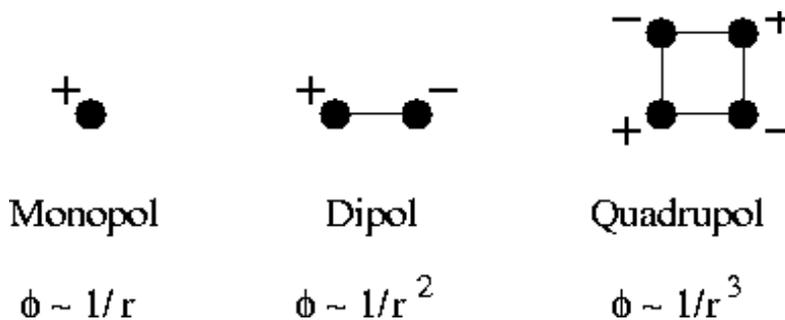


Abbildung 2.6.1: Systeme aus Punktladungen und ihre Multipolelemente.

Die Darstellung (2.6.4) hat den wesentlichen Vorteil, dass die kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$ durch wenige **Multipolmomente** q , \underline{d} , \underline{Q} ersetzt wird. Deren Beiträge zum elektrostatischen Potential fallen mit zunehmender Ordnung der Momente immer schneller ab:

$$\begin{aligned}
 \text{Monopolbeitrag} & \quad \frac{q}{r} \sim \frac{1}{r} \\
 \text{Dipolbeitrag} & \quad \frac{\underline{d} \cdot \underline{r}}{r^2} \sim \frac{1}{r^2} \\
 \text{Quadrupolbeitrag} & \quad \sim \frac{1}{r^3}.
 \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

Die Multipolentwicklung lässt sich systematisch verbessern. (2.6.4) gilt bis auf Korrekturen der Ordnung $\left(\frac{R_0}{r}\right)^4$.

Für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen gibt es nur einen Multipolbeitrag, die höheren Ordnungen verschwinden exakt. Ihr Feld erscheint daher in großen Entfernungen als das einer Punktladung, die die gesamte Ladung der Verteilung in sich vereinigt.

2.6.2 Abhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems

Die Multipolmomente hängen i.a. von der Wahl des Koordinatensystems ab. Eine Verschiebung

$$\underline{r} \rightarrow \tilde{\underline{r}} = \underline{r} - \underline{r}_0 \tag{2.6.9}$$

des Ursprungs lässt zwar die Gesamtladung q unverändert, das Dipolmoment wird jedoch transformiert:

$$\begin{aligned}
 \underline{d} & \rightarrow \tilde{\underline{d}} = \int d^3\tilde{r} \tilde{\underline{r}} \rho(\tilde{\underline{r}}) - \underline{r}_0 \int d^3\tilde{r} \rho(\tilde{\underline{r}}) \\
 & = \underline{d} - q\underline{r}_0.
 \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

Dies hat verschiedene Konsequenzen:

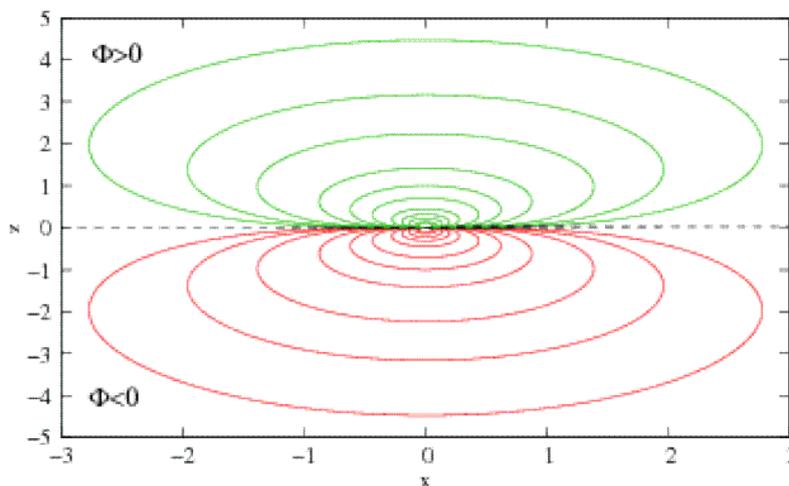


Abbildung 2.6.2: Äquipotentiallinien eines Punktdipols im Ursprung, dessen Dipolmoment entlang der z -Achse ausgerichtet ist. Das Dipolmoment \underline{d} ist entlang der z -Achse ausgerichtet, so dass $\phi_{\text{dip}} > 0$ im oberen Halbraum ($z > 0$) und $\phi_{\text{dip}} < 0$ im unteren Halbraum ($z < 0$). (aus [3])

- Für $q \neq 0$ kann das Dipolmoment zum Verschwinden gebracht werden, indem der Koordinatenursprung in den Ladungsschwerpunkt gelegt wird, d.h. durch die Wahl $\underline{r}_0 = \frac{\underline{d}}{q}$. Der Ladungsschwerpunkt ist dabei analog zum Massenschwerpunkt definiert. Diese Analogie impliziert, dass Massenverteilungen (wie die der Erde) kein Dipolmoment besitzen. Die führende Abweichung vom Feld einer Punktmasse ist daher der Quadrupolbeitrag.
- Für $q = 0$ ist \underline{d} unabhängig von der Wahl des Ursprungs, also ein invariantes Merkmal der Ladungsverteilung. Ein Beispiel hierfür sind die Dipolmomente von neutralen, polaren Molekülen wie H_2O . Allgemein gilt, dass das niedrigste nichtverschwindende Multipolmoment unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist, also z.B. \underline{Q} für $q = 0$, $\underline{d} = 0$.

2.6.3 Punktdipol

Der erste Term in der Multipolentwicklung (2.6.4) entspricht dem Potential einer Punktladung. Das Fernfeld jeder Ladungsverteilung mit $q \neq 0$ sieht daher in führender Ordnung wie eine Punktladung aus. Welche Ladungsverteilungen erzeugen die anderen Terme “in Reinform”? Dazu betrachten wir den Fall des **Dipolpotentials**

$$\phi_{\text{dip}}(\underline{r}) = \frac{\underline{d} \cdot \underline{r}}{r^3}, \quad (2.6.11)$$

dessen Äquipotentiallinien in Abb. 2.6.2 dargestellt sind. Die zugehörige Ladungsverteilung lässt

sich im Prinzip aus der Poisson-Gleichung (2.4.4) bestimmen.

$$\rho_{\text{dip}}(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \phi_{\text{dip}} = \dots = -\underline{d} \cdot \nabla \delta(\underline{r}), \quad (2.6.12)$$

wie wir in den Übungen zeigen werden². Diese Ladungsverteilung entspricht einem **Punktdipol**, den man durch folgenden Grenzprozess erhält: Zwei Ladungen $\pm q$ werden im Abstand a symmetrisch z.B. auf der z -Achse positioniert, also bei $(0, 0, -a/2)$ und $(0, 0, a/2)$. Dann führt man den Grenzübergang $a \rightarrow 0$ aus, wobei man das Dipolmoment $d = qa$ konstant hält.

Als Anwendung bestimmen wir die Energie eines Punktdipols in einem äußeren elektrischen Feld. Wir betrachten zunächst ein System aus Punktladungen q_i in einem äußeren elektrischen Potential ϕ_{ext} . Die potentielle Energie ist dann durch

$$V_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N q_i \phi_{\text{ext}}(\underline{r}_i) \quad (2.6.13)$$

gegeben. Dabei wurde die ‘‘Selbstergie’’ durch Wechselwirkungen der Ladungen untereinander vernachlässigt. Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ergibt sich

$$\begin{aligned} V_{\text{ext}} &= \int d^3r \rho(\underline{r}) \phi_{\text{ext}}(\underline{r}) = - \int d^3r \phi_{\text{ext}}(\underline{r}) (\underline{d} \cdot \nabla \delta(\underline{r})) = \int d^3r \delta(\underline{r}) (\underline{d} \cdot \nabla \phi_{\text{ext}}(\underline{r})) \\ &= -\underline{d} \cdot \underline{E}_{\text{ext}}(\underline{r} = 0), \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

wobei wir zunächst (2.6.11) benutzt haben und dann partiell integriert. Die potentielle Energie wird also durch die Stärke des elektrischen Feldes am Ort $\underline{r} = 0$ des Dipols bestimmt. Sie wird minimal, wenn das Dipolmoment parallel zum Feld steht, der Dipol wird also vom Feld ausgerichtet.

2.7 Metallische Randbedingungen

In einem metallischen Leiter gibt es frei bewegliche Ladungen. Diese verschieben sich unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes. In einer statischen (d.h. zeitunabhängigen) Situation kann es daher keine elektrischen Felder im Inneren des Leiters geben, da sich die Ladungen so lange verschieben, bis das Feld überall verschwindet:

$$\boxed{\underline{E} = 0 \quad \text{im Inneren von Leitern.}} \quad (2.7.1)$$

Somit ist dort das Potential ϕ konstant. Insbesondere sind die Oberflächen eines Leiters Äquipotentialflächen. Alternativ kann man für (2.7.1) eine energetische Begründung geben: die beweglichen Ladungen ordnen sich so an, dass die Energie $\frac{1}{8\pi} \int |\underline{E}|^2 d^3r$ minimal wird. Das ist für $\underline{E} = 0$ der Fall.

Wir betrachten zwei Beispiele:

²Die Ableitung der Delta-Funktion ist durch $\int dx f(x) \delta'(x - x_0) = -f'(x_0)$ definiert.

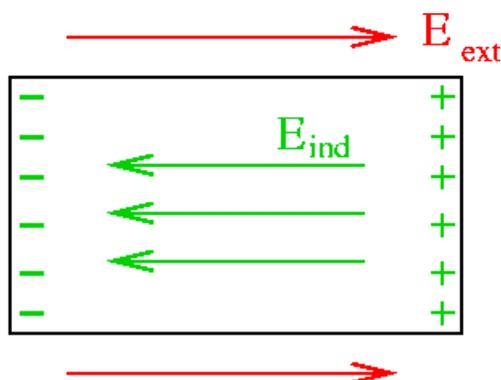


Abbildung 2.7.1: Ein neutraler metallischer Körper in einem äußeren elektrischen Feld.

- Bei einem neutralen metallischen Körper in einem äußeren elektrischen Feld $\underline{E}_{\text{ext}}$ (siehe Abb. 2.7.1) sammel sich die freien Ladungen an den Oberflächen. Dadurch entsteht im Leiter ein induziertes elektrisches Feld $\underline{E}_{\text{ind}}$ bis es $\underline{E}_{\text{ext}}$ kompensiert:

$$\underline{E}_{\text{ind}} = -\underline{E}_{\text{ext}}. \quad (2.7.2)$$

Im Inneren des Leiters ist dann

$$\underline{E} = \underline{E}_{\text{ext}} + \underline{E}_{\text{ind}} = 0. \quad (2.7.3)$$

- Bei einer metallischen Kugel mit der Gesamtladung Q wird die Energie V minimiert, wenn sich die Ladungen an der Oberfläche befinden. Dies kann man sich leicht durch Verallgemeinerung des Beispiels in Kap. 2.5 auf beliebige kugelsymmetrische Ladungsverteilungen klar machen. Die Energie ist dann

$$V = \frac{Q^2}{2R} \quad (2.7.4)$$

was z.B. kleiner ist als die Energie $V = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{2R}$ einer homogenen Verteilung.

