Andreas Schadschneider

Vorkurs für Physik

Version: 1. Oktober 2010

Wintersemester 2010/11

Vorbemerkungen

Die Vorlesung wendet sich an alle Studienanfänger der Naturwissenschaften, nicht nur an zukünftige Physik-Studierende. Sie dient im wesentlichen dazu, die notwendige Mathematik aus der Schule zu wiederholen. Für diejenigen, die einen Mathematik-Leistungskurs besucht haben, dürfte die Vorlesung thematisch kaum Neues bieten. Trotzdem ist allen Studienanfängern die Teilnahme empfohlen, zum Auffüllen von Lücken und auch zur Vorbereitung auf die Arbeitsweise im Studium. Zusätzlich zur Vorlesung werden begleitende Übungen angeboten, in der die wesentlichen Techniken eingeübt werden sollen.
Die Vorlesung richtet sich nicht nach einem speziellen Buch. Zur Ergänzung bieten sich -je nach Studienziel - verschiedene Bücher an. Grundsätzlich ist es ratsam, sich Bücher zunächst in einer der Bibliotheken oder im Fachhandel anzuschauen. Die Geschmäcker sind nun mal verschieden!

- Für Physiker:

  S. Großmann: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (Teubner)

  Dieses Buch ist für alle Physikstudenten zu empfehlen und ist auch nach dem Vordiplom noch sehr nützlich. Es ist allerdings in einigen Dingen (z.B. Notation) gewöhnungsbedürftig und daher für andere Naturwissenschaftler nur bedingt empfehlenswert.

  C.B. Lang, N. Pucker: *Mathematische Methoden in der Physik* (Spektrum)

  Ein neueres Lehrbuch, das alle Themen der Vorlesung umfasst. Enthält auch zahlreiche Übungsaufgaben mit Lösungen. (Preis: ca. 45 Euro)

  T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, H. Stachel: *Mathematik* (Spektrum Verlag)

  Eine Empfehlung der Studierenden! Sehr umfangreiches Mathematik-Buch, das sich aber auch um die Anschauung bemüht und daher sehr gut zur Begleitung der Vorlesung geeignet ist. (Preis: ca. 70 Euro)

  Fischer/Kaul: *Mathematik für Physiker* (Teubner)

  Diese zweiteilige Werk ist ausführlicher als das Buch von Großmann. Es ist aber eher wie ein Mathematik-Lehrbuch aufgebaut. Es enthält viele nützliche Resultate und kann auch als Nachschlagewerk dienen.

  Allen, die die Mathematik-Vorlesungen “Analysis I” und “Lineare Algebra I” hören werden, empfehle ich, sich direkt an die entsprechenden Literaturempfehlungen für diese Vorlesungen zu halten. Spezielle Literatur für den Vorkurs ist dann eigentlich nicht mehr nötig.

- Für Chemiker, Biologen, etc.:

  Es gibt zahlreiche Bücher mit Titeln wie „Mathematik für Naturwissenschaftler“ etc. Hier ist aber Vorsicht geboten, da sich diese häufig mit fortgeschrittenerer Mathematik beschäftigen. Ansonsten ist das Buch von Fischer/Kaul empfehlenswert.

Für Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar. Sie können auch per email an mich (`as@thp.uni-koeln.de`) geschickt werden. Die jeweils aktuellste Version des Skripts ist im Internet über meine Homepage

`http://www.thp.uni-koeln.de/~as/as.html`

verfügbar.

Andreas Schadschneider

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Lineare Algebra

Kapitel II

Analysis

II.1 Funktionen

II.1.1 Grundlagen und Beispiele

Definition II.1.1 (Funktion)**.**
Eine **Funktion** ist eine Vorschrift f, die jedem Element einer Menge D, dem **Definitionsbereich**, ein Element $y =: f(x)$ einer anderen Menge Z, der **Zielmenge**, zuordnet. Man spricht auch von einer **Abbildung von** D **nach** Z und bezeichnet diese mit

$$f : \ D \to Z$$

oder charakterisiert die Zuordnung durch

$$x \mapsto f(x) \qquad \text{mit} \ \ x \in D, \ f(x) \in Z.$$

Bemerkungen:

1. x und/oder $f(x)$ können auch Vektoren sein!

2. Statt $y = f(x)$ schreibt man oft auch einfach $y = y(x)$. Die Schreibweise $y(x)$ soll andeuten, dass man in der Physik häufig nicht zwischen der Funktion f (also der Zuordnungsvorschrift) und der abhängigen Variablen y unterscheidet.

II.1.2 Eigenschaften

Funktionen $f : D \to Z$ lassen sich auf verschiedene Arten und Weisen charakterisieren. In einer Kurvendiskussion kann man folgende Eigenschaften untersuchen.

1. **Injektivität**: Die Funktion f ist injektiv, wenn $f(x_1) \neq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$.

2. **Surjektivität**: Die Funktion f ist surjektiv, wenn die Bildmenge $f(D) := \{f(x)/x \in D\}$ mit der Zielmenge übereinstimmt: $f(D) = Z$.

3. **Bijektivität**: Eine Funktion, die injektiv und surjektiv ist, bezeichnet man als bijektiv oder auch eineindeutige Abbildung. Dies wird wichtig, wenn man die Umkehrfunktion bilden möchte.

4. **Monotonie**: Die Funktion f heißt monoton wachsend (bzw. fallend), wenn für alle $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$). Gilt sogar die strenge Ungleichheit, so heißt die Funktion streng monoton wachsend (bzw. fallend).

5. **Extrema**: f nimmt im Punkt x_0 ein (lokales) Maximum (bzw. Minimum) an, falls es ein Intervall $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ um x_0 gibt ($\delta > 0$), in dem $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) ist. Das größte lokale Maximum (bzw. kleinste lokale Minimum) heißt absolutes Maximum (bzw. absolutes Minimum)[1].

6. **Asymptotik**: In der Physik interessiert man sich oft für das Verhalten von Funktionen für große oder kleine Argumente bzw. allgemeiner am Rand des Definitionesbereiches. Dieses lässt sich oft durch einfachere Funktionen charakterisieren. Z.B. sagt man, dass sich $f(x)$ für große x asymptotisch wie x^n verhält, wenn $f(x)/x^n \to 1$ für $x \to \infty$.

7. **Symmetrie (gerade/ungerade Funktionen)**: Eine Funktion f heißt gerade, falls für alle $x \in D$ gilt: $f(-x) = f(x)$.
Die Funktion heißt ungerade, falls für alle $x \in D$ gilt: $f(-x) = -f(x)$.
Man beachte, dass in der Regel Funktionen weder gerade noch ungerade sind!

II.1.3 Stetigkeit

Definition II.1.2 (Stetigkeit)**.**
Eine stetige Funktion hat einen Kurvenverlauf ohne Sprung[2]. Der Graph der Funktion kann dann ohne abzusetzen gezeichnet werden (siehe Abb. II.1.1).

Stellen, an denen eine Funktion ein "außergewöhnliches" Verhalten zeigt, bezeichnet man auch als **Singularitäten**.

Zwei wichtige Typen von singulärem Verhalten sind:

1. Unbestimmtheit: Hiermit meint man einen speziellen Fall von Nichtstetigkeit, den wir am Einfachsten anhand einer oft gebrauchten Funktion illustrieren, der sog. **Heaviside'schen Sprungfunktion**
$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$
Man sagt: "Θ ist singulär bei $x = 0$". $\Theta(0)$ wird i.a. per Konvention festgelegt. Auf welchen Wert hängt meist von der Anwendung ab. Die gebräuchlichsten Konventionen sind $\Theta(0) = 1$, $\Theta(0) = 0$ und $\Theta(0) = 1/2$.
Der Graph der Sprungfunktion ist in Abb. II.1.2 dargestellt.

[1]Vorsicht! Hier müssen evtl. Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereichs separat betrachtet werden!
[2]Wir verzichten hier auf eine streng mathematische Definition zu Gunsten der intuitiven Vorstellung.

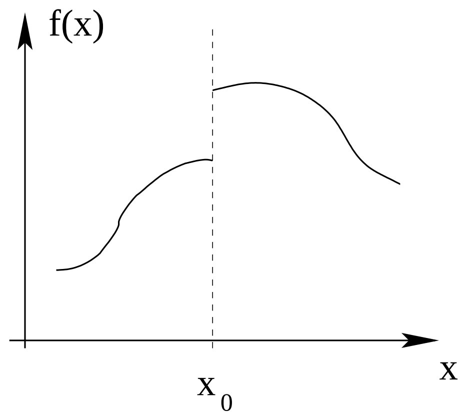

Abbildung II.1.1: Die dargestellte Funktion ist unstetig bei x_0, da sie dort einen Sprung macht.

