
12. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs0910.html

1. Quotientenregel

a) Zeigen Sie für Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ die Gültigkeit der Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ausgehend von der Produkt- und Kettenregel.

b) Berechnen Sie die Ableitung von $\tan(x)$.

2. Ableitungen elementarer Funktionen

Berechnen Sie die Ableitungen (bzgl. x) von:

a) $\frac{x^2 + 3}{x + 2}$	b) a^x	c) $\sqrt{x} + \sqrt[n]{x}$	d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
e) $\sin(x) \cos(x)$	f) $e^{x \sin x}$	g) $\cosh x$	h) $\sinh x$

3. Monotonie und Ableitung

Sei $I :=]a, b[$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und differenzierbare Funktion. Dann gilt

- a) $(\forall t \in I : f'(t) = 0) \Leftrightarrow f$ ist konstant
- b) $(\forall t \in I : f'(t) \geq 0) \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend
- c) $(\forall t \in I : f'(t) > 0) \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend

Für monoton fallende Funktionen lassen sich b) und c) analog formulieren. Zeigen Sie jeweils zu a) und b) die „ \Leftarrow “-Richtung und finden Sie zu c) ein Gegenbeispiel dafür, dass „ \Leftarrow “ nicht gilt.

4. Ableitung von Umkehrfunktionen

f^{-1} sei die Umkehrfunktion von f , d.h. $f^{-1}(f(x)) = x$. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel:

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Berechnen Sie mit dieser Formel die Ableitungen von:

a) $f(x) = \ln(x)$	b) $f(x) = \arctan(x)$	c) $f(x) = \operatorname{arsinh}(x)$
--------------------	------------------------	--------------------------------------

Hinweis: Vereinfachen Sie die Resultate in (b) und (c) so weit, dass keine trigonometrischen oder hyperbolischen Funktionen mehr darin vorkommen.

5. Kurvendiskussion

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}^+$ auf Nullstellen, Polstellen, Maxima, Wendepunkte und Asymptotik (d.h. das Fernverhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$). Fertigen Sie für $a = 1$ eine Skizze der jeweiligen Graphen an.

a) $f(x) = x + \frac{a}{x}$

b) Die Fermi-Funktion: $f(x) = \frac{1}{e^{ax} + 1}$

c) Die Bose-Funktion: $f(x) = \frac{1}{e^{ax} - 1}$