Wie sehen die Randbedingungen für das elektrische Feld an der Grenzfläche zwischen Außenraum und Leiter aus, wenn im Außenraum ein elektrisches Feld existiert und im Inneren des Leiters verschwindet? Die Orientierung der Grenzfläche können wir mit Hilfe des Flächennormalenvektors \underline{n} und des Tangentialvektors $\underline{\tau}$ charakterisieren. Wir unterscheiden daher Randbedingungen an die Tangentialkomponente $\underline{\tau} \cdot \underline{E}$ und die Normalkomponente $\underline{n} \cdot \underline{E}$ des elektrischen Feldes. Da die Oberfläche eine Äquipotentialfläche ($\phi = \text{const.}$) ist, steht das elektrische Feld $\underline{E} = -\nabla\phi$ senkrecht auf der Leiteroberfläche (Abb. 2.7.2). Somit ist

$$\underline{\tau} \cdot \underline{E}|_{\text{Oberfläche}} = 0. \quad (2.7.5)$$

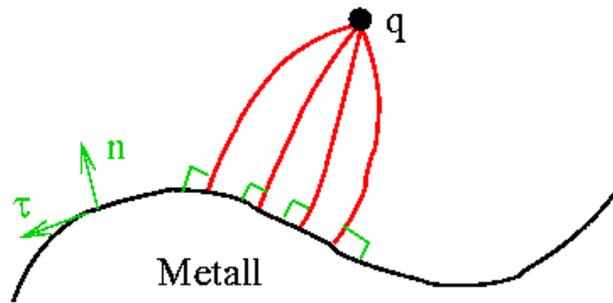


Abbildung 2.7.2: Feldlinien einer Punktladung in der Nähe einer Leiteroberfläche.

Wir leiten diese Aussage nun aus der Betrachtung des allgemeinen Falles einer Grenzfläche zwischen zwei Bereichen mit den elektrischen Feldern \underline{E}_1 und \underline{E}_2 her. Der Fall einer metallischen Oberfläche ist darin über $\underline{E}_1 = 0$ enthalten.

- **Tangentialbedingung:** Wir betrachten einen geschlossenen Weg wie in Abb. 2.7.3 (links), der die Grenzfläche umschließt. Die Länge tangential zur Oberfläche sei l , die Dicke (senkrecht zur Oberfläche) d mit $d \ll l$. Bezeichnet man die vom Weg eingeschlossene Fläche mit A , so gilt nach dem Stokes'schen Satz

$$0 = \int_A d\underline{f} \cdot (\nabla \times \underline{E}) = \oint_{\partial A} d\underline{l} \cdot \underline{E}. \quad (2.7.6)$$

da in der Elektrostatik $\nabla \times \underline{E} = 0$ (siehe (2.4.1)). Für $d \rightarrow 0$ tragen nur die tangentialen Stücke bei:

$$0 = \oint_{\partial A} d\underline{l} \cdot \underline{E} = l\underline{\tau} \cdot \underline{E}_2 - l\underline{\tau} \cdot \underline{E}_1 = l\underline{\tau} \cdot (\underline{E}_2 - \underline{E}_1). \quad (2.7.7)$$

Somit ist die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche stetig:

$$\underline{\tau} \cdot \underline{E}_2 = \underline{\tau} \cdot \underline{E}_1 \quad (2.7.8)$$

und speziell an der Oberfläche eines Leiters gilt $\underline{\tau} \cdot \underline{E} = 0$, d.h. die Feldlinien stehen senkrecht auf der Leiteroberfläche.

- **Tangentialbedingung:** Wir betrachten das hutschachtelförmige Integrationsvolumen V in Abb. 2.7.3 (rechts). Nach dem Gauß'schen Gesetz gilt für die Ladung q in V

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E} \quad (2.7.9)$$

wobei wir den Gauß'schen Satz angewendet haben. Für $d \rightarrow 0$ tragen nur Deckel und Boden des Volumens bei, deren Fläche jeweils A sei:

$$4\pi q = \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{E} = A\underline{n} \cdot (\underline{E}_2 - \underline{E}_1). \quad (2.7.10)$$

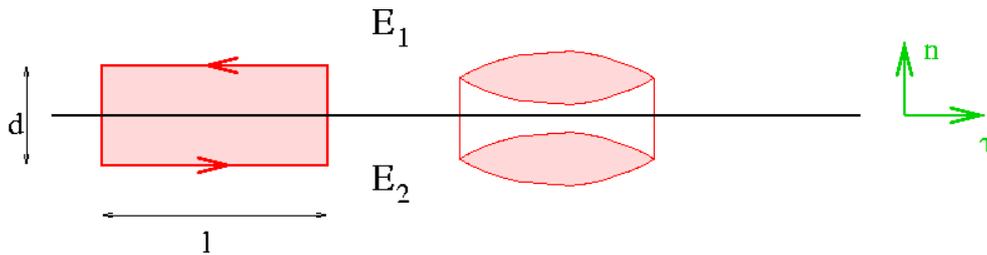


Abbildung 2.7.3: Zur Herleitung der Randbedingungen für ein elektrostatisches Feld. Die linke Skizze zeigt den Integrationsbereich für die tangentielle Bedingung, der rechte den für die normale Bedingung.

Damit springt die Normalkomponente des elektrischen Feldes um den Betrag $4\pi\sigma$ mit der **Oberflächenladungsdichte**

$$\sigma = \frac{q}{A}. \quad (2.7.11)$$

Somit gilt an der Oberfläche eines Leiters

$$\underline{E} \cdot \underline{n}|_{\text{Leiter}} = 4\pi\sigma, \quad (2.7.12)$$

d.h. das elektrische Feld \underline{E} induziert die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma|_{\text{Leiter}} = \frac{1}{4\pi} \underline{E} \cdot \underline{n}. \quad (2.7.13)$$

Kapitel 3

Magnetostatik

Magnetische Phänomene sind seit langem bekannt. Hier wollen wir uns vor allem mit der magnetischen Wirkung von elektrischen Strömen beschäftigen, einer vergleichsweise jungen Entdeckung. Historisch waren folgende Erkenntnisse für die Entwicklung der Magnetostatik von Bedeutung:

- Permanentmagnete wurden in Form von magnetischen Mineralien z.B. in der Nähe der Stadt Magnesia in der heutigen Türkei gefunden. Eine der ersten wissenschaftliche Untersuchungen von Permanentmagneten stammt von Petrus Peregrinus, der bereits 1269 darauf hinwies, dass es keine isolierten magnetischen Pole (Monopole) gibt.
- Erdmagnetfeld: Die Existenz des Erdmagnetfeldes war spätestens seit der Erfindung des Kompass (im 11. Jh. in China) bekannt. William Gilbert stellte dann 1600 eine Analogie zwischen dem Erdmagnetfeld und dem Feld von Permanentmagneten her, die einen großen Einfluss auf Kepler's Vorstellung von der Wechselwirkung zwischen der Sonne und den Planeten hatte.
- Magnetische Wirkung von Strömen: Diese wurde 1820 von Hans Christian Ørsted entdeckt. Später postulierte André Marie Ampère, dass *alle* Magnetfelder durch Ströme erzeugt werden. Daher müssten in magnetischen Materialien Molekularströme vorhanden sein, deren Nachweis mit den Mitteln des frühen 19. J.h. aber nicht möglich war. Heute wissen wir, dass der atomare Magnetismus auf quantenmechanischen Effekten beruht.

Im Weiteren werden wir auf der Basis des Ampère'schen Standpunktes argumentieren, d.h. elektrische Ströme als einzige Quellen von Magnetfeldern betrachten. Da elektrische Ströme aus bewegten Ladungen bestehen können wir folgendes Grundpostulat formulieren:

Magnetfelder werden durch bewegte elektrische Ladungen erzeugt, und wirken auf bewegte Ladungen.

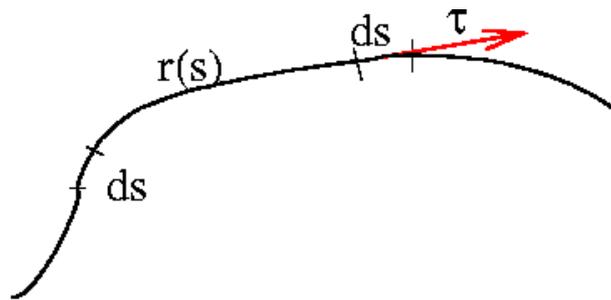


Abbildung 3.1.1: Zur Definition der Stromdichte für einen infinitesimal dünnen Draht.

3.1 Stationäre Ströme

In der **Magnetostatik** betrachtet man bewegte Ladungen, wobei die zugehörigen Ströme zeitunabhängig (stationär) sind. Die **Stromstärke** I wird definiert durch die zeitliche Änderung der Ladung

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.1.1)$$

Die **Stromdichte** \underline{j} beschreibt den Ladungsfluss durch eine Fläche und hat daher die Dimension $\frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}}$. Für eine genauere Definition betrachten wir einen infinitesimal dünnen Draht durch den ein Strom I fließt. Wir interpretieren den Draht als Kurve im Raum und parametrisieren ihn durch seine Bogenlänge s , d.h. der Draht wird durch die Kurve $\underline{r}(s)$ beschrieben. Wir zerlegen den Draht nun in infinitesimale Linienelemente

$$d\underline{l} = \underline{\tau} ds \quad (3.1.2)$$

mit dem Tangentialvektor $\underline{\tau}$ (Abb. 3.1.1). Bezeichnen wir die Querschnittsfläche des Drahtes mit df , so ist die Stromdichte ein Vektor mit Richtung $\underline{\tau}$ und dem Betrag $\frac{I}{df}$, d.h.

$$\underline{j} = \frac{I}{df} \underline{\tau} \quad \text{bzw.} \quad I \underline{\tau} = \underline{j} df. \quad (3.1.3)$$

Da das infinitesimale Volumenelement durch $dV = ds \cdot df$ gegeben ist, erhalten wir als Definition der **Stromdichte**

$$\boxed{\underline{j} dV = I d\underline{l}}. \quad (3.1.4)$$

Als Beispiel betrachten wir ein System aus Punktladungen q_i am Ort \underline{r}_i , die sich mit den Geschwindigkeiten \underline{v}_i bewegen. Dann ist

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)) \underline{v}_i. \quad (3.1.5)$$

Es sei noch angemerkt, dass sich auf diese Weise keine *stationäre* Stromdichte erzeugen lässt.