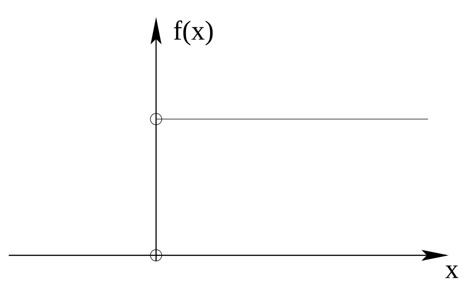

Abbildung II.1.2: Der Graph der Heaviside'schen Sprungfunktion.

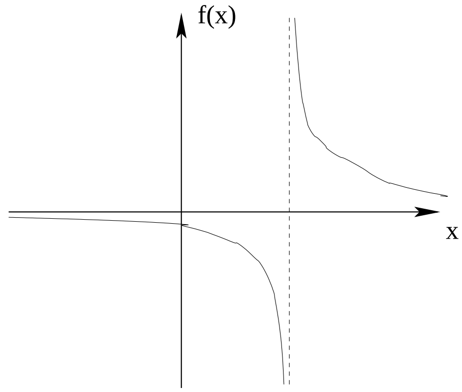

Abbildung II.1.3: Funktion mit einer Singularität im engeren Sinne.

2. Unendlichkeit (Divergenz): Der zweite wichtige Typ von Singularitäten sind Stellen, an denen die Funktionen keinen endlichen Wert annehmen, d.h. divergieren. Dies sind Singularitäten im engeren Sinne.
   Ein Beispiel ist in Abb. II.1.3 dargestellt, nämlich die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Sie ist offensichtlich für $x = 1$ nicht definiert, da dort der Nenner eine Nullstelle hat. Man sagt auch, dass f bei $x = 1$ *singulär* ist bzw. genauer, dass f dort einen **Pol** (bzw. eine **Polstelle**) hat.

In der Physik spielen Singularitäten eine wichtige Rolle, z.B. in der Theorie der Phasenübergänge. Diese lassen sich an Hand ihres Verhaltens in der Nähe von Singularitäten charakterisieren!

Bemerkung: Er gibt auch Singularitäten, die sich "beheben" lassen. Ein Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1}.$$

Formal hat der Nenner die Nullstellen $x = 1$ und $x = 2$, d.h. dort sollten Singularitäten vorliegen. Da die Nullstelle $x = 2$ von der entsprechenden Nullstelle des Zählers kompensiert wird, merkt man aber von ihr nichts. Die Funktion kann an der Stelle $x = 2$ stetig ergänzt werden durch die Festlegung $f(2) = 1$. Formal entspricht das dem Kürzen des Linearfaktors $x-2$. Man bezeichnet diese Singularität daher als **hebbare Singularität**.

II.1.4 Elementare Funktionen

Im folgenden wollen wir die wichtigsten Funktionenklassen, die in der Physik immer wieder vorkommen, vorstellen und ihre wesentlichen Eigenschaften aufzählen. Später und in den Übungen werden wir noch weitere wichtige Funktionen kennenlernen.

Potenzen und Polynome

Die Potenzfunktion ist definiert durch

$$f(x) = x^a.$$

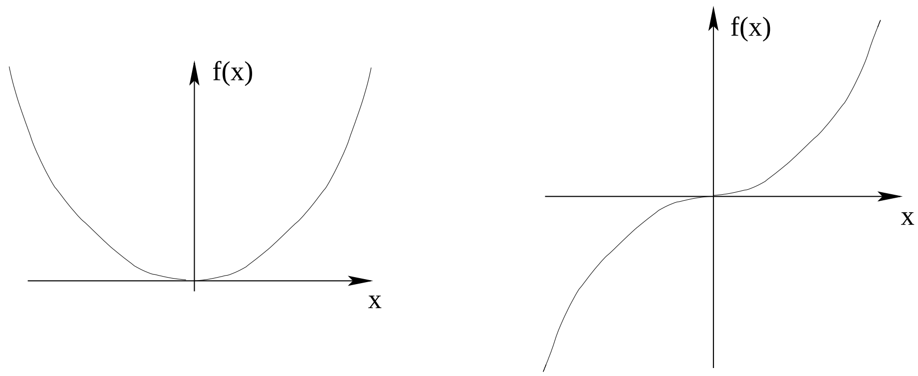

Abbildung II.1.4: Graph der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ für gerades n (links) und ungerades n (rechts).

x bezeichnet man als **Basis** und a als **Exponenten**.
Für Exponenenten $a = n \in \mathbb{N}$ sind die Potenzfunktionen gerade Funktionen, während sie für ungerade n ungerade Funktionen sind (siehe Abb. II.1.4).
Folgende Rechenregeln gelten für die Potenzfunktion (mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R}$):

$$\boxed{x^a x^b = x^{a+b}, \qquad (x^a)^b = x^{ab}, \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a}.}$$

Außerdem gilt $x^0 = 1$, wobei aber 0^0 nicht definiert ist!

Als **Polynom n-ter Ordnung** bezeichnet man Summen der Form

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

mit der natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \mathbb{R}$.

Eine **rationale Funktion** ist Quotient zweier Polynome f_m und g_n:

$$h(x) = \frac{f_m(x)}{g_n(x)}.$$

In den Übungen werden wir die sog. Partialbruchzerlegung diskutieren, mit der sich rationale Funktionen in eine Standardform bringen lassen.

Exponentialfunktion

Bei der Potenzfunktion ist die Basis variabel und der Exponent fest. Bei den Exponentialfunktionen ist es genau anders herum:

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{mit} \qquad f_a(x) = a^x.$$

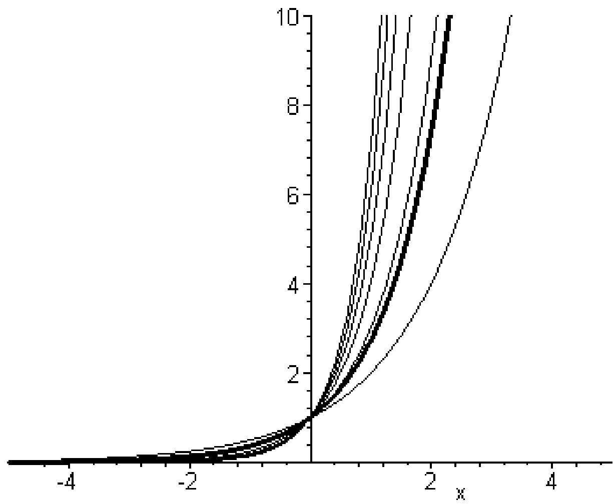

Abbildung II.1.5: Graph der Exponentialfunktion f_a für verschiedene Basen $a = 2, 3, \cdots, 7$. Die natürliche Exponentialfunktion ($a = e$) entspricht dem fett gezeichneten Graphen.

Spezielle Exponentialfunktionen sind

$$f_2(x) = 2^x, \qquad f_{10}(x) = 10^x, \qquad f_e(x) = e^x = \exp(x),$$

wobei e die sogenannte **Eulersche Zahl** ist: $e = 2.71828\ldots$.
Man bezeichnet die Exponentialfunktion zur Basis e auch als *die* Exponentialfunktion oder als **natürliche Exponentialfunktion**.

Die Exponentialfunktionen sind streng monoton wachsend und stetig. Für $a > 1$ wachsen sie für große x sehr schnell an und fallen für große negative x sehr schnell ab (Abb. II.1.5).
Spezielle Funktionswerte sind

$$f_a(0) = 1, \qquad f_a(1) = a, \qquad f_a(-1) = \frac{1}{a}.$$

Für die Exponentialfunktionen gelten folgende Rechenregeln:

$$\boxed{a^x b^x = (ab)^x, \qquad a^x a^y = a^{x+y}.}$$

Sie sind also durch folgende Funktionalgleichung charakterisiert:

$$\boxed{f_a(x) f_a(y) = f_a(x+y).}$$

Die Exponentialfunktion ist eine der wichtigsten Funktionen im Rahmen der Naturwissenschaften. Sie beschreibt z.B. viele Wachstumsprozesse (Zellteilung, Kernspaltung) und Zerfallsprozesse (Radioaktivität).

Wir haben schon erwähnt, dass die Exponentialfunktionen sehr schnell anwachsen. Etwas präziser: Sie wachsen stärker an als jede Potenz, was sich mathematisch folgendermaßen ausdrücken lässt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{f_a(x)} = 0 \qquad (a > 1, n \geq 0)$$

Entsprechend fallen die Funktionen für $x \to -\infty$ sehr schnell ab, was man sich mit $a^{-x} = 1/a^x$ leicht klar macht. Mit dieser Beziehung kann man sich auch überlegen, was im Fall $0 < a < 1$ passiert!

