Priv.-Doz. Dr. T. Lorenz Prof. Dr. A. Schadschneider

Vorkurs Physik: Übung 09

Wintersemester 2010/11 `www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs1011.html`

1. Rechenregeln für Logarithmen

a) Beweisen Sie die folgenden Gleichungen unter Verwendung der bekannten Rechenregeln für die Exponentialfunktion $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ bzw. $(e^n)^m = e^{n \cdot m}$:

$$\begin{aligned} &1) \quad \ln(A \cdot B) = \ln(A) + \ln(B) \\ &2) \quad \ln(\frac{A}{B}) = \ln(A) - \ln(B) \\ &3) \quad \ln(A^m) = m \cdot \ln(A) \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie die für einen Basiswechsel des Logarithmus gültige Gleichung

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

2. Trigonometrische Funktionen

a) Zeigen Sie ausgehend von den Definitionen der trigonometrischen Funktionen, dass

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{1 + \tan^2 \phi} \quad \text{und} \quad \sin^2 \phi = \frac{1}{1 + \cot^2 \phi} \ .$$

b) Zeigen Sie

1. $\sin(2\phi) = 2 \sin\phi \cos\phi \quad$ bzw. $\quad \cos(2\phi) = 2\cos^2\phi - 1$,
2. $\cos\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\phi)} \quad$ für $\quad \phi \in [-\pi, \pi]$,
3. $\sin\phi_1 + \sin\phi_2 = 2\,\sin\frac{(\phi_1 + \phi_2)}{2}\,\cos\frac{(\phi_1 - \phi_2)}{2}$.

mit Hilfe der bekannten Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\phi_1 \pm \phi_2) &= \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2 \pm \cos\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \, , \\ \cos(\phi_1 \pm \phi_2) &= \cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 \mp \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \, . \end{aligned}$$

3. Hyperbolische Funktionen

Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen der hyperbolischen Funktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

folgende Beziehungen:

1. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ bzw. $\cosh(-x) = \cosh(x)$
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
3. $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$
4. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$

4. Hyperbolische Umkehrfunktion

Zeigen Sie

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

ausgehend von den Definitionen der elementaren Funktionen.