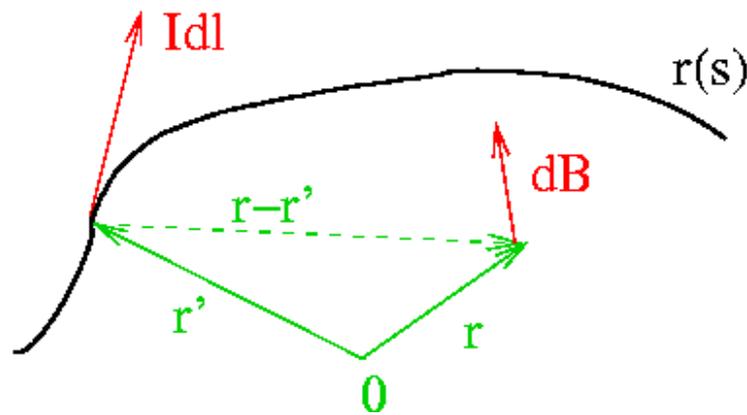


Abbildung 3.2.1: Das differentielle Biot-Savart-Gesetz.

3.2 Magnetfelder

Man kann die Magnetostatik in weitgehender formaler Analogie zur Elektrostatik entwickeln. Hierzu muss das Ladungselement ρd^3r durch das Stromelement $\underline{j} d^3r$ ersetzt werden. Durch den vektoriellen Charakter des Stromelements sind aber einige Zusatzüberlegungen bezüglich der Richtung erforderlich.

Wir definieren zunächst das **Magnetfeld** (die **magnetische Induktion**) $\underline{B}(\underline{r})$ über seine Kraftwirkung auf ein Stromelement am Ort \underline{r} :

$$\underline{dF} = \frac{I}{c} \underline{dl} \times \underline{B}(\underline{r}) \quad (3.2.1)$$

Im SI-System gilt $\underline{dF} = I \underline{dl} \times \underline{B}(\underline{r})$, wobei \underline{B} in Tesla mit $1 T = 1 \frac{Vs}{m^2}$ gemessen wird.

Die Kraft (3.2.1) steht senkrecht auf \underline{dl} (bzw. $\underline{\tau}$) und \underline{B} und ist proportional zur Stromstärke I und dem Betrag des Magnetfeldes $|\underline{B}|$. Man sieht schnell (z.B. über (2.2.2)), dass das so definierte Magnetfeld die gleiche Einheit hat wie das elektrische Feld \underline{E} .

Nach dem Grundpostulat *erzeugt* das Stromelement am Ort \underline{r}' aber auch ein Magnetfeld am Ort \underline{r} . Dieses ist durch das (differentielle) **Biot-Savart-Gesetz**

$$\underline{dB} = \frac{I}{c} \underline{dl} \times \frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \quad (3.2.2)$$

gegeben. Im SI-System gilt

$$\underline{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \underline{dl} \times \frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \quad \text{mit} \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}. \quad (3.2.3)$$

Mit dem Superpositionsprinzip erhalten wir das von der gesamten Stromverteilung erzeugte Magnetfeld über das Biot-Savart-Gesetz in integraler Form

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}. \quad (3.2.4)$$

Das Biot-Savart-Gesetz übernimmt im Weiteren die Rolle des Coulomb-Gesetzes in der Elektrostatik.

Die Gesetze (3.2.1) und (3.2.2) definieren zusammen die magnetische Wechselwirkung zwischen zwei Stromelementen. Es handelt sich dabei aber nicht um eine Zentralkraft!

Im Mechanikteil der Vorlesung hatten wir schon kurz die **Lorentzkraft**

$$\underline{F} = \frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B} \quad (3.2.5)$$

eines Magnetfeldes auf eine Punktladung q kennengelernt. Wir wollen diese nun noch aus (3.2.1) ableiten. Dazu überlegen wir uns zunächst, dass die Stromdichte einer Punktladung am Ort $\underline{r}_0(t)$, die sich mit der Geschwindigkeit $\underline{v} = \frac{d\underline{r}_0}{dt}$ bewegt durch

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = q\underline{v}\delta(\underline{r} - \underline{r}_0(t)) \quad (3.2.6)$$

gegeben ist. Damit erhalten wir aus (3.2.1) für die Kraft auf diese Ladung

$$d\underline{F} = \frac{1}{c} (\underline{j} \times \underline{B}) d^3r = \frac{q}{c} (\underline{v} \times \underline{B}) \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) d^3r. \quad (3.2.7)$$

Da \underline{E} und \underline{B} die gleichen Einheiten habe, kann die Stärke der Lorentzkraft mit der elektrostatischen Kraft $q\underline{E}$ verglichen werden¹. Man sieht, dass sie sich um einen Faktor $\frac{v}{c}$ unterscheiden. Dies deutet bereits an, dass sich das Magnetfeld als relativistische Korrektur zum elektrischen Feld auffassen lässt.

3.3 Kontinuitätsgleichung

Die Ladungserhaltung ist eine gut bestätigte Erfahrungstatsache: Elektrische Ladungen können weder erzeugt noch vernichtet werden. In allen bekannten Prozessen ist die Summe der beteiligten Ladungen vorher und nachher gleich. Die Änderung der elektrischen Ladung in einem beliebigen geschlossenen Volumen V muss daher gleich dem Fluss von Ladungen durch seine Oberfläche ∂V sein. Da der Ladungsfluss durch ein Flächenelement $d\underline{f} = \underline{n}df$ durch $\underline{j} \cdot d\underline{f}$ gegeben ist folgt für die Ladungsänderung in V

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\underline{r}, t) = - \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{j}(\underline{r}, t) = - \int_V d^3r \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}, t), \quad (3.3.1)$$

¹Wenn die Richtungen von \underline{v} und \underline{B} geeignet gewählt werden!

wobei wir den Gauß'schen Satz angewendet haben. Das Minuszeichen vor dem Oberflächenintegral rührt daher, dass der Normalenvektor \underline{n} einer geschlossenen Oberfläche per Konvention immer nach Außen zeigt und ein Strom aus dem Volumen heraus zu einer Verkleinerung der Ladungsmenge führen muss. Insgesamt muss also für beliebige geschlossene Volumina V

$$\int_V d^3r \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} \right) = 0 \quad (3.3.2)$$

sein. Dies führt auf die **Kontinuitätsgleichung**

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0}, \quad (3.3.3)$$

die die elektrische Ladungsdichte mit dem elektrischen Strom verknüpft.

In einer statischen Situation ist $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ und $\underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{j}(\underline{r})$. In diesem statischen Fall ist daher

$$\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}) = 0, \quad (3.3.4)$$

d.h. stationäre Ströme in der Magnetostatik sind divergenzfrei.

3.4 Vektorpotential

In der Elektrostatik haben wir das elektrostatische Potential ϕ eingeführt, aus dem sich über $\underline{E} = -\nabla\phi$ das elektrische Feld ergibt. Gibt es ein ähnliches Potential für das Magnetfeld?

Dazu formen wir zunächst das Biot-Savart-Gesetz (3.2.4) analog zum Vorgehen in der Elektrostatik um:

$$\begin{aligned} \underline{B}(\underline{r}) &= \frac{I}{c} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \nabla \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \nabla \times \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

wobei wir im letzten Schritt die Identität $\nabla(g\underline{V}) = g\nabla \times \underline{V} + (\nabla g) \times \underline{V}$ benutzt haben, die für beliebige Skalarfelder g und Vektorfelder \underline{V} gilt. Dabei ist $g(\underline{r}-\underline{r}') = 1/|\underline{r}-\underline{r}'|$ und $\underline{V}(\underline{r}) = \underline{j}(\underline{r}')$ (unabhängig von \underline{r} !!). Somit können wir das Magnetfeld darstellen als

$$\boxed{\underline{B} = \nabla \times \underline{A}} \quad (3.4.2)$$

mit dem **Vektorpotential**

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}} \quad (3.4.3)$$

Das elektrostatische Potential ϕ ist durch $\underline{E} = -\nabla\phi$ nur bis auf eine additive Konstante festgelegt. Das Vektorpotential \underline{A} wird durch $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ nur bis auf eine beliebige skalare Funktion $\Lambda(\underline{r})$ bestimmt, denn unter der **Eichtransformation**

$$\boxed{\underline{A} \rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \nabla\Lambda} \quad (3.4.4)$$

gilt wegen (1.2.10)

$$\nabla \times \underline{A}' = \nabla \times \underline{A} + \nabla \times (\nabla\Lambda) = \underline{B}. \quad (3.4.5)$$

Die Wahl von Λ , die zu (3.4.3) führt, heißt **Coulomb-Eichung**. Sie ist durch

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{A} = 0} \quad (3.4.6)$$

charakterisiert, denn

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{A} &= \frac{1}{c} \int d^3r' \nabla \cdot \left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) = \frac{1}{c} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \int d^3r' (\nabla' \cdot \underline{j}(\underline{r}')) \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = 0, \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

wobei wir zunächst die allgemeine Identität $\nabla(f\underline{V}) = \underline{V} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \underline{V}$ verwendet haben und dann die Tatsache, dass stationäre Ströme in statischen Situationen divergenzfrei sind (siehe Kap. 3.3). ∇' bezeichnet den Nabla-Operator bezüglich \underline{r}' .

3.5 Feldgleichungen

Analog zur Elektrostatik wollen wir nun das Magnetfeld \underline{B} durch $\nabla \cdot \underline{B}$ und $\nabla \times \underline{B}$ charakterisieren. Da $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ gilt wegen der allgemein gültigen Identität $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{V}) = 0$

$$\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0 \quad (3.5.1)$$

und damit

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{B} = 0.} \quad (3.5.2)$$

Diese Identität drückt Abwesenheit von magnetischen Ladungen aus. Die Herleitung gilt streng genommen nur für Magnetfelder, die durch (stationäre) Ströme erzeugt werden. Die Existenz von Elementarteilchen mit magnetischen Ladungen ist damit noch nicht ausgeschlossen und Gegenstand aktueller Forschung.

Ein überzeugendes Argument für die Existenz von Monopolen wurde 1931 von Paul Dirac gegeben. Er zeigte, dass aus der Existenz von magnetischen Monopolen im Rahmen der Quantenmechanik zwangsläufig die Quantisierung der elektrischen Ladung (als Vielfaches einer Elementarladung) folgt. Dabei sind die elektrische Elementarladung e und die magnetische Elementarladung g über die Beziehung

$$ge = \frac{n}{2} \hbar c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.5.3)$$

miteinander verknüpft. Dabei ist $\hbar = h/2\pi$ das Planck'sche Wirkungsquantum. Somit ist

$$g \geq \frac{\hbar c}{2e} = \frac{e}{2\alpha} \approx \frac{137}{2}e \quad (3.5.4)$$

mit der Feinstrukturkonstanten $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$. Sie stellt ein dimensionsloses Maß für die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung dar. Damit ist die magnetische Elementarladung (im Gauß'schen System) deutlich größer als die elektrische Elementarladung. Daher erwartet man, dass magnetische Monopole eine sehr große Masse haben. Aktuell liegt die untere Schranke für die Monopolmasse bei etwa 900 Protonenmassen ($m_g > 900m_p$).