Logarithmus

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Definition II.1.3 (Umkehrfunktion)**.**
Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so existiert die **Umkehrfunktion** (oder auch **inverse Funktion**) $f^{-1} : Y \to X$ charakterisiert durch

$$\boxed{f\left(f^{-1}(y)\right) = y \qquad \text{und} \qquad f^{-1}\left(f(x)\right) = x \qquad \text{für alle } x \in X, y \in Y.}$$

Hierbei darf man die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ nicht mit dem Kehrwert $(f(x))^{-1} = 1/f(x)$ verwechseln! In Bücher etc. wird hier die Notation oft nicht ganz sauber verwendet. Man muß dann dem Zusammenhang entnehmen, was gemeint ist! Manchmal schreibt man daher auch $\overset{-1}{f}$ für die Umkehrfunktion.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f_a(x) = a^x$ (mit $a > 0$) bezeichnet auch man als **Logarithmus (zur Basis** a**)** $\log_a y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.
Die Logarithmusfunktion ist streng monoton wachsend und stetig. Ihren Graphen erhält man, wie allgemein für Umkehrfunktionen, durch Spiegelung des Graphen von f_a an der Diagonalen $y = x$ (siehe Abb. II.1.6). Es gilt

$$\boxed{x = \log_a(a^x), \qquad y = a^{\log_a y}.}$$

Für die Fälle $a = 10$ und $a = e$ haben sich spezielle Bezeichnungen eingebürgert:

$$\ln x := \log_e x, \qquad \log x := \log_{10} x.$$

Bem.: Wir hatten im vorigen Abschnitt gesehen, dass die Exponentialfunktion für große x schneller als jede Potenz anwächst. Als Konsequenz daraus, wächst der Logarithmus langsamer als jede Potenz, d.h.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^\gamma} = 0 \qquad \text{für } \gamma > 0.$$

Auch die Rechenregeln ergeben sich direkt aus den entsprechenden Regeln für die Exponentialfunktion. Wir stellen sie hier kurz zusammen:

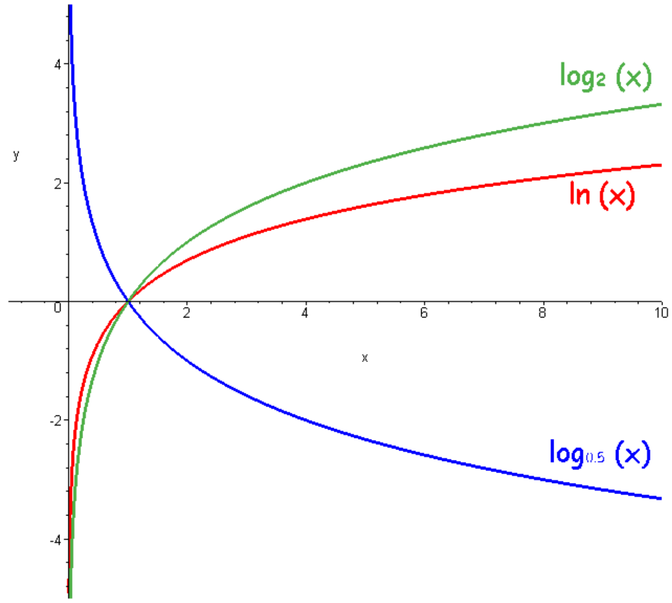

Abbildung II.1.6: Graph der Logarithmusfunktion $\log_a$ für verschiedene Basen $a = 2$, $a = e$ und $a = 1/2$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \log_a(AB) & = & \log_a A + \log_a B \\ \log_a(A^r) & = & r \log_a A \\ \log_a\left(\frac{1}{A}\right) & = & -\log_a A \end{array}}$$

mit $A, B > 0$ und $r \in \mathbb{R}$.
Mit Hilfe des Logarithmus können wir nun Exponentialfunktionen mit unterschiedlichen Basen ineinander umrechnen. Insbesondere gilt:

$$\boxed{a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}.}$$

Dies zeigt, dass es tatsächlich genügt, die natürliche Exponentialfunktion[3] $\exp(x) = e^x$ zu kennen. In den Übungen werden wir sehen, dass eine analoge Aussage auch für den natürlichen Logarithmus $\ln x$ gilt!

Trigonometrische Funktionen

Zur Definition der trigonometrischen Funktionen betrachten wir einen beliebigen Punkt auf dem Einheitskreis. Diese lassen sich vollständig durch Angabe des Winkels ϕ charakterisieren.

[3]Oder jede beliebige andere Exponentialfunktion!

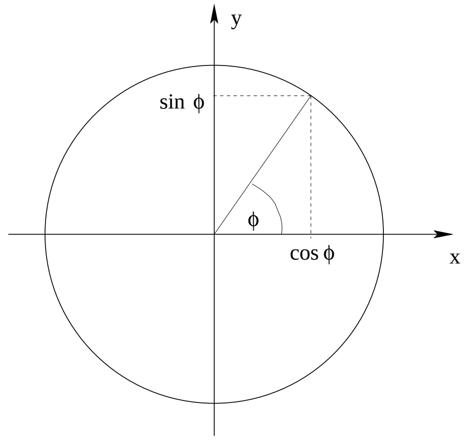

Abbildung II.1.7: Definition von Sinus und Cosinus am Einheitskreis.

Winkel werden in der Physik in der Regel im Bogenmaß (Radiant) gemessen. Die Umrechnung in Grad geschieht folgendermassen:

$$\text{Winkel in Grad} = \frac{360°}{2\pi} \cdot \text{Winkel in Radiant}.$$

Daher entspricht der Winkel π dem Winkel $\frac{360°}{2\pi} \cdot \pi = 180°$.

Die Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis sind durch $x = \cos\phi$ und $y = \sin\phi$ gegeben. Dies entspricht der klassischen geometrischen Definition der Winkelfunktionen

$$\cos\phi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}, \qquad \sin\phi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

da die Länge der Hypothenuse hier gleich 1 ist.
Wenn wir nun den Winkel ϕ variieren, ändern sich auch $\cos\phi$ und $\sin\phi$. Wir können daher Sinus und Cosinus als Funktionen von ϕ auffassen.
Bevor wir die trigonometrischen Funktionen im Detail diskutieren, noch eine Definition:

Definition II.1.4 (periodische Funktionen)**.**
Eine Funktion f heißt **periodisch mit Periode** T, wenn für alle x gilt:

$$f(x+T) = f(x).$$

Man beachte, dass die Periode $T > 0$ nicht eindeutig ist, da mit T immer auch $2T$, $3T$ etc. Perioden sind. Die kleinste Wert von $T > 0$, der obige Identität erfüllt, heißt *kleinste Periode* oder einfach nur *die Periode* von $f(t)$.

Abb. II.1.8 zeigt den Graphen von $\cos\phi$. Der Cosinus ist als Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Aus der geometrischen Interpretation ist klar, dass die Funktionswerte im Intervall $[-1, 1]$ liegen

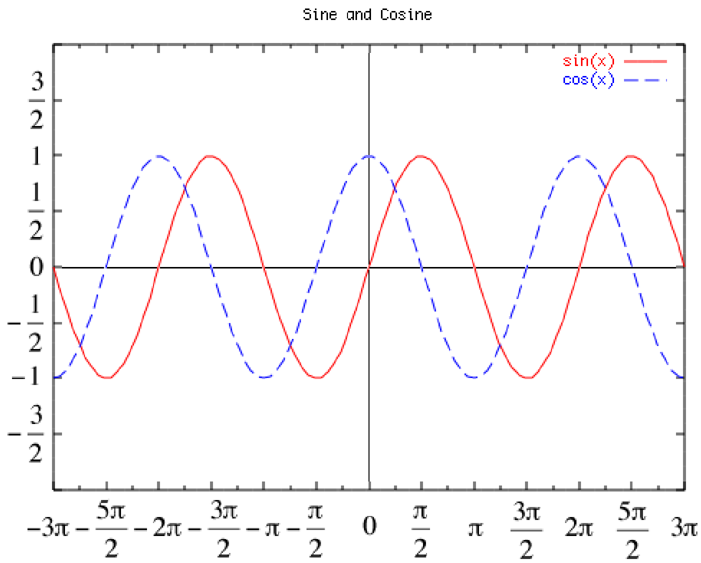

Abbildung II.1.8: Graph der Cosinus- und Sinusfunktion.

müssen. Sie zeigt außerdem, dass der Cosinus eine gerade Funktion ist, die zudem 2π-periodisch ist. Zusammengefasst gilt also:

$$\begin{aligned} \cos &: \mathbb{R} \to [-1,1] \\ \cos\phi &= \cos(-\phi) \\ \cos\phi &= \cos(\phi + 2\pi) \\ \text{Nullstellen}: &\quad (2n+1)\,\frac{\pi}{2} \qquad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Analoge Überlegungen können für den Sinus angestellt werden. Sein Graph ist in Abb. II.1.8 gezeigt. Allerdings ist der Sinus eine ungerade Funktion. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin &: \mathbb{R} \to [-1,1] \\ \sin\phi &= -\sin(-\phi) \\ \sin\phi &= \sin(\phi + 2\pi) \\ \text{Nullstellen}: &\quad n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Zwischen der Sinus- und Cosinusfunktion bestehen verschiedene wichtige Zusammenhänge:

$$\boxed{\begin{aligned} 1 &= \sin^2\phi + \cos^2\phi, \\ \cos\phi &= \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), \\ \sin\phi &= \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}}$$

