Notiztitel 05.09.2012

# Vorkurs „Physik" Lineare Algebra

1) Einführung: Vektoren
2) Rechnen mit Vektoren
3) Basisvektoren
4) Trigonometrische Funktionen
5) Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$
6) Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

7) Anwendungen von $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$

8) Drehmatrizen

9) Matrizen und Determinanten

10) Lineare Gleichungssysteme

11) Nicht-kartesische Koordinatensysteme

# 1) Einführung

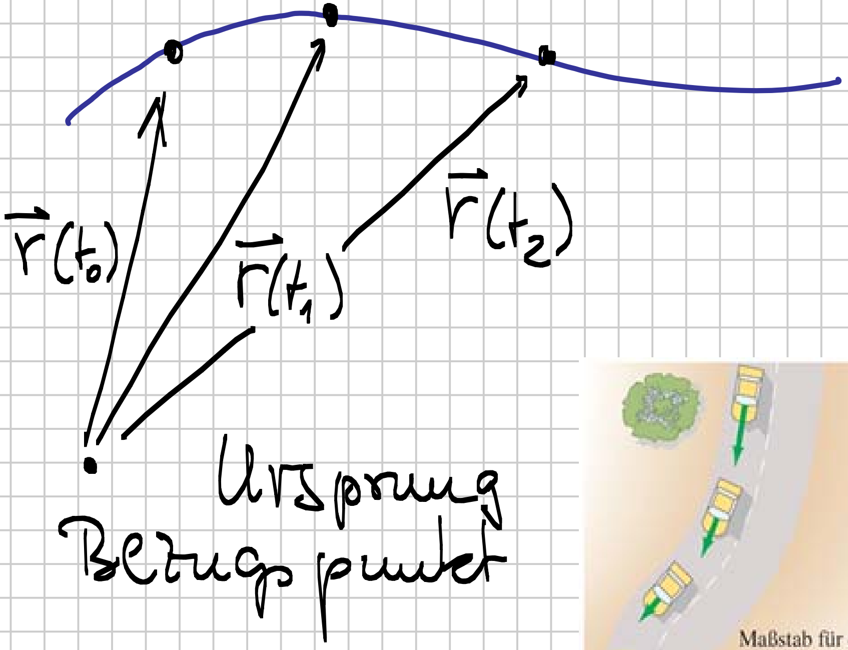
**Vektoren** stellen gerichtete Größen dar, d.h. sie haben **Betrag & Richtung**, anschaulich Pfeile

Beispiele: Geschwindigkeit $\vec{v}$, Kräfte $\vec{F}$,

Drehbewegung: Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

**Skalare** haben keine Richtung, z.B. Temperatur $T$, Masse $m$, Zeit $t$, ...

# Bewegungen in 2 oder 3 Raumrichtungen

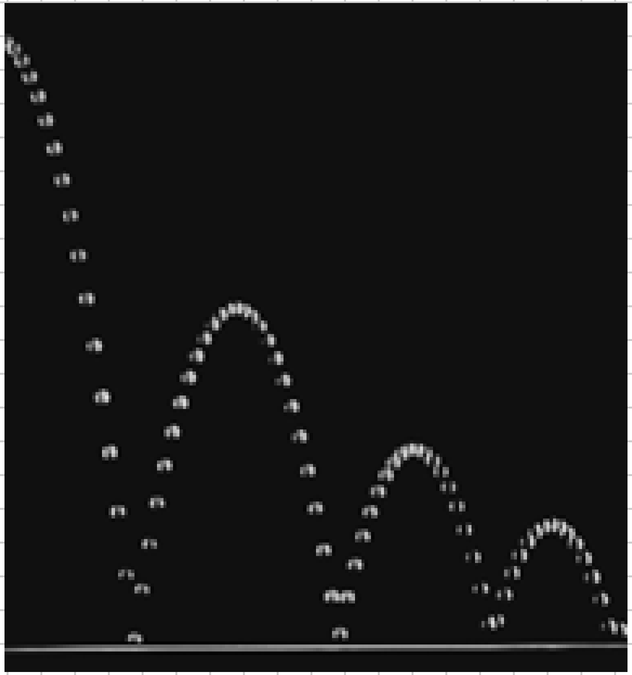


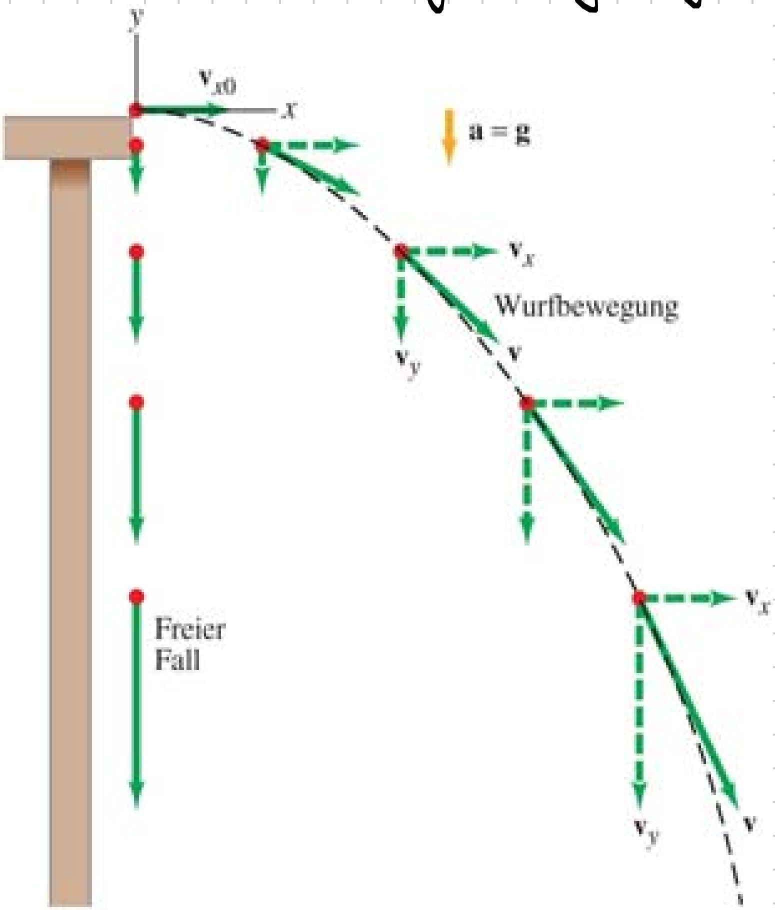
Geschwindigkeit

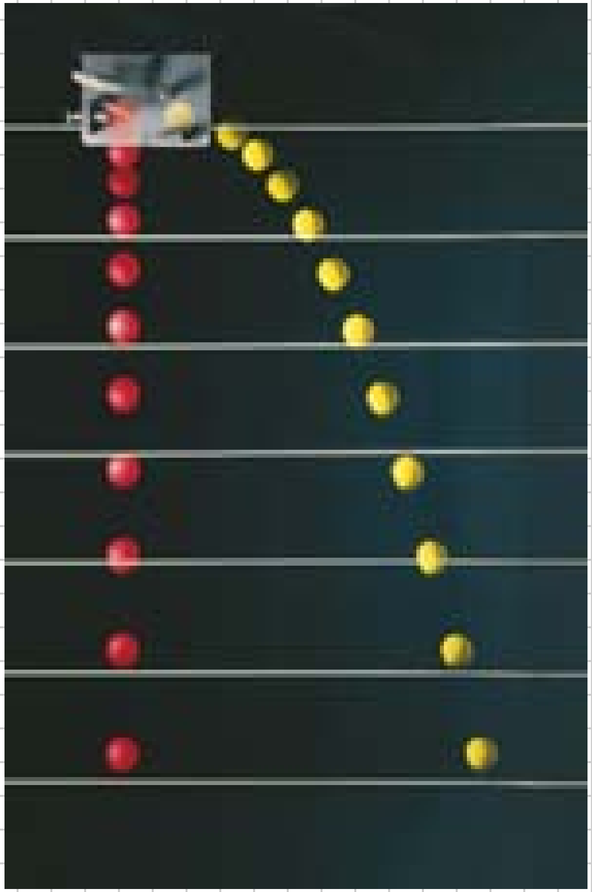
$\vec{v}$

Beispiel: beschleunigte Bewegung $\vec{F} = m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$