Wir wollen nun die Feldgleichung für $\nabla \times \underline{B}$ ableiten. Wegen²

$$\nabla \times \underline{B} = \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A} = -\nabla^2 \underline{A}, \quad (3.5.5)$$

wobei (3.4.7) benutzt wurde, folgt mit (1.4.16)

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{B} &= -\nabla^2 \underline{A} = -\frac{1}{c} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \\ &= \frac{4\pi}{c} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \delta(\underline{r} - \underline{r}') = \frac{4\pi}{c} \underline{j}(\underline{r}). \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Wir erhalten so die zweite magnetostatische Feldgleichung

$$\boxed{\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}(\underline{r})} \quad (3.5.7)$$

bzw. im SI-System

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}(\underline{r}). \quad (3.5.8)$$

In Coulomb-Eichung erfüllt das Vektorpotential daher eine komponentenweise Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{j}(\underline{r}). \quad (3.5.9)$$

3.6 Ampère'sches Gesetz

Eine wichtige Folgerung aus (3.5.7) ist das Ampère'sche Gesetz, das für die konkrete Berechnung von Magnetfeldern ähnlich nützlich ist wie das Gauß'sche Gesetz bei elektrischen Feldern. Wir betrachten eine zweidimensionale Fläche F mit dem (eindimensionalen) Rand ∂F . Dann gilt

$$\oint_{\partial F} d\underline{l} \cdot \underline{B} = \int_F d\underline{f} \cdot (\nabla \times \underline{B}) = \frac{4\pi}{c} \int_F d\underline{f} \cdot \underline{j} = \frac{4\pi}{c} I_F, \quad (3.6.1)$$

²Dabei ist $\nabla^2 \underline{A}$ komponentenweise definiert!

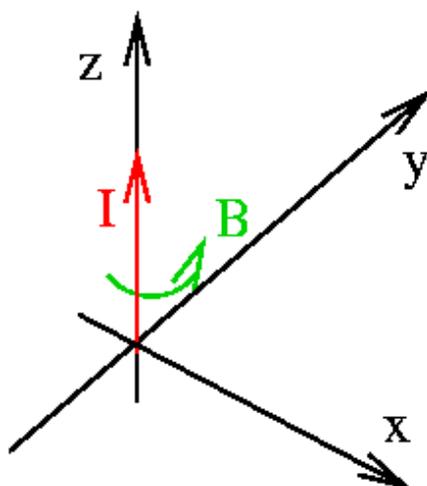


Abbildung 3.6.1: Magnetfeld einer geraden Drahtes.

wobei wir den Stokes'schen Satz benutzt haben. I_F ist der Gesamtstrom durch die Fläche F . Wir erhalten also das **Ampère'sche Gesetz**

$$\oint_{\partial F} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} I_F, \quad (3.6.2)$$

das das Wegintegral von \vec{B} längs einer geschlossenen Kurve mit dem Strom durch die von der Kurve ∂F berandete Fläche F in Verbindung bringt.

Als konkrete Anwendung betrachten wir das Magnetfeld eines unendlich langen, geraden, infinitesimal dünnen Drahtes. Dieser soll parallel zur z -Achse liegen. Wir verwenden Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) , die der Symmetrie des Problems angemessen sind. Aus Symmetriegründen muss das Magnetfeld parallel zu \underline{e}_φ liegen und die Form

$$\vec{B} = B(\rho)\underline{e}_\varphi \quad (3.6.3)$$

haben. Wir wenden das Ampère'sche Gesetz auf einen Kreis K_ρ vom Radius ρ an, der senkrecht zur z -Richtung liegen soll:

$$\frac{4\pi}{c} I = \oint_{\partial K_\rho} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \oint_{\partial K_\rho} dl \underline{e}_\varphi \cdot \underline{e}_\varphi B(\rho) = 2\pi\rho B(\rho). \quad (3.6.4)$$

Daher ist

$$B(\rho) = \frac{2I}{c\rho}. \quad (3.6.5)$$

3.7 Magnetischer Dipol

Analog zum Vorgehen in der Elektrostatik wollen wir uns nun mit der Frage beschäftigen, wie das Fernfeld einer räumlich beschränkten Stromverteilung aussieht. Wir betrachten das Feld wieder in Abständen $r > R_0$, wobei R_0 ein Maß für die Ausdehnung der Stromverteilung sein soll³. In der Elektrostatik war der führende Beitrag zum Fernfeld das Monopolfeld einer Punktladung. Da es keine magnetischen Monopole gibt, erwarten wir nun als führenden Beitrag ein Dipolfeld.

3.7.1 Dipolfeld

Wir entwickeln das Vektorpotential (3.4.3) für $|\underline{r}| \gg |\underline{r}'|$ und integrieren die Taylorreihe Term für Term. Dann erhalten wir

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{A}_{\text{dip}}(\underline{r}) + \mathcal{O}(1/r^3) \quad (3.7.1)$$

mit

$$\underline{A}_{\text{dip}}(\underline{r}) = \frac{1}{r^3} (\underline{\mu} \times \underline{r}) \quad (3.7.2)$$

und dem **magnetischen Dipolmoment**

$$\underline{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3r \underline{r} \times \underline{j}(\underline{r}). \quad (3.7.3)$$

Das zugehörige Magnetfeld ist dann

$$\underline{B}_{\text{dip}} = \nabla \times \underline{A}_{\text{dip}} = -\nabla \left(\frac{\underline{\mu} \cdot \underline{r}}{r^3} \right) + 4\pi \underline{\mu} \delta(\underline{r}), \quad (3.7.4)$$

wobei der erste Term ein Beitrag analog zum elektrischen Dipolfeld (2.6.11) ist und der zweite Term außerhalb des Ursprungs verschwindet. Somit haben (außerhalb des Ursprungs) elektrische und magnetische Felder den gleichen Verlauf.

Eigentlich hätten wir auch bei der Herleitung des elektrischen Dipolpotentials auf singuläre Beiträge am Ort des Dipols (also dem Ursprung) achten müssen. Eine sorgfältige Rechnung ergibt

$$\underline{E}_{\text{dip}} = \frac{1}{r^3} \left(\frac{3(\underline{d} \cdot \underline{r})\underline{r}}{r^2} - \underline{d} \right) - \frac{4\pi}{3} \underline{d} \delta(\underline{r}) \quad (3.7.5)$$

bzw.

$$\underline{B}_{\text{dip}} = \frac{1}{r^3} \left(\frac{3(\underline{\mu} \cdot \underline{r})\underline{r}}{r^2} - \underline{\mu} \right) - \frac{8\pi}{3} \underline{\mu} \delta(\underline{r}). \quad (3.7.6)$$

Die singulären δ -Beiträge entstehen, weil durch den Abbruch der Multipolentwicklung nach dem Dipolterm implizit ein Übergang zu einem Punktdipol durchgeführt wird. Bei einer realistischen Ladungs- oder Stromverteilung endlicher Ausdehnung bricht die Dipolnäherung zusammen, wenn $|\underline{r}|$ vergleichbar mit der Ausdehnung wird. Daher gibt es in diesem Fall keine

³Man stelle sich z.B. ein kreisförmige Leiterschleife vom Radius R_0 um den Ursprung vor!

Singularität bei $r = 0$. Wir machen uns dies für einen elektrischen Dipol mit der Ladungsverteilung

$$\rho(\underline{r}) = q \left[\delta \left(\underline{r} - \frac{a}{2} \underline{e}_z \right) - \delta \left(\underline{r} + \frac{a}{2} \underline{e}_z \right) \right] \quad (3.7.7)$$

klar. Am Ursprung, also in der Mitte zwischen den beiden Ladungen bei $\pm \frac{a}{2}$, herrscht ein starkes Feld, das beim Übergang $a \rightarrow 0$ zum Punktdipol wie $\frac{d}{a^3}$ divergiert und so die δ -Singularität erzeugt.

Im magnetischen Fall geht man analog vor, wobei man eine Leiterschleife vom Radius R betrachtet, die von einem Strom I durchflossen wird. Im Grenzfall $R \rightarrow 0$ und $I \rightarrow \infty$ erhält man dann einen magnetischen Punktdipol.

3.7.2 Magnetischer Dipol im äußeren Feld

Wir betrachten nun eine räumlich begrenzte Stromverteilung in einem *äußeren* Feld $\underline{B}_{\text{ext}}(\underline{r})$. Gemäss (3.2.7) ist die Kraft auf die Stromverteilung

$$\underline{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \left(\underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}_{\text{ext}}(\underline{r}) \right) . \quad (3.7.8)$$

Wir nehmen an, dass die Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r})$ um \underline{r}_0 lokalisiert ist und das sich $\underline{B}_{\text{ext}}(\underline{r})$ auf der Skala R_0 der Stromverteilung nur langsam ändert und daher um \underline{r}_0 entwickelt werden kann. Wir geben hier nur das Ergebnis einer solchen Rechnung an:

$$\underline{F} = \nabla \left(\underline{\mu} \cdot \underline{B}_{\text{ext}} \right) = -\nabla V_{\text{dip}} \quad (3.7.9)$$

mit der potentiellen Energie

$$V_{\text{dip}} = -\underline{\mu} \cdot \underline{B}_{\text{ext}} \quad (3.7.10)$$

des Dipols. Ist \underline{B} konstant, dann ist $\underline{F} = 0$, aber es wirkt ein Drehmoment

$$\underline{m} = \underline{\mu} \times \underline{B}_{\text{ext}} \quad (3.7.11)$$

auf den Dipol, der daher im Feld ausgerichtet wird. Der magnetische Dipol verhält sich also auch in dieser Hinsicht analog zu einem elektrostatischen Dipol in einem elektrischen Feld.

Kapitel 4

Die Maxwell'schen Gleichungen

Bisher haben wir nur statische Situationen betrachtet, die durch die elektro- und magnetostatischen Feldgleichungen

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho, \quad (4.0.1)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0, \quad (4.0.2)$$

$$\nabla \times \underline{E} = 0, \quad (4.0.3)$$

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}, \quad (4.0.4)$$

für die Quellen (Gl. (4.0.1) und (4.0.2)) und Wirbel (Gl. (4.0.3) und (4.0.4)) der elektrischen und magnetischen Felder beschrieben. In diesem Fall sind elektrische und magnetische Vorgänge komplett entkoppelt, es gibt keine Gleichung, in der beide Felder zusammen auftauchen.

Wenn wir an zeitabhängigen Phänomenen interessiert sind, müssen die Gleichungen (4.0.3) und (4.0.4) ergänzt werden. Dies wird zu einer Kopplung von elektrischen und magnetischen Feldern führen.