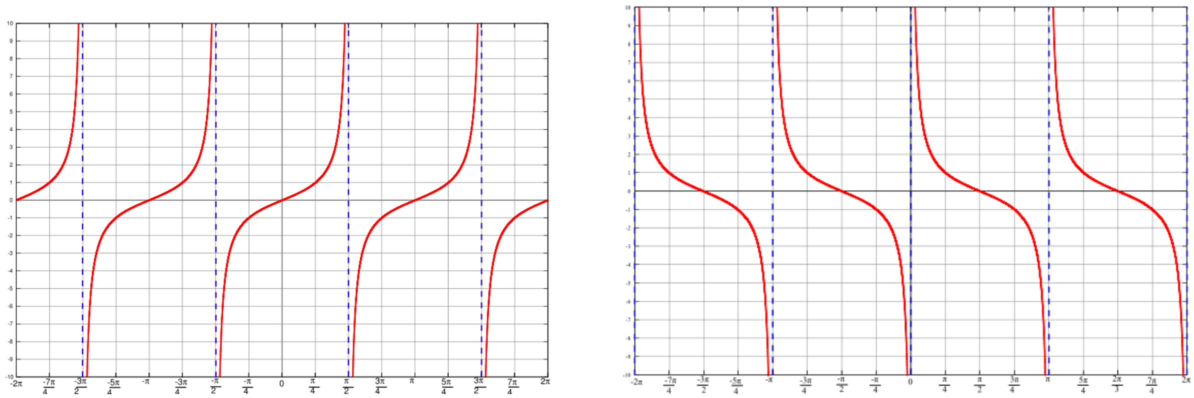

Abbildung II.1.9: Graph der Tangens- (links) und Cotangensfunktion (rechts).

Die erste Beziehung folgt sofort aus dem Satz von Pythagoras und der Definition am Einheitskreis. Die anderen beiden Identitäten besagen, dass Sinus und Cosinus um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander verschoben sind (siehe Abb. II.1.8).

Aus Sinus und Cosinus lassen sich weitere trigonometrische Funktionen definieren, die in Anwendungen häufig auftreten. Zunächst ist dies der **Tangens**

$$\tan\phi := \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$$

mit

$$\begin{array}{rcl} \tan & : & \mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\Big|n\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R} \\ \tan\phi & = & -\tan(-\phi) \\ \tan\phi & = & \tan(\phi+\pi) \\ \text{Nullstellen}: & & n\pi \qquad (n\in\mathbb{Z}) \\ \text{Pole}: & & (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \qquad (n\in\mathbb{Z}) \end{array}$$

Im Gegensatz zu Sinus und Cosinus ist der Tangens also π-periodisch. Seine Nullstellen stimmen mit denen des Sinus überein. Außerdem hat er Polstellen an den Nullstellen des Cosinus (siehe Abb. II.1.9). Im Gegensatz zur Sinus- und Cosinusfunktion ist der Tangens nicht beschränkt, sein Wertebereich sind die gesamten reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Der **Cotangens** ist der Kehrwert des Tangens:

$$\cot\phi := \frac{1}{\tan\phi} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}$$

und hat die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{rcl}
\cot & : & \mathbb{R} \setminus \{n\pi \big| n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\
\cot\phi & = & -\cot(-\phi) \\
\cot\phi & = & \cot(\phi + \pi) \\
\text{Nullstellen :} & & (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \qquad (n \in \mathbb{Z}) \\
\text{Pole :} & & n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z})
\end{array}$$

Der Cotangens ist auch π-periodisch. Er hat Pole an den Nullstellen des Sinus und seine Nullstellen stimmen mit denen des Cosinus überein. Wie der Tangens ist auch der Cotangens nicht beschränkt, sein Wertebereich sind die gesamten reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Neben den trigonometrischen Funktionen sollte man auch deren Umkehrfunktionen gut kennen. Da die trigonometrischen Funktionen alle periodisch sind, muß man ihren Definitionsbereich einschränken, so dass sie bijektiv werden und man eine Umkehrfunktion überhaupt definieren kann. Dies führt auf die Hauptwerte der Funktionen. Im folgenden sind diese zusammengestellt:

$$\begin{array}{rcccl}
\cos\ : & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] & \\
 & & \longleftarrow & & :\ \arccos \quad (\text{Arcuscosinus}) \\[2ex]
\sin\ : & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] & \\
 & & \longleftarrow & & :\ \arcsin \quad (\text{Arcussinus}) \\[2ex]
\tan\ : & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow &]-\infty,\infty & \\
 & & \longleftarrow & & :\ \arctan \quad (\text{Arcustangens}) \\[2ex]
\cot\ : &]0,\pi[& \longrightarrow &]-\infty,\infty[& \\
 & & \longleftarrow & & :\ \mathrm{arccot} \quad (\text{Arcuscotangens})
\end{array}$$

Abb. II.1.10 und II.1.11 zeigen die Graphen der inversen trigonometrischen Funktionen.

Hyperbolische Funktionen

siehe Übung 9, Aufg. 3 und 4

II.2 Differentialrechnung

II.2.1 Ableitung

Ein typisches physikalisches Problem ist die Bestimmung der Geschwindigkeit, wenn die zurückgelegte Entfernung als Funktion der Zeit bekannt ist. Dies gilt insbesondere, wenn die Geschwindigkeit nicht konstant ist. Man kann nach der momentanen Geschwindigkeit zu einem gegebenen

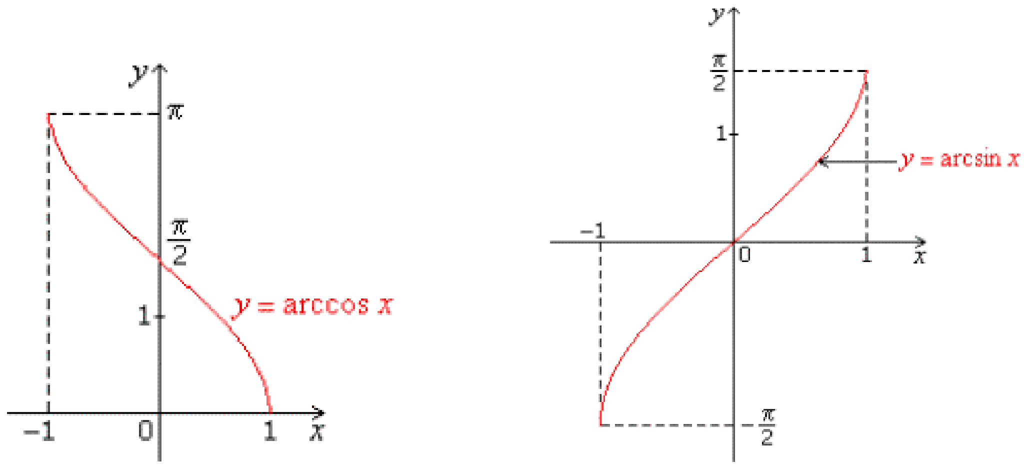

Abbildung II.1.10: Graph der Umkehrfunktionen $\arccos$ (links) und $\arcsin$ (rechts) der Sinus- und Cosinusfunktion.

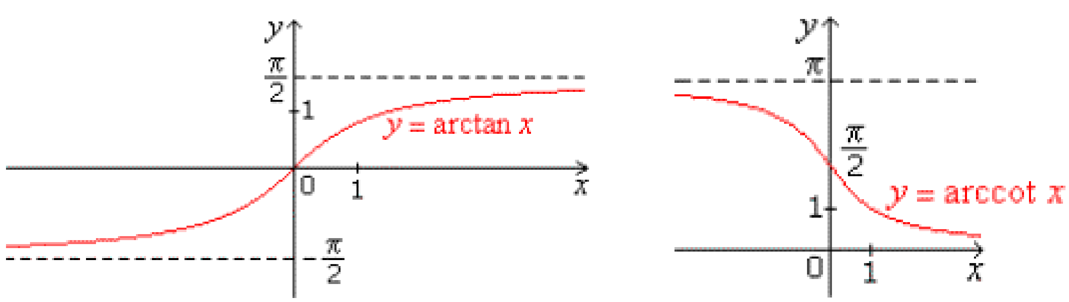

Abbildung II.1.11: Graph der Umkehrfunktionen $\arctan$ (links) und arccot (rechts) der Tangens- und Cosinusfunktion.

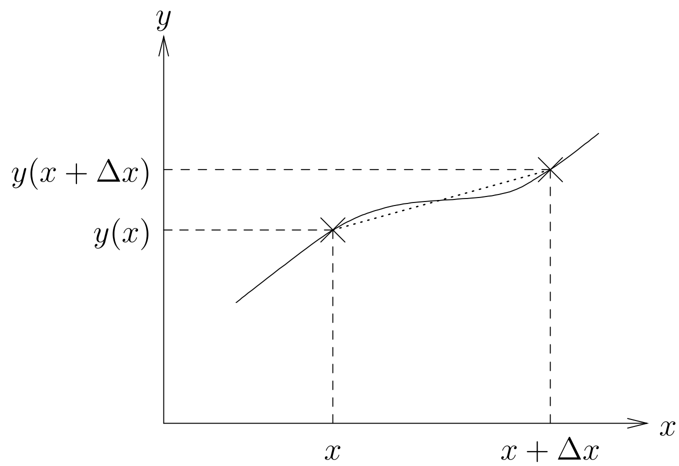

Abbildung II.2.1: Zur Definition der Ableitung

Zeitpunkt fragen. Anschaulich entspricht dies der Bestimmung der Steigung des Graphen einer vorgegebenen Funktion in einem beliebigen Punkt.

