Priv.-Doz. Dr. T. Lorenz Prof. Dr. A. Schadschneider

Vorkurs Physik: Übung 07

Wintersemester 2010/11 www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs1011.html

1. Funktionen

a) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen! Geben Sie die maximalen Definitionsbereiche $D \subset \mathbb{R}$ sowie die Bildmengen $f(D) = \{f(x)|x \in D\}$ an und untersuchen Sie, ob die Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

$$
\begin{aligned}
&1) \quad f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^2} \\
&2) \quad f : D \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto |x| \\
&3) \quad f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x} \\
&4) \quad f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \ , \\ x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+ \ , \end{cases}
\end{aligned}
$$

b) Ist jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ surjektiv, wenn sie auf ihre Bildmenge eingeschränkt wird (also $\tilde{f} : D \to f(D)$) ?

2. Monotonie

a) Welche der folgenden Funktionen ist monoton, welche sogar streng monoton?

$$
\begin{aligned}
&1) \quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x} \\
&2) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \\
&3) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 3 \\
&4) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

b) Zeige: Jede streng monotone Funktion ist injektiv. Ist umgekehrt auch jede injektive Funktion streng monoton?

3. Umkehrfunktion

a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

zeichnerisch. Wie lautet die Umkehrfunktion explizit?

b) In welchen Definitions- und Wertebereichen ist die Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

umkehrbar und wie lautet dort die Umkehrfunktion? Hierbei seien $a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c \in \mathbb{R}$.

4. Zusatzaufgabe: Definition des Grenzwerts

Eine Folge (a_n) heißt *konvergent* gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N} : |a_n - a| < \delta\ .$$

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ein Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist.

a) Machen Sie sich anschaulich klar, was diese Definition bedeutet!

b) Zeigen Sie mit obiger Definition:

(i) Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) Die Folge $a_n = \lambda^n$ konvergiert für $0 \leq \lambda < 1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Anleitung zu (i) und (ii): Suchen Sie zu einem beliebigen $\delta > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ (abhängig von δ), so dass Sie zeigen können, dass für ein beliebiges $n > N$ der „Abstand“ $|a_n - a| < \delta$ wird.

(iii) Die Folge $a_n = n$ ist divergent.

Anleitung zu (ii): Zeigen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{R}$, dass Sie z.B. für $\delta = 1$ zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n > N$ finden, dass gerade $|a_n - a| \geq \delta$ wird. Eine Folge (a_n) ist also divergent, wenn gilt

$$\forall_{a\in\mathbb{R}}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{N\in\mathbb{N}}\ \exists_{n>N} : |a_n - a| \geq \delta\ .$$