4.1 Das Induktionsgesetz

M. Faraday hat 1831 in einer Reihe von Experimenten durchgeführt:

- Bewegung einer Leiterschleife in einem statischen Magnetfeld
- Bewegung eines Permanentmagneten durch eine statische Leiterschleife
- Änderung der Magnetfeldstärke eines Elektromagneten, der von von einer Leiterschleife umschlossen wird.

In allen drei Fällen wurde in der Leiterschleife ein elektrischer Strom induziert. Diese Beobachtungen lassen sich im **Induktionsgesetz** (oder **Flussregel**) zusammenfassen:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_F \underline{df} \cdot \underline{B} = -c \oint_{\partial F} \underline{dl} \cdot \underline{E}.} \quad (4.1.1)$$

Auf der linken Seite steht die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche F und auf der rechten Seite das Kreisintegral des elektrischen Feldes über den Rand von F , d.h. die in der Leiterschleife induzierte Ringspannung.

Eine Flussänderung kann durch die Änderung a) der Fläche F oder b) Magnetfeldstärke \underline{B} hervorgerufen werden. Wenn F zeitunabhängig ist, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_F \underline{df} \cdot \underline{B} &= \int_F \underline{df} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -c \oint_{\partial F} \underline{dl} \cdot \underline{E} \\ &= -c \int_F \underline{df} \cdot (\nabla \times \underline{E}). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Da dies für beliebige Flächen F gilt, erhält man die **differentielle Form des Induktionsgesetzes**

$$\boxed{\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}}. \quad (4.1.3)$$

Wir leiten nun das Induktionsgesetz (4.1.1) für eine spezielle Situation aus der Lorentzkraft (3.2.5) her. Dazu betrachten wir eine rechteckige Leiterschleife mit einem beweglichen Teilstück (Abb. 4.1.1), das sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\underline{v} = v \underline{e}_x$ bewegt. Das Magnetfeld steht senkrecht dazu: $\underline{B} = B \underline{e}_z$. Auf die frei beweglichen Ladungen wirkt daher die Kraft

$$\underline{F} = \frac{q}{c} \underline{v} \times \underline{B} = -\frac{q}{c} v B \underline{e}_y. \quad (4.1.4)$$

Im Bezugssystem des bewegten Leiters wird diese Kraft als Wirkung eines induzierten elektrischen Feldes

$$\underline{E} = \frac{\underline{F}}{q} = -\frac{vB}{c} \underline{e}_y \quad (4.1.5)$$

interpretiert. Da dieses Feld nur im bewegten Teil der Leiterschleife vorhanden ist, kann das Linienintegral über die Schleife leicht ausgewertet werden:

$$\oint_{\partial F} \underline{dl} \cdot \underline{E} = -L_y \frac{vB}{c}. \quad (4.1.6)$$

Der magnetische Fluss durch die Leiterschleife ist

$$\int_F \underline{df} \cdot \underline{B} = B L_x L_y. \quad (4.1.7)$$

Somit gilt

$$\frac{d}{dt} \int_F \underline{df} \cdot \underline{B} = B L_y \frac{L_x}{dt} = B v L_y = -c \oint_{\partial F} \underline{dl} \cdot \underline{E}. \quad (4.1.8)$$

Dies stimmt mit Gleichung (4.1.1) überein. Das durch den induzierten Strom erzeugte Magnetfeld zeigt in negative y -Richtung, also entgegengesetzt zum angelegten Magnetfeld \underline{B} . Wird die Leiterschleife in negative x -Richtung bewegt (der Fluss wird dann kleiner!), so wird das angelegte Magnetfeld verstärkt. Dies ist ein Beispiel für die

Lenz'sche Regel: Der induzierte Strom erzeugt ein Magnetfeld, das der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt.

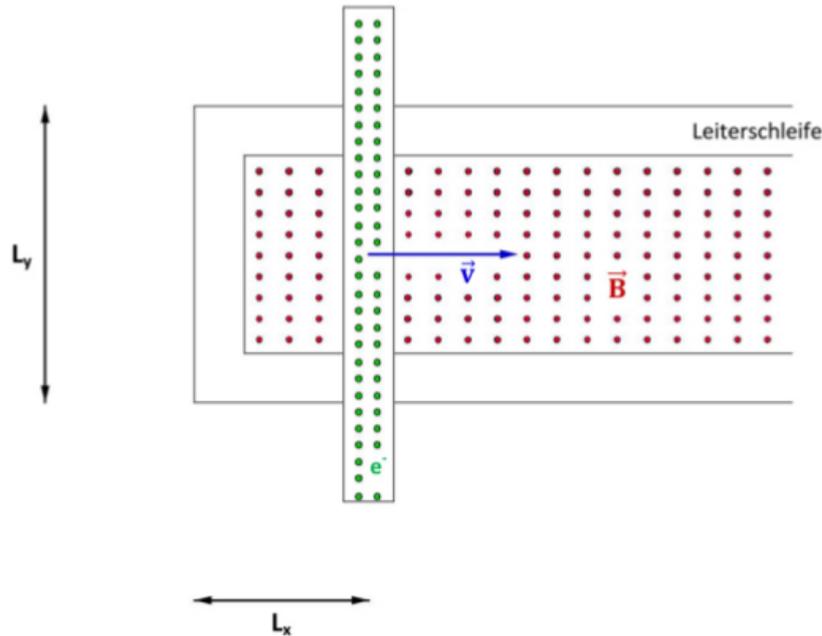


Abbildung 4.1.1: Leiterschleife mit einem beweglichen Teilstück. Das Magnetfeld tritt senkrecht aus der Zeichenebene heraus. Auf die freien Elektronen im beweglichen Teilstück wirkt die Lorentzkraft. (aus [3])

4.2 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Wegen $\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}$ ist in der Magnetostatik die Stromdichte divergenzfrei. Dies ist aber nicht verträglich mit der Kontinuitätsgleichung (3.3.3) falls sich die Ladungsdichte zeitlich ändert. Daher muss in diesem Fall die Stromdichte um einen weiteren Beitrag \underline{j}_M ergänzt werden:

$$\underline{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \underline{B} - \underline{j}_M. \quad (4.2.1)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{j} &= -\nabla \cdot \underline{j}_M = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \underline{E}) \\ &= -\nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Die Ergänzung \underline{j}_M heisst **Maxwell'scher Verschiebungsstrom**

$$\underline{j}_M = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad (4.2.3)$$

und wurde von Maxwell auf Grund theoretische Überlegungen (aber nicht der Ladungserhaltung!) postuliert. Er wird später wichtig für die Existenz elektromagnetischer Wellen. Die Feldgleichung für die Wirbel des magnetischen Feldes lautet daher vollständig $\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$. Damit haben wir die vollständigen **Maxwell-Gleichungen** abgeleitet:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{E} &= 4\pi\rho, & (4.2.4) \\ \nabla \times \underline{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}, & (4.2.5) \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0, & (4.2.6) \\ \nabla \times \underline{B} &= \frac{4\pi}{c} \underline{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}. & (4.2.7) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4.2.5) und (4.2.6) nennt man auch **homogene Maxwell-Gleichungen**, da in ihnen die Quellen (ρ, \underline{j}) nicht auftauchen. Die Gleichungen (4.2.4) und (4.2.7) heißen daher **inhomogene Maxwell-Gleichungen**. Im SI-System sind die Maxwell-Gleichungen von der Form

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (4.2.8)$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}, \quad (4.2.9)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0, \quad (4.2.10)$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}. \quad (4.2.11)$$

In den Gleichungen tritt die Lichtgeschwindigkeit c gar nicht explizit auf! Tatsächlich gilt im Vakuum

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (4.2.12)$$

4.3 Energie des elektromagnetischen Feldes

Wir verallgemeinern nun die elektrostatische Energiedichte (2.5.3) auf zeitabhängige Situationen. Dazu betrachten wir ein System aus N geladenen Punktteilchen in äußeren elektrischen und magnetischen Feldern, so dass sich die Begriffe der klassischen Mechanik anwenden lassen. In der Zeit dt ändert sich die Gesamtenergie E_{mat} des Systems durch die elektrischen und magnetischen Kräfte:

$$\begin{aligned} dE_{\text{mat}} &= \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{r}_i = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{v}_i dt \\ &= \sum_i q_i \left[\underline{E}(\underline{r}_i, t) + \frac{1}{c} (\underline{v}_i \times \underline{B}(\underline{r}_i, t)) \right] \cdot \underline{v}_i dt \\ &= \sum_i q_i \underline{E}(\underline{r}_i, t) = \int d^3r \underline{j} \cdot \underline{E} dt, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

wobei wir die Stromdichte $\underline{j} = \sum_i q_i \underline{v}_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$ eingeführt haben. Der Beitrag des Magnetfeldes verschwindet, da ganz allgemein $\underline{a} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = 0$ gilt. Somit ist die Änderung der Gesamtenergie

$$\frac{dE_{\text{mat}}}{dt} = \int d^3r \underline{j} \cdot \underline{E}. \quad (4.3.2)$$

Wir wollen nun mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen den Integranden ganz durch die Felder \underline{E} und \underline{B} ausdrücken. Zunächst gilt

$$\underline{j} \cdot \underline{E} = \frac{c}{4\pi} \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{B}) - \frac{1}{4\pi} \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{B}) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} |\underline{E}|^2, \quad (4.3.3)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} |\underline{B}|^2 = 2\underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -2c\underline{B} \cdot (\nabla \times \underline{E}). \quad (4.3.4)$$

Da außerdem gilt

$$\nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot (\nabla \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \quad (4.3.5)$$

erhalten wir schließlich

$$\underline{j} \cdot \underline{E} = -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{B}) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2). \quad (4.3.6)$$

Wir betrachten nun zwei verschiedene Situationen.

- Für eine Konfiguration von Teilchen und Feldern, die ganz in einem abgeschlossenen Raumbereich V liegen, integrieren wir (4.3.6) über das Volumen V :

$$\frac{dE_{\text{mat}}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2) - \frac{c}{4\pi} \int_V d^3r \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{B}) \quad (4.3.7)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2) - \frac{c}{4\pi} \int_{\partial V} d\underline{f} \cdot (\underline{E} \times \underline{B}) = 0, \quad (4.3.8)$$

wobei wir zunächst den Gauß'schen Satz benutzt haben und V so groß gewählt wurde, dass $\underline{E} = \underline{B} = 0$ auf dem Rand ∂V . Somit ist die Gesamtenergie erhalten,

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{mat}} + E_{\text{em}}) = 0, \quad (4.3.9)$$

wobei wir die **elektromagnetische Feldenergie**

$$E_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2) = \int_V d^3r u(\underline{r}) \quad (4.3.10)$$

eingeführt haben, mit der **Energiedichte des elektromagnetischen Feldes**

$$\boxed{u(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi} (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2)}. \quad (4.3.11)$$

Im SI-System ist

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 |\underline{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\underline{B}|^2 \right). \quad (4.3.12)$$

- Nun betrachten wir ein elektromagnetisches Feld in Abwesenheit von Materie. Da dann $\frac{d}{dt}E_{\text{mat}} = 0$, muss die rechte Seite von (4.3.7) für beliebige Volumina V verschwinden. Dies liefert

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{S} = 0} \quad (4.3.13)$$

mit dem **Poynting-Vektor** (oder **Energiestromdichte**)

$$\boxed{\underline{S} = \frac{c}{4\pi} (\underline{E} \times \underline{B})} . \quad (4.3.14)$$

Gleichung (4.3.13) hat die Form einer Kontinuitätsgleichung und drückt die lokale Erhaltung der Feldenergie $\int u(\underline{r})d^3r$ aus.

