10. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

www.thp.uni-koeln.de/∼as/vorkurs0910.html

1. Definition des Grenzwerts

Eine Folge (a_n) heißt *konvergent* gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N} : |a_n - a| < \delta\ .$$

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ein Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist.

Zeigen Sie mit dieser Definition:

a) Die Folge $a_n = \dfrac{1}{n}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Die Folge $a_n = \lambda^n$ für $0 \leq \lambda < 1$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Anleitung zu a) und b): Suchen Sie zu einem beliebigen $\delta > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ (abhängig von δ), so dass Sie zeigen können, dass für ein beliebiges $n > N$ der „Abstand“ $|a_n - a| < \delta$ wird.

c) Die Folge $a_n = n$ ist divergent.

Anleitung zu c): Zeigen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{R}$, dass Sie z.B. für $\delta = 1$ zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n > N$ finden, dass gerade $|a_n - a| \geq \delta$ wird. Eine Folge (a_n) ist also divergent, wenn gilt

$$\forall_{a\in\mathbb{R}}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{N\in\mathbb{N}}\ \exists_{n>N} : |a_n - a| \geq \delta\ .$$

2. Grenzwerte

In der Vorlesung haben Sie weitere Kriterien für die Konvergenz von Folgen kennengelernt. Nutzen Sie diese Kriterien für die Bestimmung der Grenzwerte der Folgen:

a) $a_n = \dfrac{1}{n^k}$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$

(*Hinweis*: Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 1a. Ohne Beweis dürfen Sie $n^k \geq n$ für $n, k \in \mathbb{N}$ verwenden.)

b) $a_n = \dfrac{n^3 - 2n + 1}{5n^3 - 1}$

c) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_0 = 1$

(*Hinweis*: Benutzen Sie das Monotoniekriterium.)