Definition II.2.1 (Ableitung, Differentiation)**.**
Der Zuwachs[4] $y \to y + \Delta y$ einer Funktion $y(x)$ bei Veränderung des Arguments $x \to x + \Delta x$ ist ein Maß für die Veränderung einer Funktion (siehe Abb. II.2.1):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Dieser **Differenzenquotient** ist also die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, y(x))$ und $(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$ (siehe Abb. II.2.1), der sog. **Sekante**. Im oben angegebenen Beispiel entspricht dies der Durchschnittsgeschwindigkeit im 'Zeitintervall' $[x, x + \Delta x]$.
Die **Ableitung** $y'(x)$ einer Funktion $y(x)$ ist dann die *momentane* Veränderung der Funktion, die durch den Grenzwert

$$y'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

gegeben ist. Man schreibt für diesen **Differentialquotienten** auch symbolisch

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

mit den **Differentialen** dx, dy.
Höhere Ableitungen sind rekursiv definiert: $y'' = (y')'$, $y^{(n+1)} = (y^{(n)})'$, etc. Man schreibt auch $y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$.

[4] Dieser 'Zuwachs' kann auch negativ sein!

Bemerkung: Streng genommen ist $\frac{dy}{dx}$ kein Quotient zweier Größen dy und dx und kann nicht auseinandergerissen werden. Trotzdem macht man dies in der Physik häufig! Dahinter steckt die Vorstellung, daß man mit den Veränderungen Δy, Δx rechnet und am Ende erst den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ vollzieht.

Beispiel II.2.1.

$$y(x) = x^n \quad \curvearrowright \quad y'(x) = nx^{n-1}$$

Dies kann man mit Hilfe der binomischen Entwicklung einsehen, denn es gilt $(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + O((\Delta x)^2)$. Setzt man dies in den Differenzenquotienten ein, so erhält man $\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = nx^{n-1} + O(\Delta x)$, woraus im Limes $\Delta x \to 0$ das Ergebnis folgt.

II.2.2 Rechenregeln

Im folgenden stellen wir die wichtigsten Rechenregeln zusammen, mit denen sich aus bekannten Ableitungen weitere Ableitungen bestimmen lassen:

1. $y(x) = u(x)v(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$ (Produktregel)

2. $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}}$ (Quotientenregel)

3. $y = f(u), u = u(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = f\left(u\left(x\right)\right)$
   $\Rightarrow \; y' = \frac{dy}{dx} \underset{\text{“}erweitern\text{''}}{=} \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'\left(u\left(x\right)\right)u'(x)$ d.h. $\boxed{y' = f'\left(u\left(x\right)\right)u'(x)}$ (Kettenregel)

4. *Ableitung der Umkehrfunktion* $x = f^{-1}(y)$ *von* $y = f(x)$*:*

   $$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}, \qquad \text{bzw. in Kurzform} \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

   Dies beweist man z. B. über die Kettenregel, da $f(f^{-1}(x)) = x$. Man beachte, dass man die Ableitung von f' an der Stelle $f^{-1}(x)$ zu nehmen hat (siehe folgendes Beispiel).

Beispiel II.2.2.
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist bekanntlich der (natürliche) Logarithmus $f^{-1}(x) = \ln x$. Da $f'(x) = e^x$ erhält man als Ableitung des Logarithmus

$$\frac{d\ln x}{dx} = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

II.2.3 Ableitungen elementarer Funktionen

Im Prinzip genügen die oben angegebenen Rechenregeln zusammen mit der Kenntnis einige weniger Ableitung, um fast alle wichtigen Funktionen differenzieren zu können. Die wichtigsten Funktionen, deren Ableitung man auswendig kennen sollte, sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante.
Im Prinzip könnte man diese Liste noch verkürzen, da man z.B. die Ableitung des Logarithmus wie in Beispiel 4.3.2 aus der der Exponentialfunktion bestimmen könnte. Auch die Ableitung des Sinus könnte aus der des Kosinus hergeleitet werden:

$$\frac{d\sin x}{dx} = \frac{d}{dx}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Dabei haben wir neben den bekannten Identitäten für trigonometrische Funktionen nur die Kettenregel benutzt.

II.2.4 Höhere Ableitungen

$f'' :=$ zweite Ableitung von $f :=$ Ableitung von f'
Man schreibt auch:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Allgemein definiert man die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f rekursiv durch:

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)' =: \frac{d^n f}{dx^n}$$

II.2.5 Kurvendiskussion

Funktionen $f : D \to Z$ lassen sich auf verschiedene Arten und Weisen charakterisieren. In einer Kurvendiskussion kann man folgende Eigenschaften untersuchen.

1. **Symmetrie**: Ist f eine gerade ($f(-x) = f(x)$) oder ungerade ($f(-x) = -f(x)$) Funktion? Man beachte, dass in der Regel Funktionen weder gerade noch ungerade sind!

2. **Stetigkeit**: Ist die Funktion stetig, wo hat sie Singularitäten und von welchem Typ sind diese?

3. **Monotonie**: Ist die Funktion (streng) monoton wachsend (bzw. fallend)? In der Regel ist diese Frage abschnittsweise zu beantworten.

4. **Nullstellen**: Wo liegen die Nullstellen der Funktion?

5. **Differenzierbarkeit**: Ist die Funktion differenzierbar und wie lautet die Ableitung?

6. **Extrema**: f nimmt im Punkt x_0 ein (lokales) Maximum (bzw. Minimum) an, falls es ein Intervall $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ um x_0 gibt ($\delta > 0$), in dem $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) ist. Das größte lokale Maximum (bzw. kleinste lokale Minimum) heißt absolutes Maximum (bzw. absolutes Minimum). Hier müssen evtl. Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereichs separat betrachtet werden!.

II.3 Integralrechnung

Eine häufig auftauchende Frage lautet: Wie bestimmt man $x(t)$ wenn $v(t) = \frac{dx}{dt}$ bekannt ist ?
In physikalischen Problemen ist dabei z.B. $v(t)$ der zeitliche Geschwindigkeitsverlauf einer Bewegung und $x(t)$ die bis zur Zeit t zurückgelegte Strecke.
Die zur Beantwortung dieser Frage nötige Umkehrung der Differentiation bezeichnet man als **Integration**.

II.3.1 Stammfunktion

Definition II.3.1 (Stammfunktion)**.**
$F(x)$ heißt **Stammfunktion** der Funktion $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$. Man schreibt auch

$$\boxed{F(x) = \int f(x)dx}$$

und bezeichnet dies als das **unbestimmte Integral** von f. In der Physik schreibt man auch häufig $\int dx f(x)$, was später bei mehrdimensionalen Integralen eine nützliche Konvention ist.

F ist nicht eindeutig, denn mit $F(x)$ ist auch $F(x) + a$ mit einer beliebigen reellen Konstanten a eine Stammfunktion. Genauer bezeichnet daher $\int f(x)dx$ die Menge aller Stammfunktionen von f. a heißt auch **Integrationskonstante**.

Ähnlich wie die Ableitung können wir uns eine Tabelle mit den wichtigsten Stammfunktionen zusammenstellen:

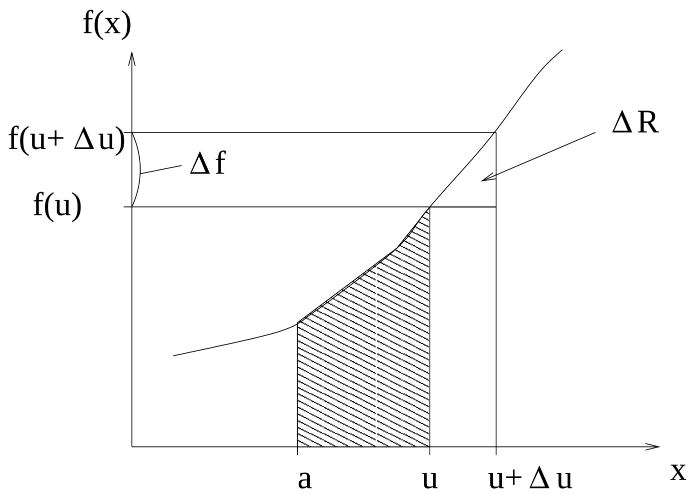

Abbildung II.3.1: Das Integral

$f(x)$	$F(x)$
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

Dabei ist zu beachten, dass bei jeder Stammfunktion additiv noch Integrationskonstante a auftritt. Im ersten Beispiel x^r ist $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ist $r \notin \mathbb{N}$, so muß $x > 0$ sein.