Die allgemeine Form der lokalen Energiebilanz in Gegenwart einer Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r})$ lautet dann

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{S} = -\underline{j} \cdot \underline{E}} \quad (4.3.15)$$

wobei der Ausdruck auf der rechten Seite ein Verlustterm ist, den man auch als **Ohm'sche Wärme** bezeichnet.

4.4 Impuls des elektromagnetischen Feldes

Da elektromagnetische Felder Energie besitzen liegt die Vermutung nahe, dass man ihnen auch einen Impuls zuordnen kann. Wir machen hierzu ein Gedankenexperiment, bei dem wir zwei Ladungen q_1 und q_2 betrachten, die sich mit den Geschwindigkeiten $\underline{v}_1 = -v_1\underline{e}_x$ bzw. $\underline{v}_2 = -v_2\underline{e}_z$ in Richtung der negativen x - bzw. z -Achse bewegen (Abb. 4.4.1). Stellen wir uns die Ladungen als kleine Stromelemente vor, so können wir mit dem Biot-Savart-Gesetz (3.2.2) die Richtung der von den Ladungen erzeugten Magnetfelder bestimmen: q_1 erzeugt am Ort von q_2 das Magnetfeld $\underline{B}_1 = B_1\underline{e}_y$ und q_2 am Ort von q_1 das Feld $\underline{B}_2 = -B_2\underline{e}_y$. Der magnetische Anteil der entsprechenden Lorentz-Kraft ist daher

$$\begin{aligned} \underline{F}_{21} &= \frac{q_2}{c} (\underline{v}_2 \times \underline{B}_1) = F_{21}\underline{e}_x, \\ \underline{F}_{12} &= \frac{q_1}{c} (\underline{v}_1 \times \underline{B}_2) = F_{12}\underline{e}_z. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Diese Kräfte sind nicht antiparallel, daher ist das 3. Newton'sche Gesetz (und damit der mechanische Impulssatz) verletzt! Das mechanische System tauscht mit dem elektromagnetischen Feld nicht nur Energie, sondern auch Impuls aus!

Quantitative Überlegungen zeigen, dass die **Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes** durch

$$\underline{g}_{\text{em}} = \frac{1}{4\pi c} (\underline{E} \times \underline{B}) = \frac{1}{c^2} \underline{S} \quad (4.4.2)$$

gegeben ist. Sie ist also proportional zur Energiedichte.

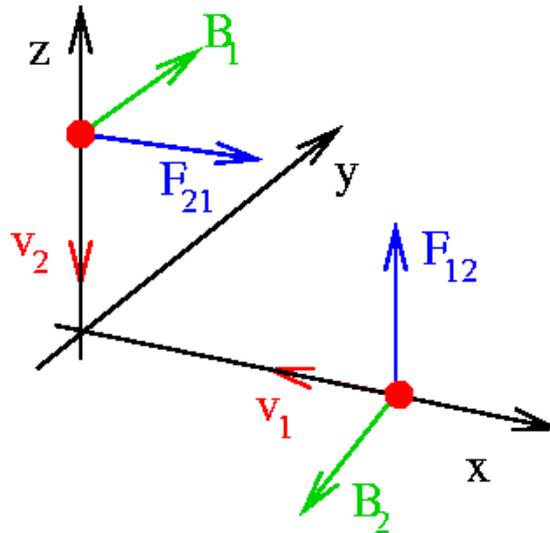


Abbildung 4.4.1: Gedankenexperiment zur Verletzung der 3. Newton'schen Gesetzes durch die magnetische Wechselwirkung.

4.5 Maxwell-Gleichungen für die Potentiale

Wir wollen nun den Potentialbegriff auf zeitabhängige Situationen verallgemeinern. Die Darstellbarkeit $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ des Magnetfeldes durch ein Vektorpotential \underline{A} folgte aus der Divergenzfreiheit von \underline{B} . Da diese auch im zeitabhängigen Fall erhalten bleibt, muss der Zusammenhang zwischen \underline{A} und \underline{B} nicht modifiziert werden. Das gilt aber nicht für den Zusammenhang $\underline{E} = -\nabla\phi$ zwischen dem elektrostatischen Potential ϕ und dem elektrischen Feld \underline{E} , der auf der Beziehung $\nabla \times \underline{E} = 0$ beruhte. In zeitabhängigen Situationen müssen wir dies modifizieren (siehe (4.2.9)):

$$0 = \nabla \times \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \nabla \times \underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{A}) = \nabla \times \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right). \quad (4.5.1)$$

Somit existiert für $\underline{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$ ein Skalarpotential ϕ :

$$\boxed{\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}}. \quad (4.5.2)$$

In SI-Einheiten lautet diese Beziehung $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$. Sie geht im statischen Fall in die bekannte Form $\underline{E} = -\nabla\phi$ über.

Wie wir schon früher gesehen haben, gibt es bei der Wahl der Potentiale gewisse Freiheiten (**Eichfreiheit**). In der Magnetostatik war \underline{A} nur bis auf den Gradienten einer skalaren Funktion festgelegt: $\underline{A} \rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \nabla\Lambda$. Eine allgemeine **Eichtransformation** soll nun \underline{E} und \underline{B} invariant

lassen:

$$\begin{aligned}\underline{E} \rightarrow \underline{E}' &= -\nabla\phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}'}{\partial t} = -\nabla \left(\phi' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \\ &\stackrel{!}{=} -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\end{aligned}\quad (4.5.3)$$

liefert die Transformation für das Skalarpotential

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}.\quad (4.5.4)$$

Mit (4.5.4) und $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ sind die homogenen Maxwell-Gleichungen (4.2.5) und (4.2.6) automatisch erfüllt! Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (4.2.4) und (4.2.7) liefern dann einen Zusammenhang zwischen den Potentialen ϕ und \underline{A} und den Quellen ρ und \underline{j} :

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} &= \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A} + \nabla \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} \\ &= - \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ &\stackrel{!}{=} \frac{4\pi}{c} \underline{j},\end{aligned}\quad (4.5.5)$$

wobei wir die Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{V}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{V}) - \nabla^2 \underline{V}\quad (4.5.6)$$

benutzt haben, die für beliebige Vektorfelder \underline{V} gilt.

Das oben abgeleitete Ergebnis lässt sich vereinfachen, wenn man die **Lorentz-Eichung**

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0},\quad (4.5.7)$$

die man als Verallgemeinerung der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \underline{A} = 0$ verstehen kann. Dann erhält man die **Maxwell-Gleichung für das Vektorpotential**

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{j}},\quad (4.5.8)$$

die im SI-System die Form

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \underline{j}\quad (4.5.9)$$

annimmt.

In analoger Weise kann man einen Zusammenhang zwischen ϕ und ρ ableiten:

$$\begin{aligned} 4\pi\rho &= \nabla \times \underline{E} = -\nabla \left(\nabla\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\nabla^2\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \underline{A}), \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

woraus dann die **Maxwell-Gleichung für das Skalarpotential**

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -4\pi\rho} \quad (4.5.11)$$

folgt. Im SI-System hat diese Gleichung die Form

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (4.5.12)$$

Die Maxwell-Gleichungen für die Potentiale sind direkte Verallgemeinerungen der statischen Beziehungen (2.4.4) und (3.5.9), bei denen der Laplace-Operator ∇^2 durch den **d'Alembert-Operator**

$$\boxed{\square := \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \quad (4.5.13)$$

ersetzt wird. Hier deutet sich die Symmetrie zwischen Raum und Zeit, die charakteristisch für die Relativitätstheorie ist, schon an.

4.6 Ebene elektromagnetische Wellen

Die Maxwell-Gleichungen (4.5.8) und (4.5.11) implizieren die Existenz von elektromagnetischen Wellen. Im Vakuum ist $\rho = 0$ und $\underline{j} = 0$, so dass sich die Gleichungen zu

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A} = 0, \quad (4.6.1)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0 \quad (4.6.2)$$

vereinfachen. Wir machen nun einen Ansatz in Form einer ebenen Welle, die sich in x -Richtung ausbreitet. Die Wellenfronten verlaufen daher parallel zur (y, z) -Ebene und \underline{A} und ϕ sind unabhängig von y und z :

$$\underline{A} = \underline{A}(x, t), \quad \text{und} \quad \phi = \phi(x, t). \quad (4.6.3)$$

Wir erhalten dann vier eindimensionale Wellengleichungen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A} = 0, \quad (4.6.4)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0 \quad (4.6.5)$$

für die drei Komponenten von \underline{A} und ϕ . Deren allgemeine Lösungen sind aus der Vorlesung *Mathematische Methoden* bekannt:

$$A_j(x, t) = a_j^{(r)}(x - ct) + a_j^{(l)}(x + ct) \quad (j = x, y, z), \quad (4.6.6)$$

$$\phi(x, t) = \phi^{(r)}(x - ct) + \phi^{(l)}(x + ct) \quad (4.6.7)$$

also einer Kombination von links- und rechtslaufenden Wellen. Die Funktionen $a_j^{(r,l)}$ und $\phi^{(r,l)}$ hängen nur noch von *einer* Variablen $x - ct$ bzw. $x + ct$ ab.

Wir betrachten im folgenden nur den rechtslaufenden Anteil¹. Es bleiben dann vier frei wählbare Funktionen $a_j(\xi)$ und $\phi(\xi)$ mit $\xi = x - ct$. Diese sind allerdings über die Lorentz-Eichung (4.5.7) miteinander verknüpft:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (4.6.8)$$

woraus

$$\frac{da_x}{d\xi} = \frac{d\phi}{d\xi} \quad (4.6.9)$$

folgt. Die beiden Funktionen sind daher bis auf eine additive Konstante gleich und wir setzen daher

$$\phi(\xi) = a_x(\xi). \quad (4.6.10)$$

Das elektrische Feld erhalten wir aus (4.5.2):

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \phi(x - ct) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} a_x(x - ct) = -\frac{d\phi}{d\xi} + \frac{da_x}{d\xi} = 0 \quad (4.6.11)$$

und

$$E_y = \frac{da_y}{d\xi}, \quad E_z = \frac{da_z}{d\xi}. \quad (4.6.12)$$

Für das Magnetfeld folgt aus (3.4.2)

$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{da_z}{d\xi} = -E_z, \quad B_z = -\frac{da_y}{d\xi} = E_y. \quad (4.6.13)$$

Hieraus lassen sich die wichtigsten Eigenschaften elektromagnetische Wellen ablesen (Abb. 4.6.1):

- Elektromagnetische Wellen sind **transversal**: \underline{E} und \underline{B} stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung (hier: der x -Achse).
- \underline{E} und \underline{B} stehen senkrecht aufeinander: $\underline{E} \perp \underline{B}$, d.h. $\underline{E} \cdot \underline{B} = 0$.
- Ihre Beträge sind gleich²: $|\underline{E}| = |\underline{B}|$.