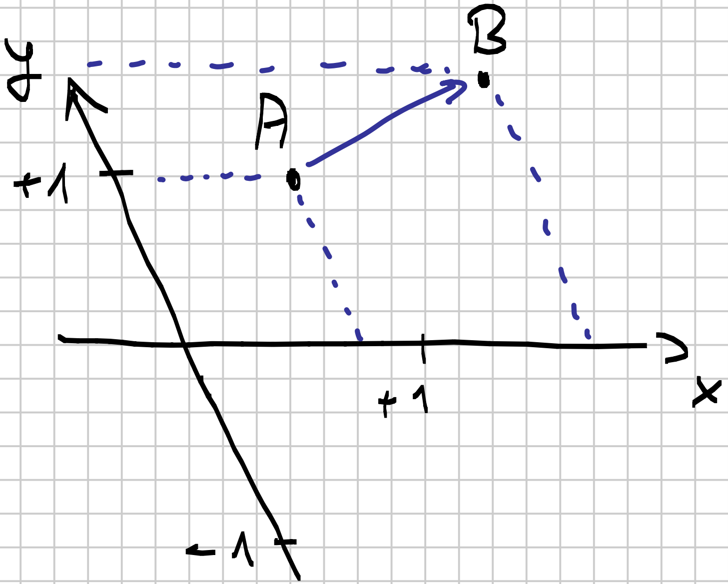
$F = mg$ in vertikaler Richtung $a_y = g$ ; $a_x = 0$





# 1.1 Koordinatensysteme

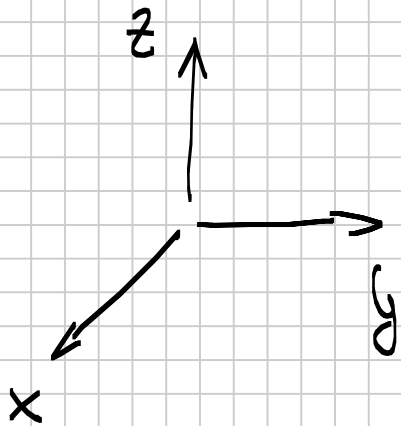



1) wähle willkürlich Ursprung

2) wähle Achsen, die nicht parallel sind

3) versehe Achsen mit Maßstab

Orthonormalsystem im 3 dim. Raum

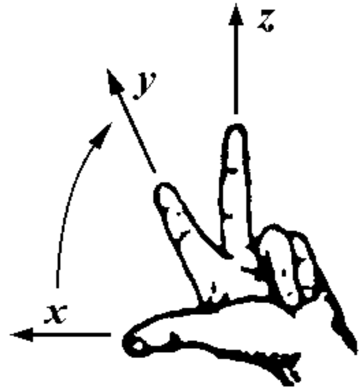



Achsen paarweise $\perp$

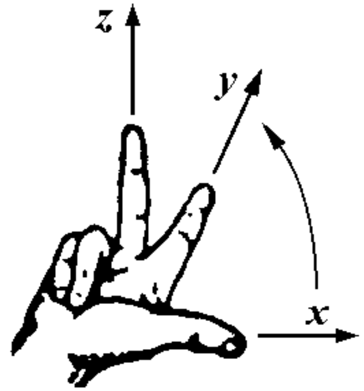
gleiche Maßstäbe

rechtshändig

## 1.2. links- bzw. rechtshändige Koordinatensysteme



Linkshändiges Koordinatensystem
Mathematisch negativer Drehsinn
= Geodätisch positiver Drehsinn

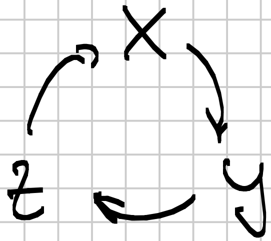


Rechtshändiges Koordinatensystem
Mathematisch positiver Drehsinn
= Geodätisch negativer Drehsinn

„Drehe x- auf y-Achse": z-Achse dreht sich in positiver Richtung

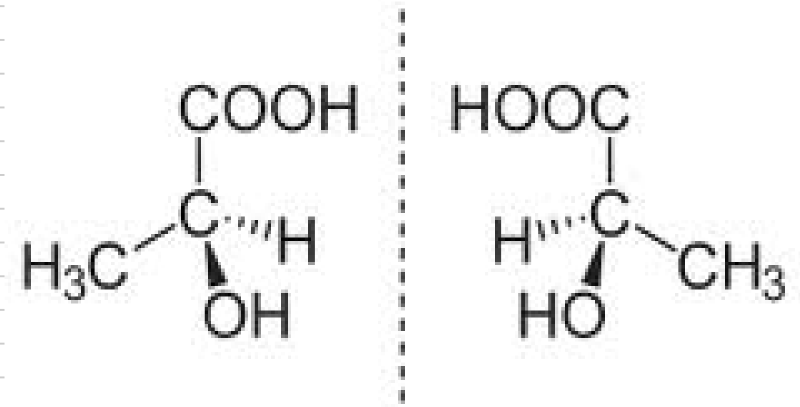
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| „Drehe x- | auf y-Achse": | z-Achse dreht sich | in | positiver | Richtung |
| y | z | x | " | positiver | " |
| z | x | y | " | Positiver | " |

Zyklischer Tausch:



Bsp: „Drehsinn":

Rechts- / Linksgewinde

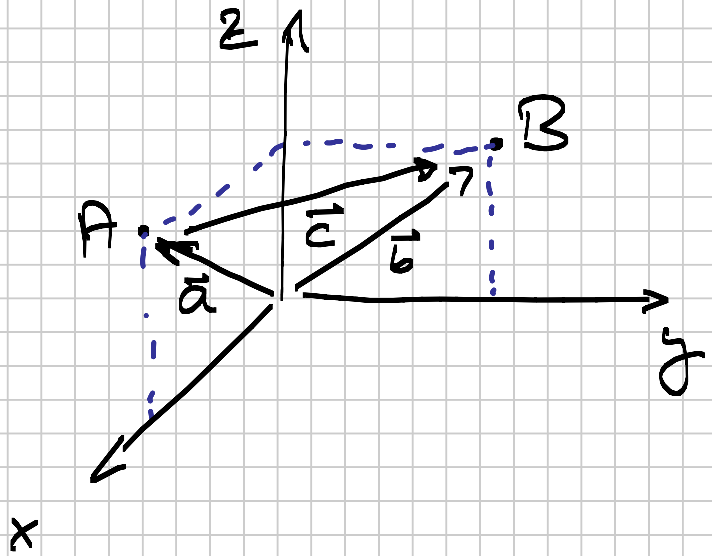


Enantiomere

rechts / linksdrehende

Milchsäure

# 1.3 Kartesisches Koordinatensystem




Koordinaten von A: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a}$

von B: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{b}$

Vektor von A nach B: $\overrightarrow{AB} := \vec{c}$

Verschiebungsvektor: $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektor definiert durch Länge & Richtung

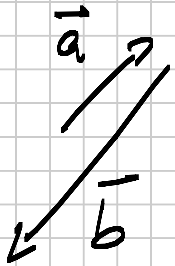
alle parallelen, gleichlangen „Pfeile" äquivalent

