13. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

www.thp.uni-koeln.de/∼as/vorkurs0910.html

Hinweis: Im Folgenden finden Sie Lösungs**skizzen** für die Aufgaben des 13. Übungsblatts.

1. Integrale

a) Hierbei handelt es sich um eine Potenzfunktion, da $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ und daher

$$\int_1^{a^2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_1^{a^2} = 2(a-1).$$

b) Zweimalige partielle Integration, da man die Stammfunktion von e^x kennt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^x\,\mathrm{d}x &= x^2e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,\mathrm{d}x = e - \int_0^1 2xe^x\,\mathrm{d}x = e - \left(2xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= e - \left(2e - 2e^x\Big|_0^1\right) = e - (2e - (2e-2)) = e - 2.\end{aligned}$$

c) Substitution mit $y = x/2$ liefert zunächst:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x/2)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \cos^2(y)\,\mathrm{d}y$$

Nun kann man partielle Integration anwenden, was aber mühsam ist. Alternativ kann man sich zunächst klar machen (z.B. an Hand des Graphen), dass

$$\int_0^{\pi} \cos^2(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\pi}^{2\pi} \cos^2(y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{und somit} \qquad \int_0^{\pi} \cos^2(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Außerdem gilt, da Sinus und Kosinus um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander verschoben sind:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \sin^2(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Somit folgt wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^2(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2(y)\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}y - \int_0^{2\pi} \sin^2(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}y - \int_0^{2\pi} \cos^2(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Dies kann man nach dem gesuchten Integral auflösen:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}x\Big|_0^{2\pi} = \pi\,.$$

Setzen wir nun alle Teilergebnisse zusammen, so erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x/2)\,\mathrm{d}x = \pi\,.$$

d) Zunächst zerlegen wir:

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Das erste Integral kann man leicht bestimmen, da die Stammfunktion von $1/(1+x^2)$ durch den Arcustangens geben ist. Dies kann man mit Hilfe der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion überprüfen. Das zweite Integral ist vom Typ

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(f(x))$$

wie man leicht überprüft (oder mit der Substitutionsregel herleitet!). Somit erhalten wir:

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

e) Substitution mit $y = ax$:

$$\int_1^2 \ln(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_a^{2a} \ln(y)\,\mathrm{d}y.$$

Die Stammfunktion des Logarithmus ist $F(x) = x\ln x - x$, wie man durch Ableiten nachprüft. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^{2a} \ln(y)\,\mathrm{d}y &= (y\ln y - y)\Big|_a^{2a} = 2a\ln(2a) - 2a - (a\ln(a) - a)\\ &= 2a(\ln 2 + \ln a) - 2a - a\ln a + a = 2a\ln 2 + a\ln a - a.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\int_1^2 \ln(ax)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 + \ln a - 1.$$

f)

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^N a_i x^i\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^N a_i \int_0^1 x^i\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^N a_i \left(\frac{1}{i+1}x^{i+1}\Big|_0^1\right) = \sum_{i=0}^N \frac{a_i}{i+1}\,.$$

g) Zunächst machen wir eine Partialbruchzerlegung. Diese ergibt:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x}\,.$$

Dann können wir integrieren und mit früheren Ergebnissen vereinfachen:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{artanh}(x)\,.$$

h) Da $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, ist das Integral vom gleichen Typ wie das zweite Integral in Aufgabe d). Daher ist die Stammfunktion des Tangens durch $-\ln|\cos(x)|$ gegeben. In dem Integrationsintervall ist der Kosinus positiv, daher gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos(x))\Big|_0^{\pi/3} = -\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + \ln(\cos 0) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 1 = \ln 2 \approx 0.693\,.$$