II.3.2 Bestimmtes Integral

Eine andere Motivation der Integration ist die Flächenberechnung. Man spricht auch von *bestimmten Integralen*. Für die Fläche die vom Graphen $f(x)$ der Funktion f mit der $x-$Achse zwischen $x = a$ und $x = u$ eingeschlossene Fläche (schraffierter Bereich in Abb. II.3.1) schreibt man auch:

$$F(u) = \int_a^u f(x)dx.$$

Man fragt sich nun: Wie sieht $F(u)$ aus, wenn $f(x)$ bekannt ist?
Auf den ersten Blick ist natürlich nicht offensichtlich, dass dieses Problem etwas mit dem im vorigen Abschnitt eingeführten Integral zu tun hat. Die Notation deutet aber einen solchen Zusammenhang schon an, den wir uns im folgenden klar machen wollen.
Zu Bestimmung der Funktion $F(u)$ vergrößern wir den Integrationsbereich um ein Stück Δu (siehe Abb. II.3.1):

$$\begin{aligned} F(u + \Delta u) &= F(u) + f(u)\Delta u + \Delta R, \\ \Delta R &\approx \Delta u \Delta f. \end{aligned}$$

Die Fläche ΔR haben wir nur sehr grob durch $\Delta u \Delta f$ approximiert. I.a. wird hier noch ein Koeffizient α auftreten, d.h. $\Delta R = \alpha \Delta u \Delta f$. In dem Beispiel in Abb. II.3.1 wäre eine Approximation des Bereichs ΔR durch ein Dreieck (d.h. $\alpha = 1/2$) sicher genauer. Wir werden aber gleich sehen, dass es darauf gar nicht ankommt. Wichtig ist nur, dass ΔR gegen Null geht, wenn Δu oder Δf gegen Null gehen.
Nun ergibt sich durch einfache Umformung:

$$\frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = \frac{f(u)\Delta u + \Delta R}{\Delta u} \approx f(u) + \Delta f$$

und somit für $\Delta u \to 0$:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = f(u)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\lim_{\Delta u \to 0} \Delta f = 0$.

Insgesamt haben wir also:

$$f(u) = \frac{dF(u)}{du} = F'(u),$$

d.h. F ist eine Stammfunktion von f bzw. $F = \int f(x)dx$.

Die Bedingung $F(u = a) = 0$ legt die Integrationskonstante fest. So kommt man zum **bestimmten Integral:**

$$\boxed{\int_a^u f(x)dx = F(u) - F(a) =: F(x)\Big|_a^u}$$

Das bestimmte Integral von f zwischen a und u ist also eine Zahl!

Den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Stammfunktion bezeichnet man auch als den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**.

Bei der Berechung kann eine *beliebige* Stammfunktion gewählt werden, da die additive Konstante bei der Bildung der Differenz $F(u) - F(a)$ herausfällt.

Beispiel II.3.1.
Als einfaches Beispiel betrachten wir die Funktion x^n. Das unbestimmte Integral ist gegeben durch

$$F(x) = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Das bestimmte Integral zwischen a und u ist

$$\int_a^u x^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Speziell für $a = 1$ und $u = 2$ ergibt sich

$$\int_1^2 x^n dx = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

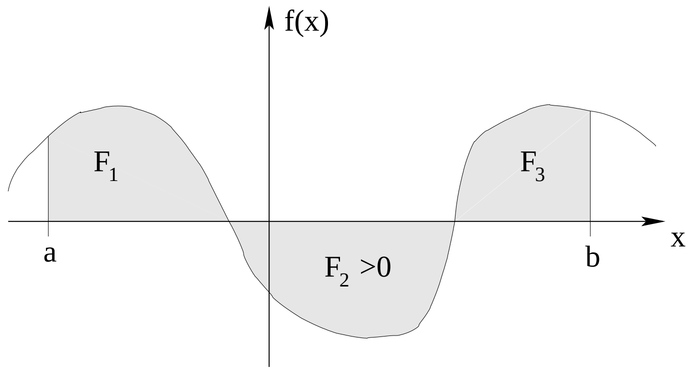

Abbildung II.3.2: Zur Interpretation des bestimmten Integrals als Fläche.

Bei der Interpretation des bestimmten Integrals als eingeschlossene Fläche muss man vorsichtig sein, wenn die Funktion negativ werden kann. In dem Beispiel in Abb. II.3.2 wäre die eingeschlossene Fläche durch $F_1 + F_2 + F_3$ gegeben, wobei $F_j > 0$. Das Integral liefert aber

$$\int_a^b f(x)dx = F_1 - F_2 + F_3.$$

Im folgenden stellen wir einige einfache Rechenregeln zusammen. Zunächst einmal ist die Integration *linear*, d.h. für beliebige (integrierbare) Funktionen f und g und reelle Zahlen r gilt

$$\int_a^b (f(x) + rg(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + r\int_a^b g(x)dx.$$

Außerdem ist die Integration additiv, d.h.

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad (\text{mit } a < c < b).$$

Außerdem gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\left(F(a) - F(b)\right) = -\int_b^a f(x)dx,$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist. Mit der letzten Regel überlegt man sich leicht, was bei der Additivität in dem Fall passiert, in dem c nicht zwischen a und b liegt!

II.3.3 Integrationsmethoden

In der Praxis muß man eine gewisse Menge elementarer (unbestimmter) Integrale auswendig können. Aus diesen kann man sich durch Anwendung geeigneter Regeln viele andere Integrale herleiten. Sehr nützlich sind auch Integrationstabelle, z.B. das Buch von Gradstein/Ryshik. Heutzutage gibt es auch Computeralgebraprogramme wie *Mathematica* oder *Maple*, die sogar unbestimmte Integrale bestimmen können.
Im folgenden wollen wir einige nützliche Integrationsverfahren vorstellen.

Partielle Integration

Die partielle Integration ist gewissermaßen die Umkehrung der Produktregel der Differentiation. Sei $f(x) = g'(x)h(x)$, d.h. f ist Produkt der Ableitung einer Funktion g, die wir kennen, und einer Funktion h. Da nach Produktregel $\frac{d}{dx}(gh) = g'h + gh'$, folgt:

$$\int f(x)dx = \int \left[\frac{d}{dx}(gh) - gh'\right] dx = gh - \int gh'dx$$

bzw. als bestimmtes Integral

$$\boxed{\int_a^b g'(x)h(x)dx = g(x)h(x)\big|_a^b - \int_a^b g(x)h'(x)dx.}$$

Der Nutzen dieser Regel liegt darin, dass manchmal das Integral $\int gh'dx$ einfacher auszurechnen ist als $\int g'hdx$.
Wir wollen dies an einigen Beispielen illustrieren.

Beispiel II.3.2.

1. Wir wollen $\int_a^b xe^x dx$ bestimmen. Dazu identifizieren wir e^x mit g, also $g'(x) = e^x$, und $h(x) = x$, d.h. $h'(x) = 1$. Damit ergibt sich aus der Regel der partiellen Integration:

   $$\int_a^b xe^x dx = xe^x\big|_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^x dx = (xe^x - e^x)\big|_a^b.$$

   Natürlich hätte man auch die Identifikation $g'(x) = x$ und $h(x) = e^x$ wählen können. Dann hätte aber die partielle Integration zu keiner Vereinfachung geführt, da immer höhere Potenzen von x auftreten würden.

2. Als zweites Beispiel betrachten wir $\int_a^b \ln x dx$. Hier hilft die Identifikation $g'(x) = 1$ und $h(x) = \ln x$:

   $$\int_a^b \ln x dx = x \ln x\big|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x\big|_a^b - \int_a^b dx = (x \ln x - x)\big|_a^b.$$

   Die Stammfunktion von $\ln x$ ist also $x \ln x - x$.

Substitutionsregel

Die Substitutionsregel ist die Umkehrung der Kettenregel der Substitution.
Wir betrachten eine Funktion f mit Stammfunktion F (die wir nicht explizit kennen müssen) und eine invertierbare Funktion $g(x)$. Nach der Kettenregel gilt dann:

$$F'(g(x))g'(x) = (F(g(x))'\ .$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^b (F(g(x))'\,dx &= F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(x)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx\,,\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile wieder den Hauptsatz angewendet haben, diesmal für die Funktion F bzw. $F' = f$. Die linke Seite der obigen Gleichung können wir mit der Kettenregel umschreiben:

$$\int_a^b (F(g(x))'\,dx = \int_a^b F'(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx\,.$$

Somit erhalten wir die Substitionsregel

$$\boxed{\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx}$$

oder auch (mit $\tilde{a} := g(a)$, $\tilde{b} := g(b)$)

$$\boxed{\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(x)dx = \int_{g^{-1}(\tilde{a})}^{g^{-1}(\tilde{b})} f(g(x))g'(x)dx\,.}$$

Die Form für unbestimmte Integrale

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$$

kann man sich leicht merken, wenn man $u'(x)$ als Differentialquotient $\frac{du}{dx}$ ausdrückt und dann quasi dx “wegkürzt”. Man beachte, dass in dem rechten Integral u nicht mehr für eine Funktion steht, sondern die Integrationsvariable bezeichnet. Wir werden dies gleich in den Beispielen noch explizit sehen.
Die Substitutionsregel kann man in beide Richtungen (von links nach rechts oder von rechts nach links) anwenden. Manchmal ist es nützlich, durch Substitution mit einer geeigneten Funktion $u(x)$ zum scheinbar schwierigeren Integral auf der linken Seite überzugehen.