Vektor repräsentiert alle gleichlangen, parallelen Pfeile

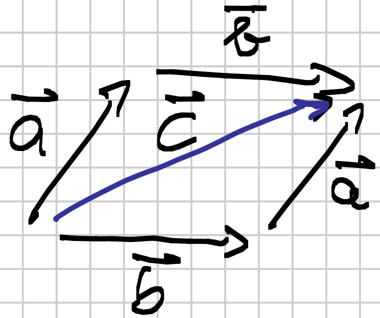
# 2) Rechnen mit Vektoren

## 2.1 Rechenregeln

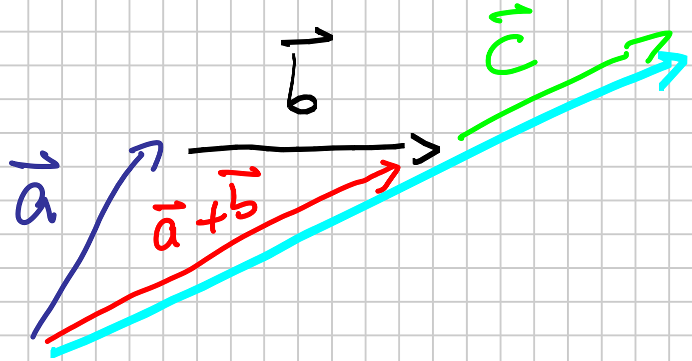
- Skalare Multiplikation $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$

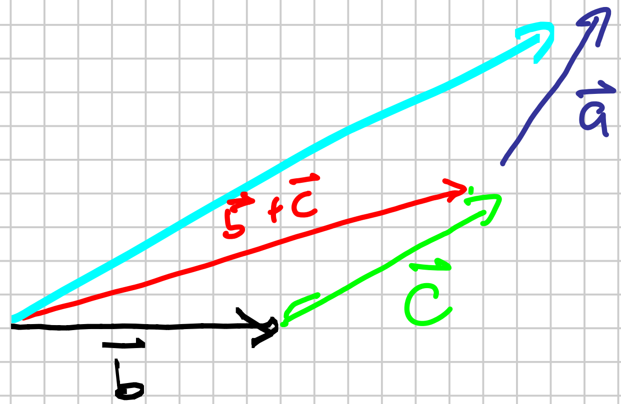



- Addition $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

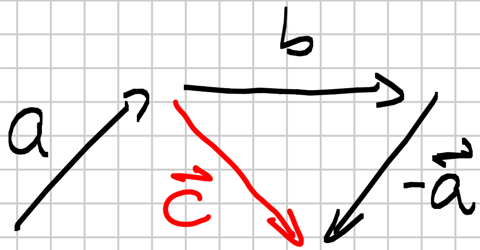



- Assoziativgesetz: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})$




- Subtraktion:




$$\vec{c} = +\vec{b} - \vec{a}$$

Zusammenfassung: Axiom 1: $\vec{a}, \vec{b} \in V \longrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \in V$

Eigenschaften: 1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

2) $\vec{a} + 0 = \vec{a}$

3) $\vec{a} - \vec{a} = 0$ Existenz von $-\vec{a}$

4) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$\Rightarrow$ Menge der Vektoren in $V$ bilden Abelsche Gruppe

Axiom 2: $\vec{a} \in V$ ; $\alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha \vec{a} = \vec{c} \in V$

Eigenschaften:
$$\left.\begin{aligned} &1)\ (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a} \\ &2)\ \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \beta \end{aligned}\right\} \text{Linearität}$$

3) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ ⌡

4) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$ Existenz des Einselements

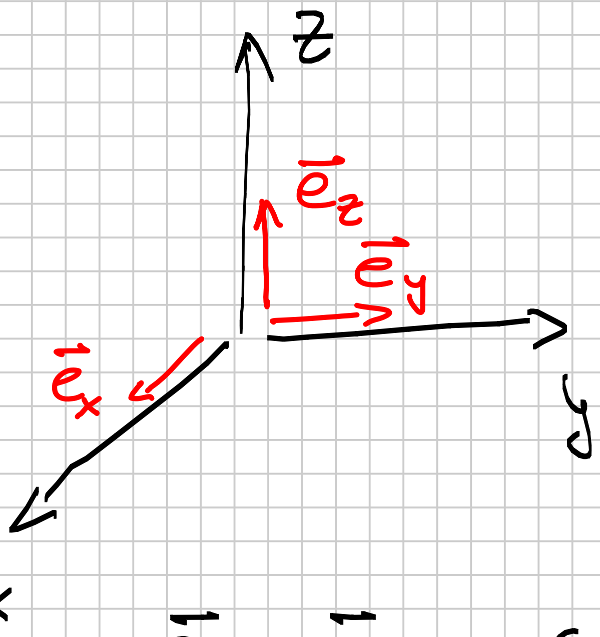
$\Rightarrow$ Menge der Vektoren in V bilden linearen Raum

3) <u>Basisvektoren</u>

3.1. <u>Einheitsvektoren</u> $\vec{e}$ mit $|\vec{e}| = 1$

Zu jedem $\vec{a}$ existiert eine Zahl $\alpha$, so daß $|\alpha\cdot\vec{a}| = 1$.

$$\alpha = \frac{1}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\alpha\cdot\vec{a}| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}\right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$$




$$\vec{a}_1 = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2 = x_2 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{e}_x + (y_1 + y_2)\vec{e}_y + (z_1 + z_2)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \vec{a}_1 = \alpha ( x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z ) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_x = 1 \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 3.2. Lineare Abhängigkeit:

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n$ sind linear abhängig, wenn gilt

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots \alpha_n \vec{a}_n = 0 \quad \text{mit } \alpha_i \neq 0 \quad \forall i$$

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n$ sind linear unabhängig, wenn gilt

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots \alpha_n \vec{a}_n = 0 \quad \text{mit } \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

$\Rightarrow$ $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sind linear unabhängig

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{a}$ sind linear abhängig, denn

$$\vec{a} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \quad \text{also}$$

$$\vec{a} - x\,\vec{e}_x - y\,\vec{e}_y - z\,\vec{e}_y = 0$$

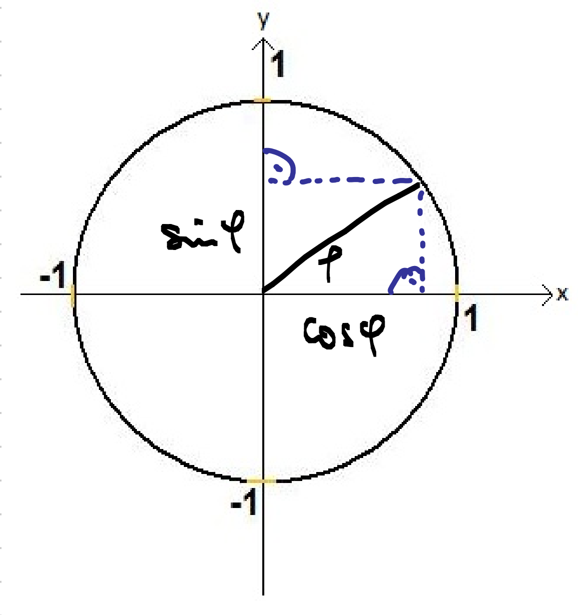
Die Dimension eines Vektorraums $(V)$ = max. Anzahl der l. u. Vektoren

