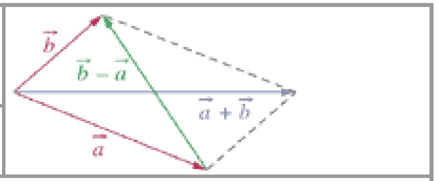
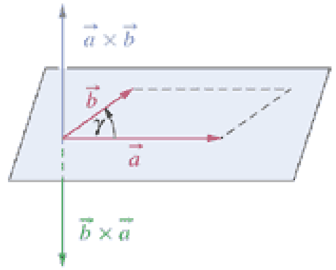
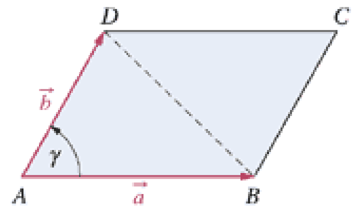
Operationen mit Vektoren

Operationen mit Vektoren

Addition	$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}=\begin{pmatrix}a_x+b_x\\ a_y+b_y\\ a_z+b_z\end{pmatrix}$	
Subtraktion	$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$	
Vielfachbildung (Multiplikation mit einem Skalar)	$r\vec{a}=ra_x\vec{i}+ra_y\vec{j}+ra_z\vec{k}=\begin{pmatrix}ra_x\\ ra_y\\ ra_z\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix}\quad (r\in\mathbb{R})$	
Skalarprodukt (Punktprodukt; inneres Produkt)	Unter dem **Skalarprodukt** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man eine reelle Zahl *c*, für die gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ bzw. $c=ab\cos\gamma$ mit $\gamma=\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ Für die Einheitsvektoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ gilt: $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$ Eigenschaften des Skalarprodukts: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (Kommutativgesetz) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (Distributivgesetz) $r(\vec{a}\cdot\vec{b})=(r\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(r\vec{b})$ (Multiplikation mit einer reellen Zahl *r*) $\vec{a}\perp\vec{b}\ \Rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ Berechnung des Skalarprodukts mithilfe der Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ $\cos\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$	
Winkel zwischen Vektoren	$\cos\sphericalangle(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$	
Vektorprodukt (Kreuzprodukt; äußeres Produkt)	Unter dem **Vektorprodukt** $\vec{a}$ x $\vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man einen Vektor $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften: (1) $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ bzw. $c=a\,b\sin\gamma$ mit $\gamma=\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$	

	(2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$ (3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig).  Das Vektorprodukt ist dem Betrage nach gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Für die Einheitsvektoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ gilt: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}$ $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k};\quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j};\quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ Eigenschaften des Vektorprodukts: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (Alternativgesetz) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgestz) $r(\vec{a} \times \vec{b}) = (r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b})$ (Multiplikation mit einer reellen Zahl *r*) $\vec{a}$, $\vec{b}$ kollinear $\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$ Berechnung des Vektorprodukts mithilfe der Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (Komponenten- bzw. Koordinatendarstellung von $\vec{a}$ x $\vec{b}$): $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{k} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$
Flächeninhalte	Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms *ABCD*: $A = \lvert \vec{a} \times \vec{b} \rvert = ab\sin\gamma$  Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks *ABD*: $A = \frac{1}{2}\lvert \vec{a} \times \vec{b} \rvert = \frac{1}{2} ab\sin\gamma$

Diese und weitere Formeln finden Sie auf www.formel-sammlung.de
Mit freundlicher Unterstützung vom **DUDEN PAETEC Schulbuchverlag**