Beispiel II.3.3.

1. $$\int e^{\sin x}\cos x dx \underset{\substack{u=\sin x \\ du=\cos x dx}}{=} \int e^u du = e^u = e^{\sin x}$$

   Offensichtlich bietet sich hier die Identifikation $u = \sin x$ an. Wegen $\frac{du}{dx} = \cos x$, ist $du = \cos x dx$.

2. $$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx \underset{du=u'dx}{=} \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|u(x)|.$$
   Ähnlich wie im ersten Beispiel haben wir hier “dx” quasi weggekürzt.

3. Ein Beispiel mit bestimmtem Integral:
   $$\int_1^7 \frac{1}{\sqrt{2x+2}} dx = \int_{g(1)}^{g(7)} \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \int_4^{16} y^{-1/2} = \frac{1}{2} 2y^{1/2}\Big|_4^{16} = 2.$$
   Hier haben wir mit $y = g(x) = 2x + 2$ substituiert. Damit ist die Umkehrfunktion $g^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y-2)$ und $\left(g^{-1}(y)\right)'(y) = \frac{1}{2}$.

II.4 Komplexe Zahlen

Beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren von reellen Zahlen bleiben wir im Bereich der reellen Zahlen. Beim Wurzelziehen stoßen wir auf einen neuen Zahlentyp.

II.4.1 Grundlagen

Problem: $x^2 = -1$ hat keine reelle Lösung x

Man definiert daher[5] (Euler 1777): $i := \sqrt{-1}$.
i wird als **imaginäre Einheit** bezeichnet.

Eine allgemeine **imaginäre Zahl** ist dann von der Form $b \cdot i$ mit reellem b, also z.B. $2i$, πi, etc.

Wir übertragen nun die üblichen Rechenregeln der reellen Zahlen auf die imaginären Zahlen (unter Beachtung von $i^2 = -1$):

$$b_1 i + b_2 i = (b_1 + b_2)i$$
$$(b_1 i)(b_2 i) = b_1 b_2 i^2 = -b_1 b_2$$
$$i^3 = i^2 i = -i \qquad \text{etc.}$$

Definition II.4.1 (komplexe Zahlen)**.**
Allgemeine **komplexe Zahlen** sind von der Form

$$z = x + iy$$

mit reellen Zahlen x und y. x bezeichnet man auch als den **Realteil** von z und y als den **Imaginäerteil**. Man schreibt dann auch:

$$z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z).$$

[5] Man beachte, dass hier streng genommen die “positive” Wurzel gemeint ist.

Wie für die rein imaginären Zahlen übertragen wir auch für die komplexen Zahlen die bekannten Rechenregeln. Man erhält so den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

$$\begin{aligned}\text{Addition: } z_3 &= z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ & \quad \mathrm{Re}(z_3) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z_3) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Multiplikation: } z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2) + i(x_1 y_2) + i(y_1 x_2) + i^2(y_1 y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\end{aligned}$$

Speziell für reelles λ gilt:

$$\lambda z = \lambda(x + iy) = (\lambda x) + i(\lambda y)$$

Definition II.4.2 (Komplexe Konjugation)**.**
$z^* := x - iy$ heißt **komplex-konjugiert** zu $z = x + iy$, d.h. die Operation * bedeutet Vorzeichenwechsel beim Imaginärteil. Manchmal schreibt man auch $\bar{z}$ statt z^*.
Offensichtlich gilt: $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

Für das Produkt einer komplexen Zahl z mit ihrem komplex-konjugierten gilt

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Es ist also immer reell und größer gleich Null.

Nützlich ist das Komplex-Konjugierte auch bei der Division durch komplexe Zahlen:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Hiermit ist die Division in $\mathbb{C}$ auf eine Multiplikation zurückgeführt.

Definition II.4.3 (Betrag)**.**
Man definiert den **Betrag** $|z|$ einer komplexen Zahl z durch $\boxed{|z| = \sqrt{zz^*}}$.
Für ihn gelten analoge Rechenregeln wie für den Betrag von reellen Zahlen, z.B. die Dreiecksungleichung.

II.4.2 Darstellung in komplexer Ebene

Es bietet sich an, Real- und Imaginärteil als Komponenten eines zweidimensionalen Vektors zu interpretieren. Man kommt so zu der zweidimensionalen Darstellung in der sog. **komplexen Ebene** (siehe Abb. II.4.1):

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

wobei nun $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein zweidimensionaler Vektor ist. Nun kann man wieder zu ebenen Polarkoor-

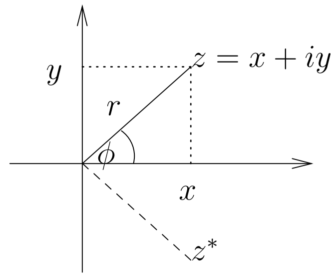

Abbildung II.4.1: Die komplexe Ebene. Die Darstellung wird auch als **Argand-Diagramm** bezeichnet.

dinaten $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ übergehen und erhält

$$z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Eine einfache geometrische Überlegung liefert $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, d.h. $r = |z|$. Man bezeichnet den Betrag von z in diesem Zusammenhang auch manchmal als **Modul** oder **Modulus** von z und schreibt $r = \text{mod}(z)$.
Den Winkel ϕ in der Polarkoordinatendarstellung bezeichnet man auch als **Argument** von z: $\phi = \arg(z)$.
Insgesamt hat man daher folgende Darstellung einer komplexen Zahl:

$$\boxed{z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi).}$$

Es gilt nun die **Eulersche Formel**:

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi}$$

d.h. die komplexe Zahl $e^{i\phi}$ mit $\phi \in \mathbb{R}$ liegt auf dem Einheitskreis (da $|e^{i\phi}|^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$) mit Winkel ϕ.
Wir können daher für reelle ϕ den Real- und Imaginärteil der Exponentialfunktion bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{Re}(e^{i\phi}) &= \cos\phi, \\ \text{Im}(e^{i\phi}) &= \sin\phi. \end{aligned}$$

Die Eulersche Formel kann man als Erweiterung der Exponentialfunktion auf imaginäre Argumente auffassen. Es sollen die gleichen Rechenregeln wie im Reellen gelten. Wir werden die Euler-Formel morgen mit Hilfe von Potenzreihen beweisen.

Mit der Eulerschen Formel können wir nun eine beliebige komplexe Zahl darstellen als

$$\boxed{z = |z|e^{i\phi}.}$$

Hiermit macht man sich die folgenden Rechenregeln für den Betrag und das Argument klar:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\phi_1} \cdot |z_2|e^{i\phi_2} = |z_1 z_2|e^{i(\phi_1+\phi_2)}.$$

Speziell für das Komplex-Konjugierte folgt:

$$z^* = |z|(\cos\phi - i\sin\phi) = |z|(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)) = |z|e^{-i\phi}$$

Allgemein gilt folgende Aussage: Ist $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ reellwertig, so gilt: $f(z^*) = (f(z))^*$.

Unter Benutzung der Rechenregeln für die Exponentialfunktion, die analog für komplexe Argumente gelten, können wir die Eulersche Formel auf beliebige $z = x + iy$ verallgemeinern:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right).$$

II.4.3 Komplexe Funktionen

Mit komplexen Zahlen kann man komplexe Funktionen bilden: $f(z) \in \mathbb{C}$, z.B. $f(z) = 2z^2 + z$. Man kann nun auch die Winkelfunktionen durch die komplexe Exponentialfunktion darstellen. Da $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ und $e^{-i\phi} = \cos(-\phi) + i\sin(-\phi) = \cos\phi - i\sin\phi$, folgt

$$\boxed{\cos\phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \qquad \text{und} \qquad \sin\phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}).}$$

Diese Identitäten sind enorm nützlich. Zum Beispiel lassen sich mit ihnen die bekannten Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen einfach beweisen. Letztlich führt man sie auf die Eigenschaften der Expontialfunktion zurück. Dies werden wir in den Übungen genauer untersuchen.

II.4.4 Wurzeln

Lösungen von $z = w^n$ bzw. $z^{1/n} = w$ heißen **n-te Wurzeln** von z.