$\Leftrightarrow$ l. u. Vektoren bilden Basis des Vektorraums

# 4) Trigonometrische Funktionen

Einheitskreis

Umfang $U = 2\pi R = 2\pi$




Für $0 \le \varphi \le 180^\circ$ $(\pi)$ $\quad 0 \le \sin\varphi \le 1$

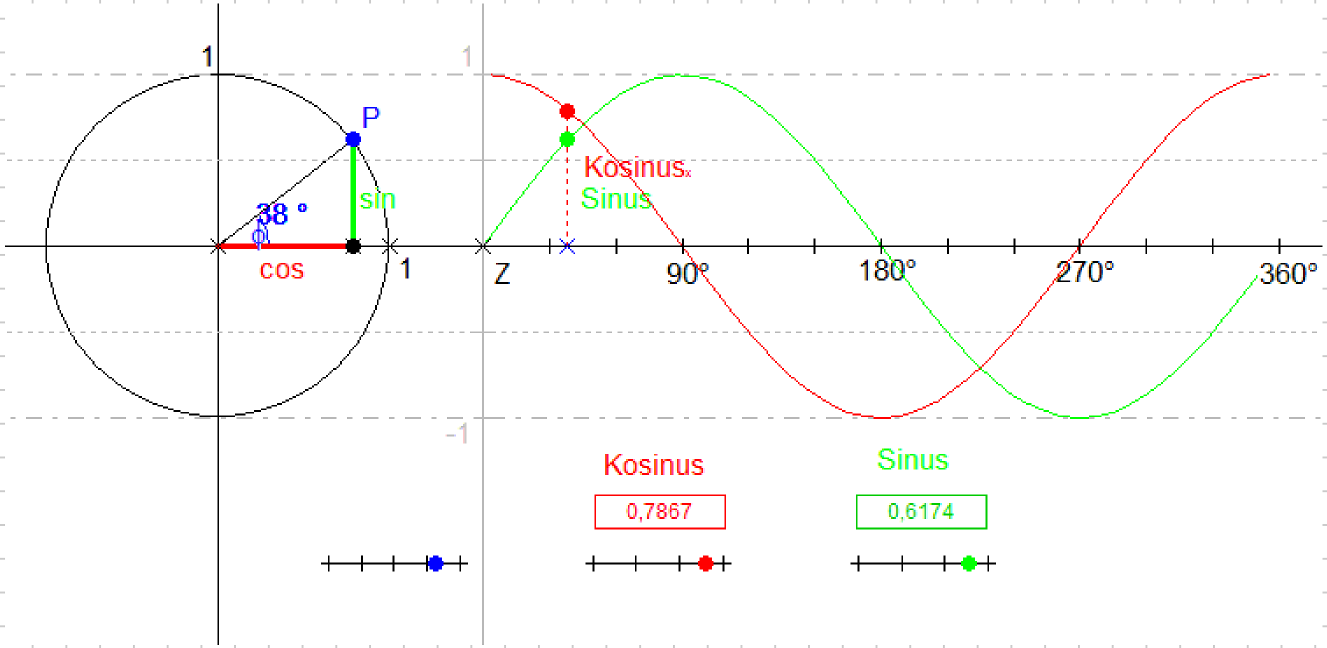
" $180 \le \varphi \le 360^\circ$ $\quad 0 \ge \sin\varphi \ge -1$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \varphi \le 90^\circ \; (\tfrac{\pi}{2}) \\ 270^\circ \le \varphi \le 360^\circ \end{array}\right\} \quad 0 \le \cos\varphi \le 1$$

$90^\circ \le \varphi \le 270^\circ$ $\quad 0 \ge \cos\varphi \ge -1$

Bogenmaß: $\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{\varphi}{360^\circ}$

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi \qquad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$$




$$\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$$

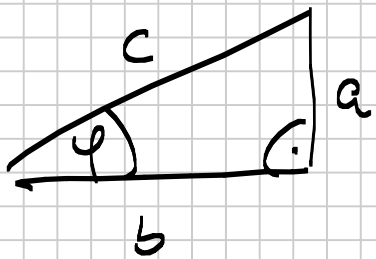
$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$$

...

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$$

| $\alpha =$ | $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ | $\pi \pm \varphi$ | $\frac{3\pi}{2} \pm \varphi$ | $2\pi \pm \varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin(\alpha)$ | $\cos\varphi$ | $\mp \sin\varphi$ | $-\cos\varphi$ | $-\sin\varphi$ |
| $\cos(\alpha)$ | $\mp \sin\varphi$ | $-\cos\varphi$ | $\pm \sin\varphi$ | $+\cos\varphi$ |

Rechtwinkliges Dreieck:




$$a = c \sin\varphi$$

$$b = c \cos\varphi$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{bzw} \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \qquad \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

## 5) Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$

„inneres Produkt"

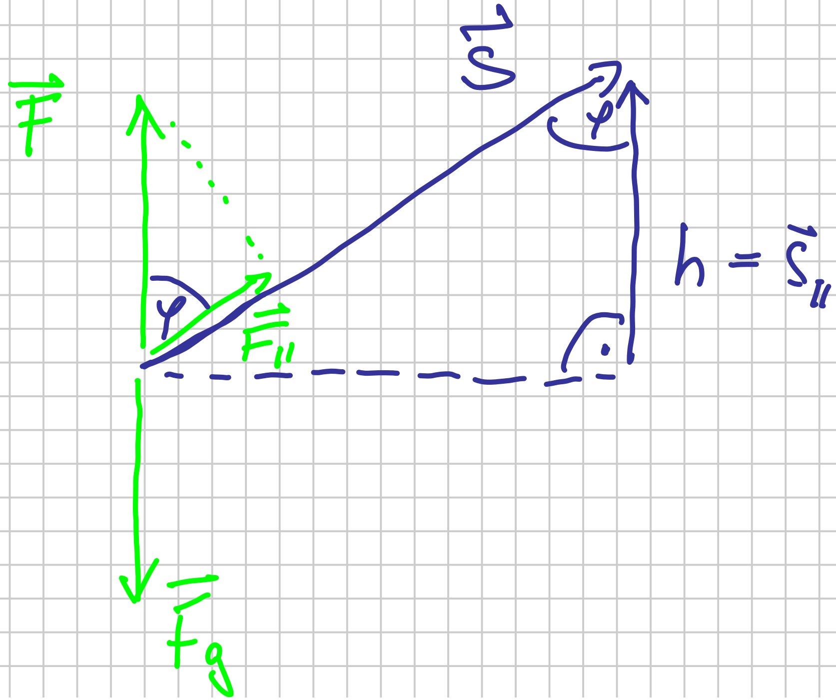

„Arbeit = Kraft mal Weg"

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}_{\parallel}| = +|\vec{F}| \cdot (|\vec{s}| \cdot \cos\varphi)$$

$$= |\vec{F}| \cdot h$$

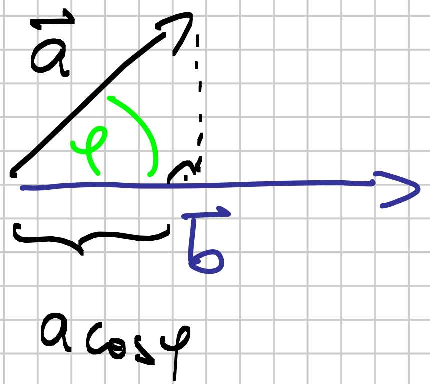
$$= |\vec{F}_{\parallel}| \cdot |\vec{s}| = (|\vec{F}| \cdot \cos\varphi) \cdot |\vec{s}|$$

$$\boxed{W =: \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

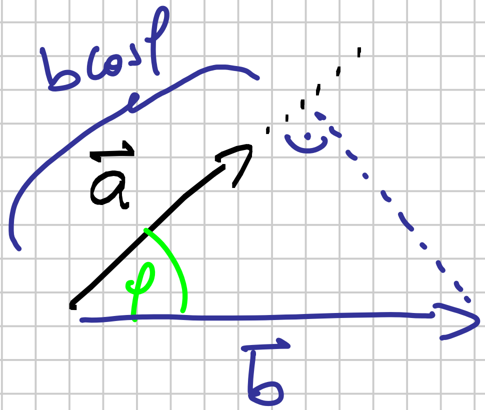


$$(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} := |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad \varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$