¹Der entsprechende Index wird daher unterdrückt.

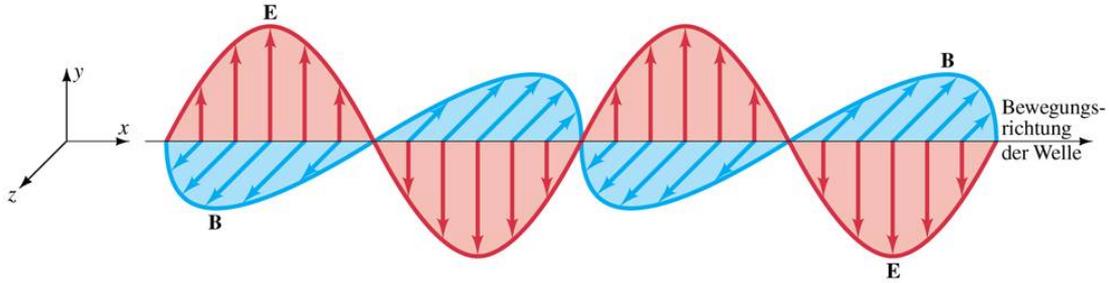


Abbildung 4.6.1: Elektromagnetische Welle: Elektrisches und magnetisches Feld sind stets senkrecht zueinander und stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. [2]

Diese Ergebnisse kann man leicht auf beliebige Ausbreitungsrichtungen \underline{e} verallgemeinern. Eine ebene Welle in \underline{e} -Richtung ist durch

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \underline{a}(\underline{r} \cdot \underline{e} - ct) = \underline{a}(\xi), \quad (4.6.14)$$

$$\phi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r} \cdot \underline{e} - ct) = \phi(\xi) \quad (4.6.15)$$

mit $\xi = \underline{r} \cdot \underline{e} - ct$ gegeben. Die Felder ergeben sich dann zu

$$\underline{B} = \underline{e} \times \underline{a}', \quad \underline{E} = \underline{B} \times \underline{e} \quad \text{mit} \quad \underline{a}' = \frac{d\underline{a}}{d\xi}. \quad (4.6.16)$$

Die Energiedichte des Feldes einer elektromagnetischen Welle ist

$$u = \frac{1}{8\pi} (|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2) = \frac{1}{4\pi} |\underline{E}|^2 = \frac{1}{4\pi} |\underline{B}|^2, \quad (4.6.17)$$

denn wegen $|\underline{E}| = |\underline{B}|$ tragen beide Felder gleich viel zur Energiedichte bei. Die Energiestromdichte ergibt sich aus (4.3.14) zu

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi} (\underline{E} \times \underline{B}) = \frac{c}{4\pi} ((\underline{B} \times \underline{e}) \times \underline{B}) = \frac{c}{4\pi} |\underline{B}|^2 \underline{e} = c u \underline{e}. \quad (4.6.18)$$

Dieser Ausdruck hat eine einfache Interpretation: Die Energiedichte fließt mit Lichtgeschwindigkeit c in Richtung des Ausbreitungsvektors \underline{e} .

4.7 Retardierte Potentiale und Dipolstrahlung

Wir wollen nun unsere früheren Überlegungen zum Fernfeld auf den Fall zeitabhängiger Ladungs- und Stromverteilungen verallgemeinern. Wir gehen dabei von den inhomogenen Maxwellgleichungen (4.5.8) und (4.5.11) für die Potentiale aus. Die Lösungen im statischen Fall haben wir bereits früher abgeleitet, siehe (2.3.3) für das elektrostatische Potential und (3.4.3) für das Vektorpotential in Coulomb-Eichung. Lösungen von (4.5.8) und (4.5.11), die den statischen Fall in natürlicher Art und Weise verallgemeinern, sind die **retardierte Potentiale**

$$\phi(\underline{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}', t - \frac{1}{c}|\underline{r} - \underline{r}'|)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}, \quad (4.7.1)$$

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}', t - \frac{1}{c}|\underline{r} - \underline{r}'|)}{|\underline{r} - \underline{r}'|}. \quad (4.7.2)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Felder am Ort \underline{r} zur Zeit t durch die Ladungs- und Stromverteilung zu einer *früheren* Zeit

$$t' = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c} \quad (4.7.3)$$

bestimmt sind. $\frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$ ist gerade die Laufzeit einer elektromagnetischen Welle von \underline{r}' nach \underline{r} . Wir führen nun in (4.7.2) eine Multipolentwicklung durch. Dazu nehmen wir wieder an, dass $|\underline{r}'| \ll |\underline{r}|$ und erhalten in führender Ordnung

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \approx \frac{1}{|\underline{r}|} = \frac{1}{r}, \quad t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c} \approx t - \frac{r}{c}. \quad (4.7.4)$$

Damit ergibt sich für das retardierte Vektorpotential

$$\underline{A}(\underline{r}, t) \approx \frac{1}{cr} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}', t - r/c), \quad (4.7.5)$$

das die Form eines Monopolterms hat. Dieser verschwindet in der Magnetostatik, wie wir in Kap. 3.7 gesehen haben. Wir drücken nun das Integral über die Stromdichte mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung durch die Zeitableitung des elektrischen Dipolmoments (2.6.6) aus:

$$\frac{d}{dt} \underline{d} = \frac{d}{dt} \int d^3r' \underline{r}' \rho(\underline{r}', t) = \int d^3r' \underline{r}' \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int d^3r' \underline{r}' (\nabla' \cdot \underline{j}). \quad (4.7.6)$$

Im Integral können wir komponentenweise partiell integrieren:

$$\int d^3r' x' (\nabla' \cdot \underline{j}) = \int d^3r' x' \left(\frac{\partial j_x}{\partial x'} + \frac{\partial j_y}{\partial y'} + \frac{\partial j_z}{\partial z'} \right) = - \int d^3r' j_x \quad (4.7.7)$$

und analog für die y' - und z' -Komponente. Somit erhalten wir für das Vektorpotential

$$\underline{A}(\underline{r}, t) \approx \frac{1}{cr} \frac{d}{dt} \underline{d}(t - r/c) = \frac{1}{cr} \dot{\underline{d}}(t - r/c). \quad (4.7.8)$$

Bis auf die r -Abhängigkeit des Koeffizienten $1/cr$ (die zu Korrekturen höherer Ordnung führt), hat das Vektorpotential die Form (4.6.15) einer ebenen Welle, die sich in radialer Richtung $\underline{e}_r = \underline{r}/r$ ausbreitet. Wir können daher die Beziehungen aus (4.6.16) übernehmen und erhalten für die **Dipolstrahlung**

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = -\frac{1}{c^2 r} \left(\underline{e}_r \times \ddot{\underline{d}}(t - r/c) \right), \quad \underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{B} \times \underline{e}_r. \quad (4.7.9)$$

Die Feldstärken nehmen in radialer Richtung wie $1/r$ ab, d.h. viel langsamer als bei statischen Feldern! Die Energiestromdichte fällt wie $1/r^2$ ab und somit fließt ein endlicher Energiestrom ins Unendliche.

Kapitel 5

Relativistische Elektrodynamik

Eine der zentralen Fragen, die sich bei der Betrachtung der Elektrodynamik im Rahmen der Relativitätstheorie stellt ist „Ändert sich analog zur Masse auch die Ladung mit der Geschwindigkeit?“. Die Antwort ist „Nein, die elektrische Ladung ist relativistisch invariant.“

Obwohl sich die Ladung beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen nicht ändert, tun dies jedoch die Felder. Dabei werden elektrische und magnetische Felder „gemischt“ und abhängig vom gewählten Inertialsystem.

5.1 Ein einfaches Beispiel: Strom in einem Draht

Als einfaches Beispiel betrachten wir den Stromfluss durch einen geraden Draht (Abb. 5.1.1). Im Laborsystem I bewegen sich die Elektronen mit der Geschwindigkeit v , während die positiven Metallionen des Kristallgitters ruhen. Im Ruhesystem I' der Elektronen sieht es anders aus. Hier bewegen sich die positiven Metallionen mit der Geschwindigkeit $-v$.

Von außen ist kein elektrisches Feld messbar ($E_0 = 0$), da die Elektronen und die positiven Metallionen die gleiche Anzahldichte $n_+ = n_-$ aufweisen (der Kristall ist elektrisch neutral). Es herrscht allerdings ein Magnetfeld $B_0 \neq 0$, da ein Stromfluss zu beobachten ist.

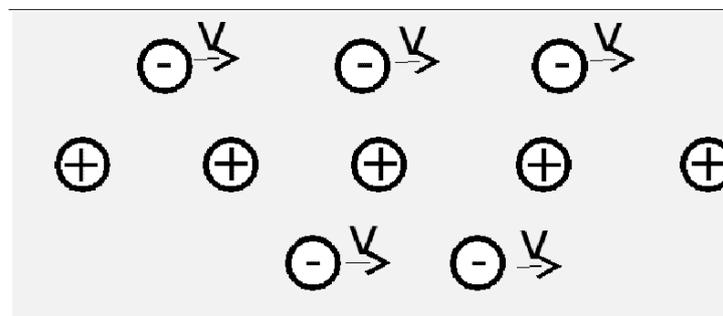


Abbildung 5.1.1: Strom in einem Draht aus der Sicht des Laborsystems. Die Elektronen bewegen sich mit der Geschwindigkeit v , die positiven Kristallionen ruhen.

