
13. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

Sommersemester 2009

www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs09.html

1. Ableitung von Umkehrfunktionen

f^{-1} sei die Umkehrfunktion von f , d.h. $f^{-1}(f(x)) = x$. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Berechnen Sie mit dieser Formel die Ableitungen von:

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $f(x) = \arctan(x)$

c) $f(x) = \operatorname{arsinh}(x)$

Hinweis: Vereinfachen Sie die Resultate in (b) und (c) so weit, dass keine trigonometrischen oder hyperbolischen Funktionen mehr darin vorkommen.

2. Monotonie und Ableitung

Sei $I :=]a, b[$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und differenzierbare Funktion. Dann gilt

a) $(\forall t \in I : f'(t) = 0) \Leftrightarrow f \text{ ist konstant}$

b) $(\forall t \in I : f'(t) \geq 0) \Leftrightarrow f \text{ ist monoton wachsend}$

c) $(\forall t \in I : f'(t) > 0) \Rightarrow f \text{ ist streng monoton wachsend}$

Für monoton fallende Funktionen lassen sich b) und c) analog formulieren. Zeigen Sie jeweils zu a) und b) die „ $\Leftarrow$ “-Richtung und finden Sie zu c) ein Gegenbeispiel dafür, dass „ $\Leftarrow$ “ nicht gilt.

3. Kurvendiskussion

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}^+$ auf Nullstellen, Polstellen, Maxima, Wendepunkte und Asymptotik (d.h. das Fernverhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$). Fertigen Sie für $a = 1$ eine Skizze der jeweiligen Graphen an.

a) $f(x) = x + \frac{a}{x}$

b) Die Fermi-Funktion: $f(x) = \frac{1}{e^{ax} + 1}$

c) Die Bose-Funktion: $f(x) = \frac{1}{e^{ax} - 1}$