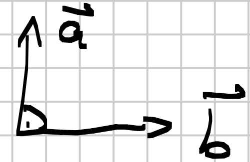

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cos\varphi\,|\vec{b}|$$
$$= a\,b\cos\varphi$$




$$\vec{b}\cdot\vec{a} = |\vec{b}|\cos\varphi\,|\vec{a}|$$
$$= a\,b\cos\varphi$$

Kommutativgesetz: $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

orthogonale Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

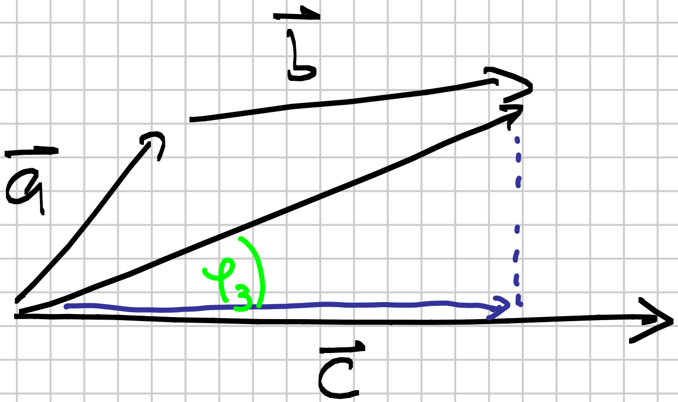


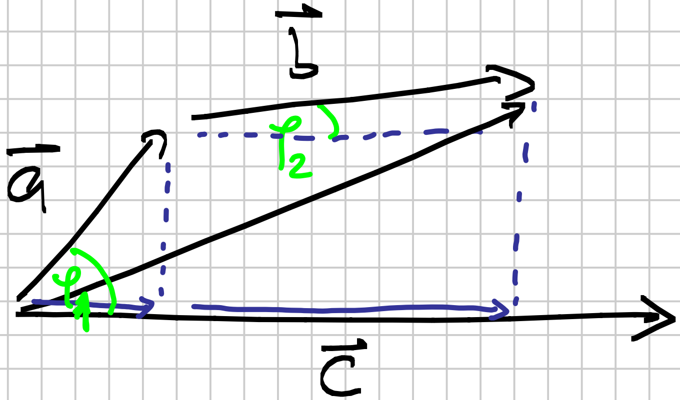

; Projektion $= 0$

## Distributivgesetz:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|\, c\cos\varphi_3 = a\,c\,\cos\varphi_1 + b\,c\cos\varphi_2$$

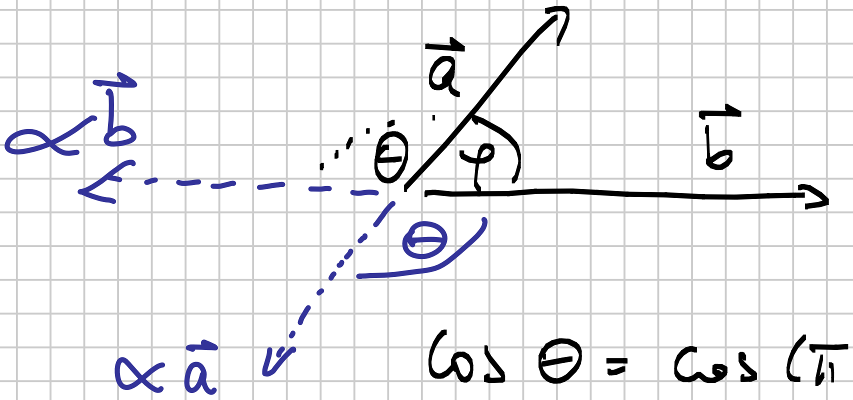



## Bilinearität: $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{a},\vec{b} \in V$

$$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\,(\alpha\vec{b}) = \alpha\,(\vec{a}\,\vec{b})$$

Beweis: $\alpha > 0$



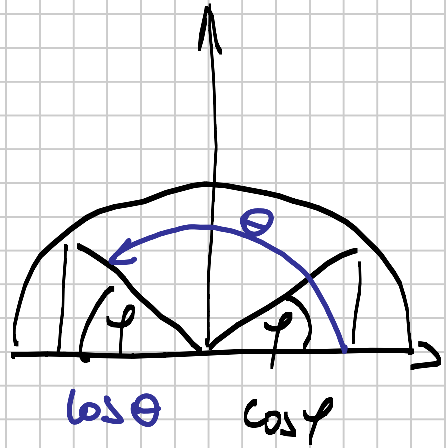

$$(\alpha a)\cos\varphi\, b = a\cos\varphi(\alpha b)$$
$$= (ab\cos\varphi)\,\alpha$$

$$\cos\theta = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$$

$\alpha < 0$: $(\alpha\vec{a})\vec{b} = |\alpha|\, ab\cos\theta = -|\alpha|\, ab\cos\varphi$

$$\vec{a}\,(\alpha\vec{b}) = a\cdot|\alpha|\cdot b\cos\theta = -|\alpha|\, ab\cos\varphi$$

$$\alpha\,(\vec{a}\,\vec{b}) = \alpha\, ab\cos\varphi = -|\alpha|\, ab\cos\varphi$$



Betrag eines Vektors: $a := |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a^2 \underbrace{\cos 0}_{1}} = a$

Schwarz'sche Ungleichung: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ab$

$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |a \cdot b \cdot \cos\varphi| \leq a \cdot b$ da $|\cos\varphi| \leq 1$

Dreiecksungleichung: $|a - b| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq a + b$

Beweis: $-ab \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq ab \quad | \cdot 2 + a^2 + b^2$

$$a^2 + b^2 - 2ab \leq a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} \leq a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 \leq (\vec{a} + \vec{b})^2 \leq (a + b)^2$$

$$|a-b| \leq |\vec{a}+\vec{b}| \leq a+b \qquad q.e.d.$$

## Rechnen mit Skalarprodukten in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z\right)\cdot\left(x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_3\vec{e}_z\right)$$

$$= + x_1 x_2 \underbrace{\vec{e}_x^{\,2}}_{1} + x_1 y_2 \underbrace{\vec{e}_x\vec{e}_y}_{=0} + x_1 z_3 \underbrace{\vec{e}_x\vec{e}_z}_{=0}$$

$$\vec{e}_x \perp \vec{e}_y \qquad\qquad \vec{e}_x \perp \vec{e}_z$$

$$+ y_1 x_2 \vec{e}_y\vec{e}_x + y_1 y_2 \vec{e}_y^{\,2} + y_1 z_2 \vec{e}_y\vec{e}_z$$

$$+ z_1 x_2 \vec{e}_z\vec{e}_x + z_1 y_2 \vec{e}_z\vec{e}_y + z_1 z_2 \vec{e}_z^{\,2}$$

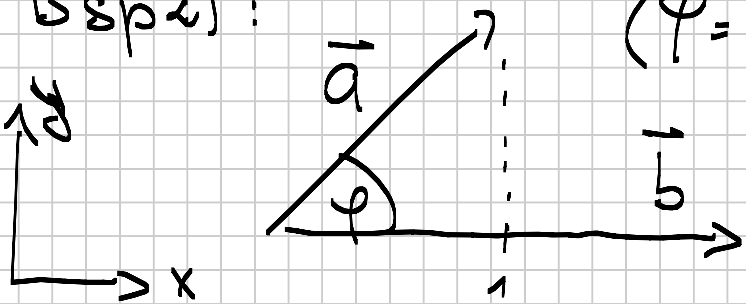
$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Bsp 1): $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 4 - 1 = 6$

Längen $\quad a = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14} \qquad b = \sqrt{\vec{b}^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{6}{\sqrt{14}\,\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{14}} \approx 0.65 \qquad \varphi = 49^\circ$$

Bsp2): $\quad (\varphi = 45^\circ) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$




$a = \sqrt{2} \qquad b = 2 \qquad \cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{a\,b} = \dfrac{2}{\sqrt{2}\,2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