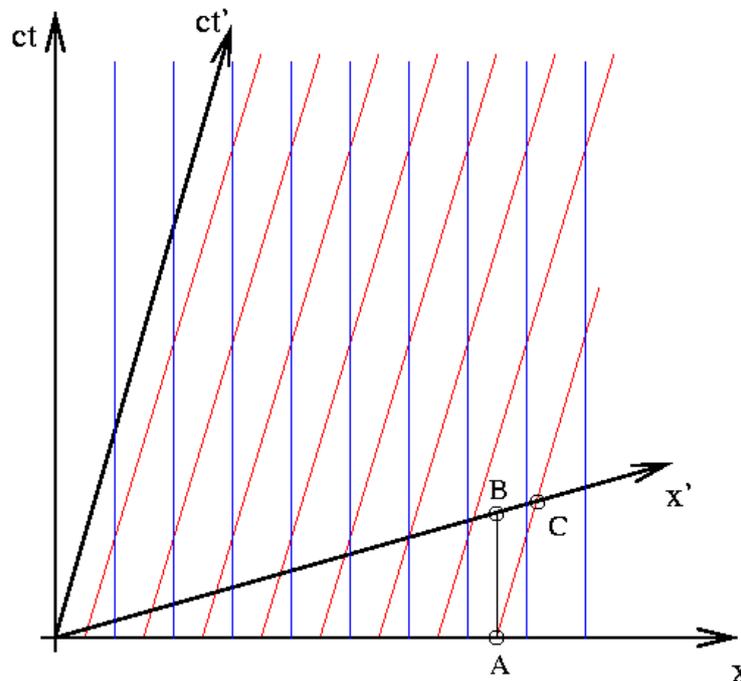


Abbildung 5.1.2: Minkowski-Diagramm mit den Weltlinien der Elektronen (rot) und Ionen (blau). (ct, x) sind die Koordinaten im Laborsystem, (ct', x') die Koordinaten im Ruhesystem der Elektronen. Der Winkel α zwischen den Achsen ist durch $\tan \alpha = v/c$ gegeben.

Im Ruhesystem I' der Elektronen gibt es aber ein elektrisches Feld. Woher kommt dieses Feld? Ist der Draht in I' geladen?

Hier hilft ein Blick auf das Minkowski-Diagramm (Abb. 5.1.2) weiter. Wir können die Achsen der beiden Systeme so konstruieren, wie wir das in einem früheren Abschnitt (Kap. 3.2 im Kapitel zur Relativitätstheorie) allgemein diskutiert haben. Im Laborsystem I messen wir kein elektrisches, sondern nur ein magnetisches Feld. Nach der bekannten Gleichung (Aufg. 49) ist das Feld eines stromdurchflossenen Drahtes durch

$$B = \frac{2J}{cr} \quad (5.1.1)$$

gegeben, wobei J der Strom und r der Abstand vom Draht ist.

In I sind die Weltlinien der Ionen und Elektronen gleich dicht. In I' liegen die Ionen auf der x' -Achse aber dichter als die Elektronen (Abb. 5.1.2). Daher erscheint der Draht für einen Beobachter in I' geladen und somit misst er ein elektrisches Feld. Eine quantitative Analyse zeigt, dass dieses Feld genau so groß ist, wie von der Lorentz-Transformation vorhergesagt.

Wir wollen nun mit Hilfe von Minkowski-Diagrammen die Felder im Ruhesystem I' der Elektronen bestimmen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit v groß ist, aber dennoch deutlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Für $v \ll c$ ist dann $\frac{v}{c} = \tan \alpha \approx \alpha$. Die Anzahldichte in I' ist umgekehrt proportional zum Abstand der Schnittpunkte der Weltlinien mit

der x' -Achse. Aus Abb. 5.1.2 lesen wir ab:

$$\frac{n'_+}{n'_-} = \frac{0C}{0B} = \frac{0B + BC}{0B} = 1 + \frac{BC}{0B} \frac{AB}{0B} = 1 + \frac{v^2}{c^2}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass der Winkel α klein ist mit $\alpha \approx v/c$. Somit ist die Ladungsdichte im Ruhesystem der Elektronen gegeben durch

$$\rho' = e(n'_+ - n'_-) = e \left(1 - \frac{n'_+}{n'_-} \right) n_- = en_- \frac{v^2}{c^2}. \quad (5.1.2)$$

Hieraus kann man dann die Stärke des elektrischen Feldes in I' bestimmen.

5.2 Elektrodynamik im Vierer-Formalismus

Die Gleichungen (4.5.8) und (4.5.11) für die Potentiale legen nahe, dass die Potentiale einen Vierervektor

$$A = (\phi, \underline{A}) \quad (5.2.1)$$

bilden, den man als den Vierervektor der Potentiale bezeichnet. Führt man noch den Vierervektor der Quellen

$$J = (c\rho, \underline{j}) \quad (5.2.2)$$

ein, so kann man die Gleichungen (4.5.8) und (4.5.11) kompakt schreiben als

$$\square A = -\frac{4\pi}{c} J \quad (5.2.3)$$

Tatsächlich ist der d'Alembert-Operator \square ein Lorentzskalar. Zunächst gilt mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right), \quad (5.2.4)$$

wobei wir die Lorentz-Transformation der Raum- und Zeit-Koordinaten verwendet haben. Hiermit zeigt man leicht, dass

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \dots = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \square'. \quad (5.2.5)$$

Somit ist (5.2.3) manifest Lorentz-invariant. Daher muss sich der Vierervektor der Potentiale unter einer Lorentz-Transformation in x -Richtung transformieren wie die Komponenten der Raumzeit:

$$\begin{aligned} \phi' &= \gamma \left(\phi - \frac{v}{c} A_x \right), \\ A'_x &= \gamma \left(A_x - \frac{v}{c} \phi \right), \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z. \end{aligned}$$

Damit sind über $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ und $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ die Transformationen der Felder bestimmt:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma \left(E_y - \frac{v}{c} B_z \right), & E'_z &= \gamma \left(E_z + \frac{v}{c} B_y \right), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma \left(B_y + \frac{v}{c} E_z \right), & B'_z &= \gamma \left(B_z - \frac{v}{c} E_y \right), \end{aligned}$$

Genauer sieht die Lorentz-Transformation elektrischer und magnetischer Felder folgendermaßen aus, wenn wir sie in Komponenten parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung zerlegen:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} &= \frac{(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp} &= \frac{(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E})_{\perp}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Die Lorentz-Transformation mischt also elektrische und magnetische Felder! Aus einem reinen elektrischen Feld wird z.B. in einem anderen Bezugssystem ein elektrisches und ein magnetisches Feld.

Im Falle einer Punktladung werden die Feldlinien senkrecht zur Bewegungsrichtung zusammengedrängt, d.h. dort wird das Feld größer (siehe Abb. 5.2.1).

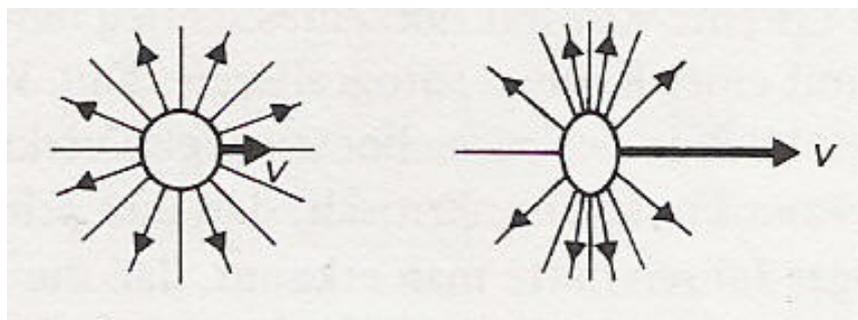


Abbildung 5.2.1: Das Feld einer langsam (links) und einer schnell bewegten (rechts) Punktladung (aus [4]).

Eine Erweiterung des Viererformalismus hilft uns, die mathematische Struktur der Felder \vec{E} und \vec{B} besser zu verstehen.

Bisher haben wir die Vierervektoren in der Form

$$X = (X^0, X^1, X^2, X^3) = (ct, x, y, z) \quad (5.2.6)$$

angegeben. Diese Form bezeichnet man auch als **kontravariante Vierervektoren**. Es nützlich, über

$$\bar{X} = (X_0, X_1, X_2, X_3) = (-ct, x, y, z) \quad (5.2.7)$$

einen **kovarianten Vierervektor** einzuführen. Damit lässt sich z.B. der **Minkowski-Betrag** (als Verallgemeinerung des Minkowski-Abstandes) schreiben als

$$|X|^2 = -X \cdot \bar{X} = -\sum_{\mu=0}^3 X_{\mu} X^{\mu}. \quad (5.2.8)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass in der Literatur oft die sog. **Einstein'sche Summenkonvention** verwendet wird. Dabei wird über Indizes μ , die einmal unten und einmal oben in einem Produkt auftauchen, über $\mu = 0, 1, 2, 3$ summiert. Der Minkowski-Betrag schreibt sich dann

$$|X|^2 = -X_{\mu} X^{\mu}. \quad (5.2.9)$$

Mit Hilfe der kovarianten Vierervektoren können wir auch den d'Alembert-Operator in der Form

$$\square = -\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial X_{\mu} \partial X^{\mu}} \quad (5.2.10)$$

schreiben.

Wir definieren nun den **Feldstärketensor** durch seine Komponenten

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial X_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial X_{\nu}}, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3). \quad (5.2.11)$$

Diese Definition hat die Struktur einer vierdimensionalen Rotation. Der Feldstärketensor ist daher eine antisymmetrische 4×4 -Matrix. Auf Grund der Antisymmetrie müssen die Diagonalelemente verschwinden: $F^{\mu\mu} = 0$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Die verbleibenden 12 Elementen sind betraglich paarweise gleich: $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Es verbleiben daher sechs unabhängige Elemente. Diese entsprechen den sechs Komponenten von \underline{E} und \underline{B} .

Es gilt z.B.

$$F^{01} = \frac{\partial A^1}{\partial X_0} - \frac{\partial A^0}{\partial X_1} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = E_x \quad (5.2.12)$$

und

$$F^{12} = \frac{\partial A^2}{\partial X_1} - \frac{\partial A^1}{\partial X_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\nabla \times A)_z = B_z. \quad (5.2.13)$$

Insgesamt erhält man so für den Feldstärketensor

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.14)$$

Damit wird eine einheitliche Beschreibung von elektrischen und magnetischen Feldern möglich, denn die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lassen sich nun in der Form

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial X^{\nu}} F^{\nu\mu} = -\frac{4\pi}{c} J^{\mu} \quad (5.2.15)$$

schreiben. Die homogenen Maxwell-Gleichungen können durch den modifizierten Tensor

$$\hat{F} = \left(\tilde{F}^{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.16)$$

ausgedrückt werden, wobei.

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{falls } \mu\nu\alpha\beta \text{ gerade Permutation von } 0, 1, 2, 3 \\ -1 & \text{falls } \mu\nu\alpha\beta \text{ ungerade Permutation von } 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.2.17)$$

dem total antisymmetrischen Tensor bezeichnet. Die homogenen Maxwell-Gleichungen lauten dann

$$\sum_{\mu, \nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial X_\nu} \tilde{F}^{\nu\mu} = 0. \quad (5.2.18)$$

Literaturverzeichnis

- [1] K. Simonyi: *Kulturgeschichte der Physik*, Harri Deutsch (2001)
- [2] D.C. Giancoli: *Physik*, Pearson Studium (2009)
- [3] J. Krug: Skript zur Vorlesung *Theoretische Physik in 2 Semestern*
- [4] R.U. Sexl, H.K. Schmidt: *Raum - Zeit - Relativität* (Vieweg-Verlag)