Die Zahl der Lösungen hängt offensichtlich von n ab:

$$\begin{aligned}
w^2 = 1 &\qquad \Longrightarrow \qquad w = 1,\ w = -1, \\
w^4 = 1 &\qquad \Longrightarrow \qquad w^2 = 1,\ w^2 = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad w = 1,\ w = -1,\ w = i,\ w = -i.
\end{aligned}$$

Allgemein können wir die allgemeine Lösung für dieses Problem elegant mit Hilfe der Polardarstellung bestimmen.

$$z^{1/n} \;=\; \left(|z|e^{i\phi}\right)^{1/n} = |z|^{1/n}e^{i\phi/n} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi}{n} + i\sin\frac{\phi}{n}\right).$$

Die Nichteindeutigkeit des Winkels ϕ,

$$e^{i\phi} = e^{i(\phi+2\pi k)} \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

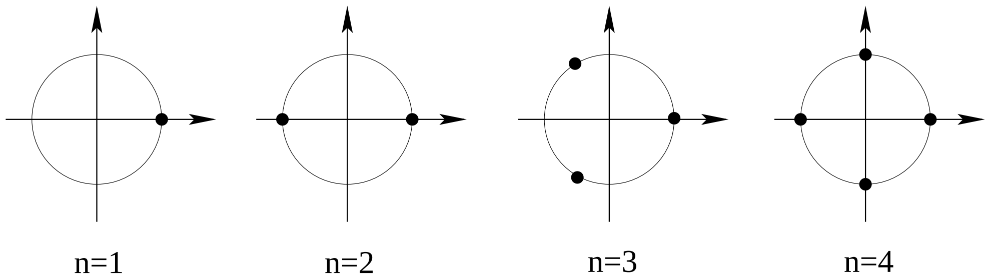

Abbildung II.4.2: Lage der Einheitswurzeln für $n = 1, 2, 3, 4$.

der nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist, führt auf verschiedene Wurzeln, die für verschiedene Werte von k auftreten können (solange $\phi + 2\pi k \in [0, 2\pi[$).
Somit finden wir, dass $z = w_k^n$ mit

$$w_k := \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right) \qquad \text{mit } k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

d.h. es gibt n verschiedene n-te Wurzeln. Es ist wichtig, dies immer im Hinterkopf zu behalten. Später werden Sie sehen, dass in physikalischen Problemen nicht immer die reelle Lösung die interessanteste ist!

Insbesondere gibt es auch n sogenannte **n-te Einheitswurzeln**

$$e^{i2\pi k/n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Sie liegen auf dem Einheitskreis (siehe Abb. II.4.2).

II.5 Potenzreihen und Taylor-Entwicklung

II.5.1 Potenzreihen

Viele Funktionen, die in der Physik auftreten, sind nicht in geschlossener Form angebbar, d.h. lassen sich nicht auf einfache Weise durch elementare Funktionen ausdrücken. Stattdessen gibt man sie in der Form von Reihen an.

II.5.2 Potenzreihen

Definition II.5.1 (Potenzreihen)**.**
Eine **Potenzreihe** mit Koeffenzienten a_n hat die Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Man beachte, dass alle auftretenden Potenzen n ganzzahlig und nicht-negativ sind. Wir betrachten x als Variable und haben somit eine Funktion von x definiert.
Formal sind Potenzreihen Grenzwert der Folge $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen.
Die Reihe konvergiert evtl. nur in einem endlichen Bereich $|x| < R$. Dann heißt R auch **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

Beispiel II.5.1. Aus der Schule dürfte ihnen die **geometrische Reihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für} |x| < 1$$

bekannt sein. Diese kann man als Potenzreihe interpretieren, wenn man x als variabel betrachtet. Die Koeffizienten dieser Reihe sind $a_n = 1$ für alle n. Bekanntermaßen hat die Reihe den Konvergenzradius 1.

Wir sehen an den Beispiel, dass man manchmal Reihen durch einfache Funktionen ausdrücken kann. Genauer gesagt, stimmt die geometrische Reihe im Intervall $]-1,1[$ mit der Funktion $\frac{1}{1-x}$ überein.

II.5.3 Taylor-Entwicklung

Es stellt sich daher die Frage, ob man eine beliebige Funktion $f(x)$ in Form einer Potenzreihe darstellen kann. Wir nehmen dazu an, dass dies möglich ist und versuchen die Koeffizienten a_n zu bestimmen. Sei also $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Da man Potenzreihe gliedweise differenziert[6], folgt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \\
f''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots \\
f'''(x) &= 6a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \cdots
\end{aligned}$$

Hieraus liest man ab:

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad f'''(0) = 6a_3, \cdots, f^{(n)}(0) = n! a_n, \cdots$$

[6] Über die Frage, wann das erlaubt ist, wollen wir uns hier keine Gedanken machen! Zumindest muss die gliedweise differenzierte Reihe auch wieder konvergieren!

und somit
$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$
Somit erhalten wir die **Taylor-Reihe** (oder **Taylor-Entwicklung**) von f um $x = 0$
$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n.}$$
Eine große Klasse von Funktionen kann durch Taylor-Reihen dargestellt werden. Diese Funktionen heißen **analytisch** (in $x = 0$).
Dies gilt aber nicht für alle Funktionen. Ein Gegenbeispiel ist
$$f(x) = e^{-1/x^2}.$$
Für diese Abbildung gilt
$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \text{für alle } n.$$
Somit ist die Taylor-Reihe identisch Null!
Ein anderes Beispiel ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, die in $x = 0$ gar nicht definiert ist, genauso wie alle ihre Ableitungen.

Eine wichtige Anwendung der Taylor-Entwicklung ist die Bestimmung einer einfachen Näherung einer Funktion in der Nähe von $x = 0$, z.B.
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$
Dabei bezeichnet $\mathcal{O}(x^3)$ Terme, die für $x \to 0$ mindestens so schnell wie x^3 verschwinden.

II.5.4 Wichtige Beispiele und Anwendungen

Im folgenden wollen wir einmal die wichtigsten Potenzreihendarstellung auflisten:
$$\begin{aligned}
\exp(x) &= e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad (x \in \mathbb{R}) \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad (x \in \mathbb{R}) \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R})\,.
\end{aligned}$$
Die Darstellung einer Funktion als Taylor-Reihe dient als Ausgangspunkt ihrer Erweiterung ins Komplexe ist. Für beliebige $z \in \mathbb{C}$ ist die Funktion dann dadurch definiert, dass man in der Taylor-Reihe x durch z ersetzt. Dies ist sinnvoll, da die Funktion so für reelle Argumente mit ihrer ursprünglichen Definition übereinstimmt und die Berechnung der Reihe im Prinzip nur die Grundrechenarten erfordert.
Hiermit lässt sich dann z.B. die Euler-Formel leicht beweisen. Man setzt einfach in der Taylor-Reihe für die Exponentialfunktion $x = i\varphi$ ein, sortiert die Reihe nach geraden und ungeraden Potenzen von φ und sieht dann schnell, dass dies auf $\cos\varphi + i \sin\varphi$ führt.

II.5.5 Taylor-Entwicklung um $x_0 \neq 0$

Oft ist es nützlich, die Taylor-Entwicklung von f nicht um Null, sondern einen anderen Punkt x_0 zu betrachten. Diese können wir nun leicht bestimmen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$g(\Delta x) := f(x_0 + \Delta x) = f(x),$$

d.h. g ist um x_0 gegenüber f verschoben: $g(x - x_0) = f(x)$. Wir entwickeln nun g um Null:

$$g(\Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(0)(\Delta x)^n.$$

Nach Kettenregel gilt aber für alle n

$$g^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0)$$

und somit

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.}$$

Dies ist die Taylor-Entwicklung von f um x_0. Voraussetzung ist natürlich, dass f in x_0 analytisch ist.

II.6 Differentialgleichungen

Bei der Integration haben wir es mit dem Problem zu tun, eine Funktion $y(x)$ aus ihrer bekannten Ableitung $y'(x) = f(x)$ zu bestimmen. Als Verallgemeinerung der Integration werden uns im folgenden immer wieder sogenannte **Differentialgleichungen (DGL)** begegnen.

In erster Linie werden wir es mit zwei Typen zu tun haben, den sog.
DGL 1. Ordnung: $f'(x) = H(x, f(x))$,
DGL 2. Ordnung: $f''(x) = H(x, f(x), f'(x))$.

Die fundamentale Gleichung der Mechanik, die *Newtonsche Bewegungsgleichung*

$$m\ddot{x}(t) = F(x, t)$$

ist ein Beispiel für eine DGL 2. Ordnung. Dabei ist $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ die Beschleunigung und $F(x, t)$ die zur Zeit t auf die am Ort x befindliche Masse m wirkende Kraft.

Die wichtigsten DGL sind:

1. Die Wachstumsgleichung

$$\boxed{f'(x) = af(x)}$$

mit der Lösung

$$f(x) = Ae^x ,$$

wobei $A \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

2. Die **Schwingungsgleichung**

$$\boxed{f''(x) + \omega^2 f(x) = 0}$$

mit der Lösung

$$f(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$$

mit beliebigen (Integrations-)Konstanten A, B.