## Schreibweisen und Abkürzungen:

**Einstein'sche Summenkonvention**: Summation über mehrfach auftretende Indizes

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i =: a_i b_i$$

**Kronecker-Delta**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{"} \quad i = j \end{cases}$$

$$a = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} a_k^2} = \sqrt{a_k a_k}$$

$$\delta_{jj} = \sum_{j=1}^{3} \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$\delta_{jl}\delta_{lk} = \sum_{l=1}^{3} \delta_{jl}\delta_{lk} = \underbrace{\delta_{j1}\delta_{1k}}_{\begin{cases} 1 & \text{für } j=k=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} + \underbrace{\delta_{j2}\delta_{2k}}_{\begin{cases} 1 & \text{für } j=k=2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} + \underbrace{\delta_{j3}\delta_{3k}}_{\begin{cases} 1 & \text{für } j=k=3 \\ 0 & \end{cases}}$$

$$= \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$a_k \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{3} a_k \delta_{kl} = a_1 \delta_{1l} + a_2 \delta_{2l} + a_3 \delta_{3l} = a_l$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \qquad \left( \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = \delta_{ii} = 3 \right)$$

ohne Summe $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 1$

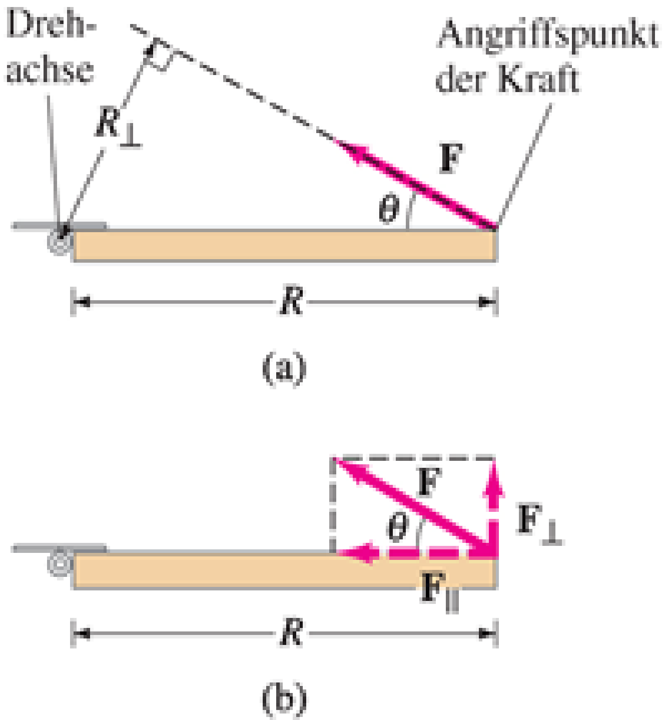
$$c_k a_j a_l b_k \delta_{jl} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} c_k b_k \underbrace{a_j a_l \delta_{jl}}_{\substack{a_j^2 \text{ für } j=l \\ 0 \text{ sonst}}}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_k b_k a_j^2$$

$$= \sum_{k=1}^{3} c_k b_k \sum_{j=1}^{3} a_j^2 = \vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}^2 = a^2 \vec{b}\vec{c}$$

# 6) Vektorprodukt "äußeres Produkt": $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

Drehmoment: $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$




$$M = R_\perp \cdot |\vec{F}|$$

$$= |\vec{F}_\perp| \cdot R$$

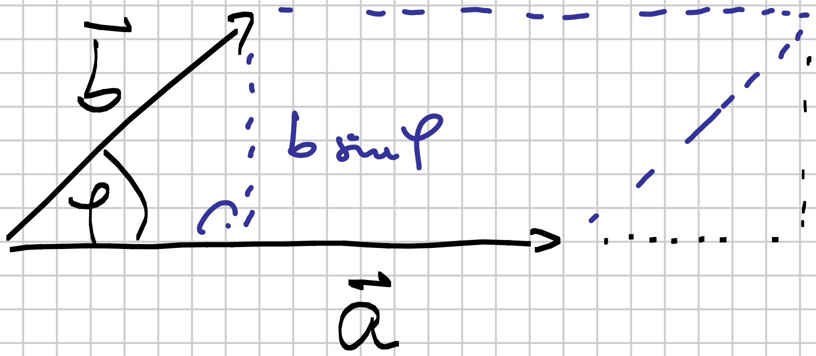
$$= R \cdot F \cdot \sin\theta$$

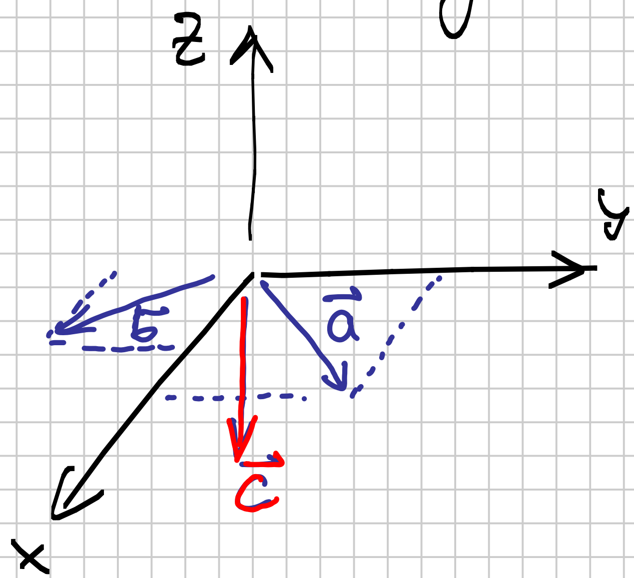
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ mit

1) $c = ab \sin\varphi \qquad \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein rechtshändiges System




$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ $\quad |\vec{c}|$ : Fläche des Parallelogramms

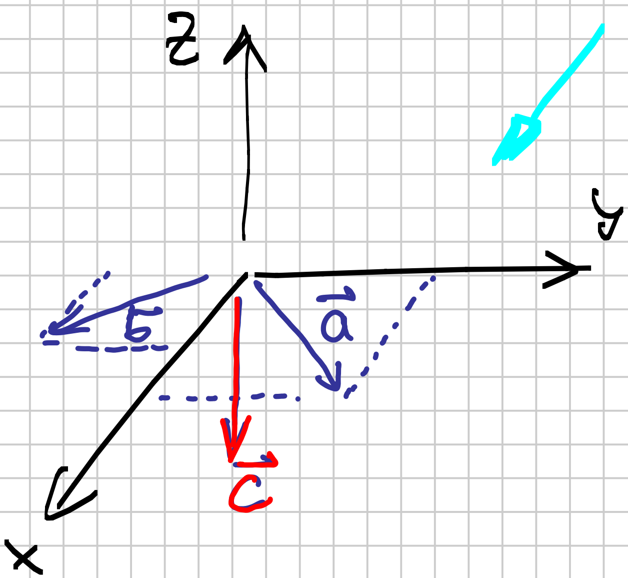
$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ falls 1) $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b} = 0$

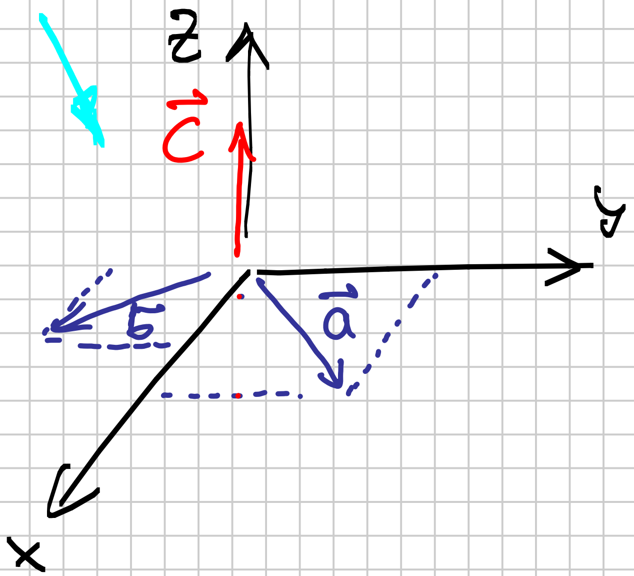
2) $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ Parallele Vektoren

