11. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

www.thp.uni-koeln.de/∼as/vorkurs0910.html

1. Reihen

Zeigen Sie, dass die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i \qquad \text{für} \quad 0 \leq q < 1$$

konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.
(*Hinweis*: Betrachten Sie die Folge $a_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$ der Partialsummen und verwenden Sie die Aufgabe 1 der 8. Übung sowie Aufgabe 1b der 10. Übung.)

2. Komplexe Zahlen I

a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von $z = x + iy$ wie folgt erhalten werden können:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i} \ .$$

b) Skizzieren Sie die Lage der Punkte $z = 1 + 3i$ und $z = 2(1 - i)$ und die Mengen $M_1 = \{z \,|\, 4 > |z|\}$ und $M_2 = \{z \,|\, \mathrm{Re}(z) \geq 1,\, 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$ in der komplexen Ebene.

c) Berechnen Sie $(2 + 2i)^2 + (2 - 2i)^2$ und $\frac{(-2+3i)^2}{4-4i}$.

d) Nun betrachten wir zwei komplexe Zahlen $z_k = x_k + iy_k$ mit $k = 1, 2$. Zeigen Sie, dass

1. $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$,
2. $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$,
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

e) Bestimmen Sie für $z_1 = 1 + \sqrt{3}\ i$ und $z_2 = -1 - i$ die reellen Zahlen a und ϕ so, dass $z = a\ \exp(i\phi)$.

3. Komplexe Zahlen II

Die trigonometrische Funktionen können durch die Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten dargestellt werden:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \ .$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass:

a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.

b) $\sin z = -i \sinh(iz)$ bzw. $\cos z = \cosh(iz)$.

c) $(\cos\alpha + i \sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$. (Formel von Moivre)

Finden Sie ausgehend von c) eine Formel für $\cos 2\alpha$ bzw. $\sin 2\alpha$ sowie $\cos 3\alpha$ bzw. $\sin 3\alpha$.