11. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

www.thp.uni-koeln.de/∼as/vorkurs10.html

1. Monotonie und Ableitung

Sei $I :=]a, b[$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige und differenzierbare Funktion. Dann gilt

a) $\big(\forall t \in I : f'(t) = 0\big) \Leftrightarrow f$ ist konstant

b) $\big(\forall t \in I : f'(t) \geq 0\big) \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend

c) $\big(\forall t \in I : f'(t) > 0\big) \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend

Für monoton fallende Funktionen lassen sich b) und c) analog formulieren. Zeigen Sie jeweis zu a) und b) die „$\Leftarrow$“-Richtung und finden Sie zu c) ein Gegenbeispiel dafür, dass „$\Leftarrow$“ nicht gilt.

2. Ableitung von Umkehrfunktionen

$\overset{-1}{f}$ sei die Umkehrfunktion von f, d.h. $\overset{-1}{f}(f(x)) = x$. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel:

$$(\overset{-1}{f})' = \frac{1}{f' \circ \overset{-1}{f}}$$

Berechnen Sie mit dieser Formel die Ableitungen von:

a) $f(x) = \ln(x)$ b) $f(x) = \arctan(x)$ c) $f(x) = \operatorname{arsinh}(x)$

Hinweis: Vereinfachen Sie die Resultate in (b) und (c) so weit, dass keine trigonometrischen oder hyperbolischen Funktionen mehr darin

3. Kurvendiskussion

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}^+$ auf Nullstellen, Polstellen, Maxima, Wendepunkte und Asymptotik (d.h. das Fernverhalten von f für $x \to \pm\infty$). Fertigen Sie für $a = 1$ eine Skizze der jeweiligen Graphen an.

a) $f(x) = x + \dfrac{a}{x}$

b) Die Fermi-Funktion: $f(x) = \dfrac{1}{e^{ax} + 1}$

c) Die Bose-Funktion: $f(x) = \dfrac{1}{e^{ax} - 1}$

4. Zusatzaufgabe: Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Die Definition des Grenzwertes (Aufgabe 3, 10. Übung) kann folgendermaßen auf Funktionen erweitert werden:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \quad \text{falls für alle Folgen } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{x \to x_0} x_n = x_0 \text{ gilt: } \quad \lim_{x \to x_0} f(x_n) = g$$

In Worten: Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, konviergiert die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ der Bilder gegen g.

Hiermit kann man nun die Stetigkeit definieren:

$$f \text{ stetig an der Stelle } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

In Worten: Der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 stimmt mit dem Funktionswert überein.

a) Zeige für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$(i): \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 1\,, \qquad (ii): \quad \lim_{x \to 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

b) Zeige, dass die in der Vorlesung eingeführte Heaviside'sche Sprungfunktion $\Theta(x)$ bei $x = 0$ nicht stetig ist.