Spannen keine Fläche auf

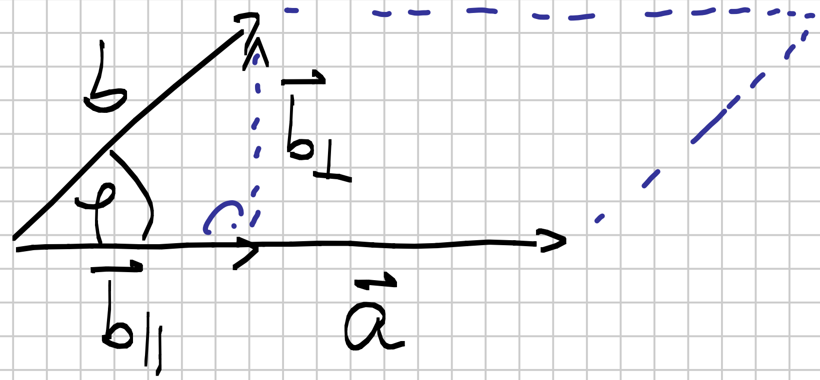
anti-kommutativ:

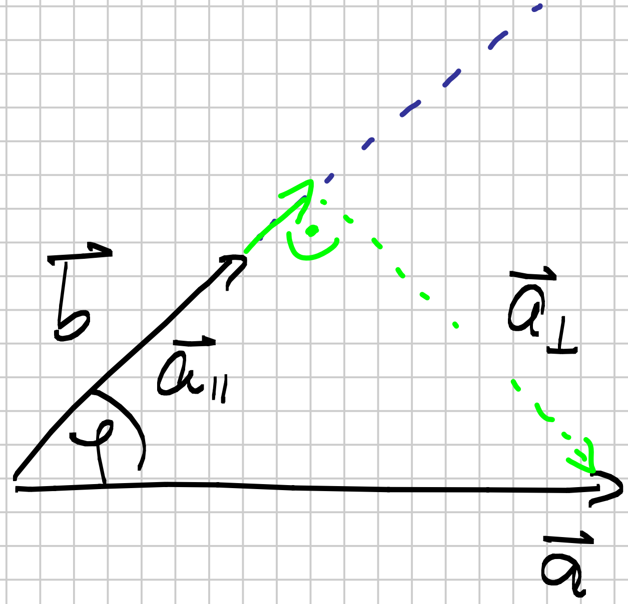
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp \times \vec{b} = \vec{c}$$




$$\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_\perp$$

$$|\vec{b}_\perp| = b \sin\varphi$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}_\perp| = a\, b_\perp \sin 90^\circ$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_\perp$$

$$|\vec{a}_\perp| = a \cdot \sin\varphi$$

$$|\vec{a}_\perp \times \vec{b}| = a_\perp\, b \cdot \sin 90^\circ$$

$$= a b_\perp = a b \sin\varphi \quad \equiv \quad a_\perp b = a b \sin\varphi$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel) = \vec{a} \times \vec{b}_\perp + \underbrace{\vec{a} \times \vec{b}_\parallel}_{=0}$$

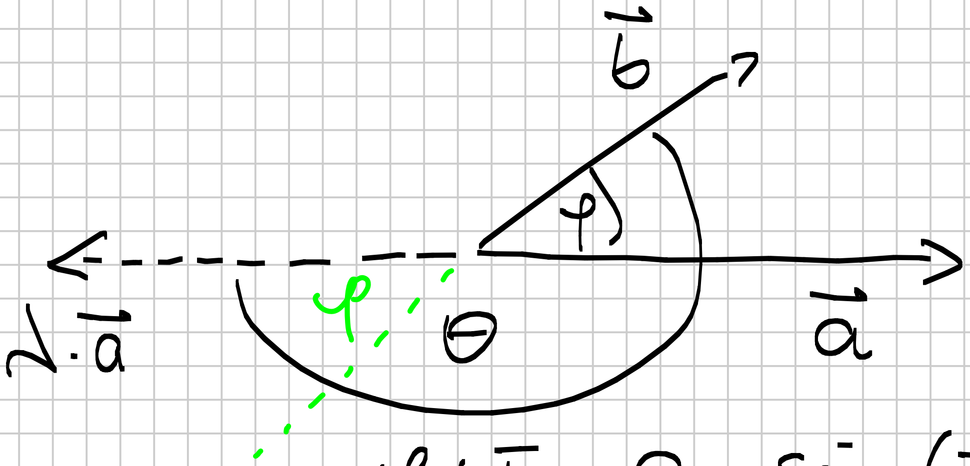
$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel)\, \vec{b} = \vec{a}_\perp \times \vec{b} + \underbrace{\vec{a}_\parallel \times \vec{b}}_{=0}$$

Bilinearität $\quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = a \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$

Beweis: $\lambda \geq 0$: $\quad \lambda\, \vec{a} \times \vec{b} = (\lambda\, a) b \sin\varphi = a (\lambda b) \sin\varphi$

$$= \lambda (a b \sin\varphi)$$

$\lambda < 0$: $\qquad \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\,\vec{c} = -|\lambda|\,\vec{c} \qquad$ mit $|\vec{c}| = ab\sin\varphi$




$$(\lambda\cdot\vec{a})\times\vec{b} = (-|\lambda|\,\vec{a})\times\vec{b} = -|\lambda|\,\vec{c}$$

denn $|\lambda|\cdot ab\sin\Theta = -|\lambda|\,ab\sin\varphi$

$$\varphi + \pi = \Theta \qquad \sin(\pi+\varphi) = \sin\Theta = -\sin\varphi$$

$$\vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \vec{a}\times(-|\lambda|\vec{b}) = -|\lambda|\,\vec{c}$$

denn $a|\lambda|\,b\sin\Theta = -|\lambda|\,ab\sin\varphi$

**Distributivgesetz:** $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

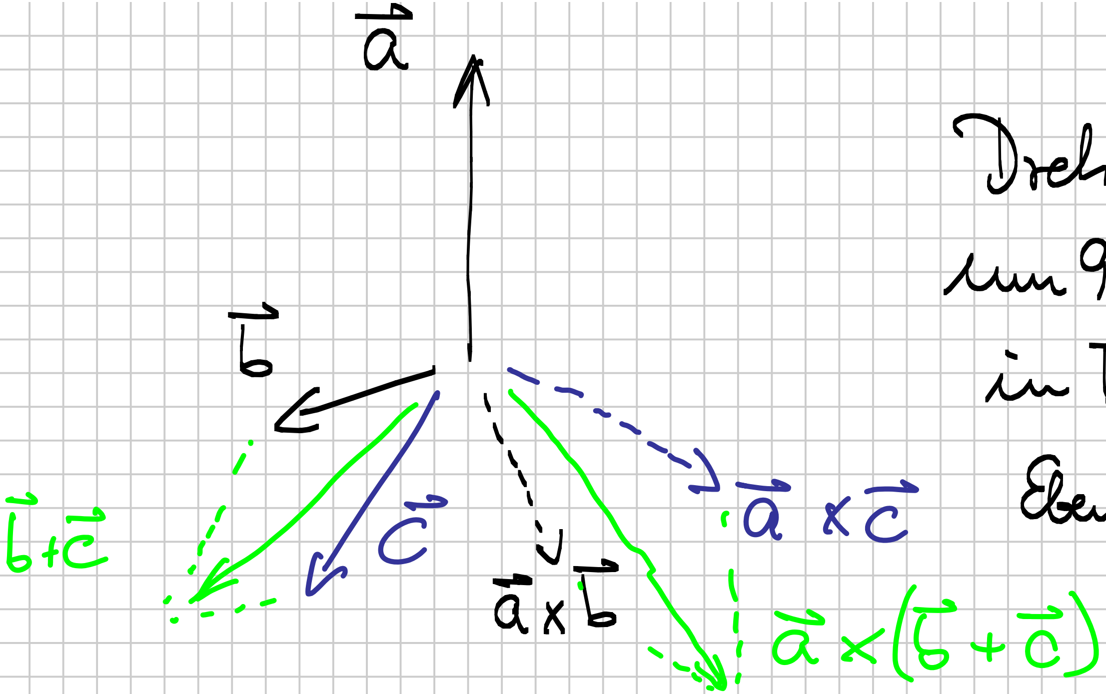
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp$ ; $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c}_\perp$

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})_\perp$ denn $\vec{b} + \vec{c} = (\vec{b} + \vec{c})_\parallel + (\vec{b} + \vec{c})_\perp$

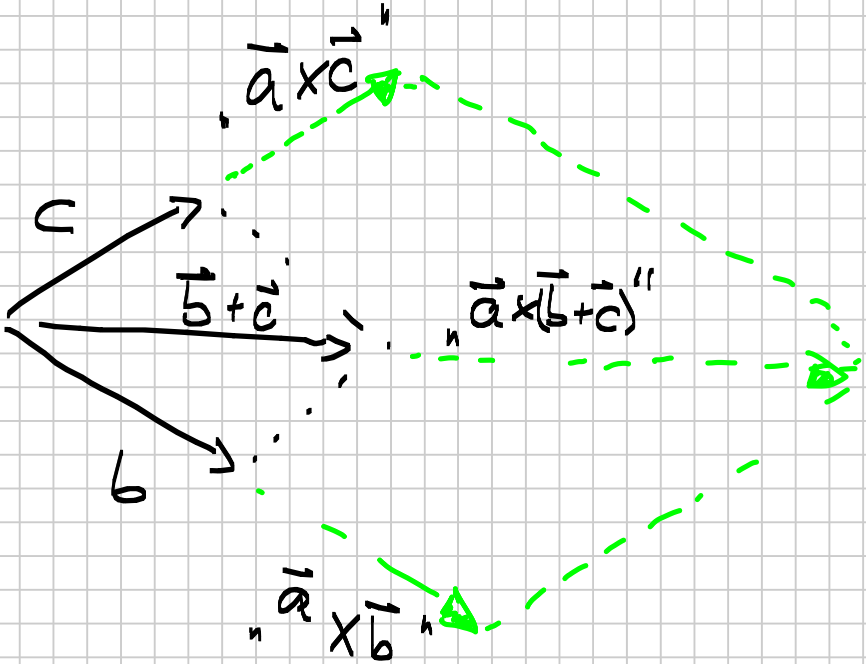
ist möglich

$\Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})_\perp = \vec{a} \times \vec{b}_\perp + \vec{a} \times \vec{c}_\perp$ ?

O.B.d.A. $\vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{a}$ sowie $(\vec{b} + \vec{c}) \perp \vec{a}$




Drehung um 90° in $\vec{b}, \vec{c}$ Ebene



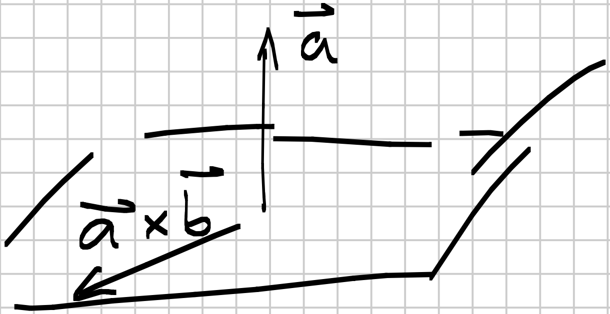

$\Rightarrow$

gleiche Drehung aller Vektoren mit a!

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \qquad \text{distributiv}$$

Ferner gilt $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ da $\sin(0°) = 0$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \text{denn} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$$




Ebene aller $\vec{a} \times \vec{b}$ Vektoren $\perp \vec{a}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = ac \cos\varphi = 0$

$\vec{b}\vec{c} = bc \cos\varphi = 0$

da $\cos 90° = 0$

Vektorprodukt ist nicht assoziativ: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$ Ebene $\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ liegt in $\vec{a}, \vec{b}$ Ebene

$\vec{b} \times \vec{c} \perp \vec{b}, \vec{c}$ Ebene $\Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ liegt in $\vec{b}, \vec{c}$ Ebene

Ausnahme: $\vec{a} = 0$, etc. oder $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{c}$ liegt auch in $\vec{a}, \vec{b}$ Ebene

# 7. Rechnen mit Vektorprodukt in kartesischen Koordinaten

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$ ; $\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$ denn $\vec{e}_j \perp \vec{e}_i$ für $i \neq j$

und $|\vec{e}_i| = 1$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ rechtshändig

allgemein:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \begin{cases} \vec{e}_k & \text{für } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -\vec{e}_k & \text{für } i,j,k \text{ antizyklisch} \end{cases}$$

zyklisch 1-2-3, 2-3-1, 3-1-2 x-y-z, y-z-x, ...

antizyklisch 1-3-2; 3-2-1, 2-1-3

Abkürzung: Levi-Civita Tensor $\varepsilon_{ijk}$

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{für } i,j,k \text{ antizykl.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk} e_k$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \times (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1)}_{0} + a_1 b_2 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}_{\vec{e}_3} + a_1 b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2}$$

$$+ a_2 b_1 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)}_{-\vec{e}_3} + a_2 b_2 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2)}_{0} + a_2 b_3 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}_{+\vec{e}_1}$$

$$+ a_3 b_1 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)}_{\vec{e}_2} + a_3 b_2 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)}_{-\vec{e}_1} + a_3 b_3 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3)}_{0}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\vec{e}_3$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

zyklisch

− antizyklisch

Konstruktion:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} = \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \vec{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\vec{C} = (\vec{a} \times \vec{b}) = a_i \vec{e}_i \times b_j \vec{e}_j = a_i b_j \; \vec{e}_i \times \vec{e}_j$$

$$= a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k = c_k \vec{e}_k$$

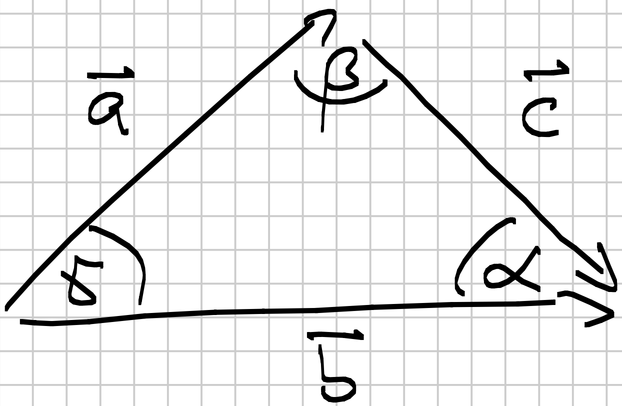
mit $C_k = \varepsilon_{ijk} \, a_i b_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \varepsilon_{ijk}$

$$C_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$C_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$C_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

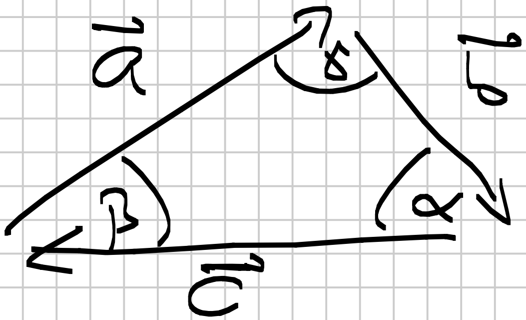
# 7.1. Cosinussatz und Sinussatz:



$$\vec c = -\vec a + \vec b = \vec b - \vec a$$

$$\vec c^{\,2} = c^2 = (\vec b - \vec a)^2 = b^2 + a^2 - 2\vec a \vec b$$

$$\underline{c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}$$



$$\vec a + \vec b + \vec c = 0$$

$$\vec a \times \vec b = \vec a \times (0 - \vec c - \vec a) = -\vec a \times \vec c - \overbrace{\vec a \times \vec a}^{=0}$$

$$= \vec c \times \vec a$$

andererseits $\vec{a} \times \vec{b} = (-\vec{c} - \vec{b}) \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$

$\Longrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

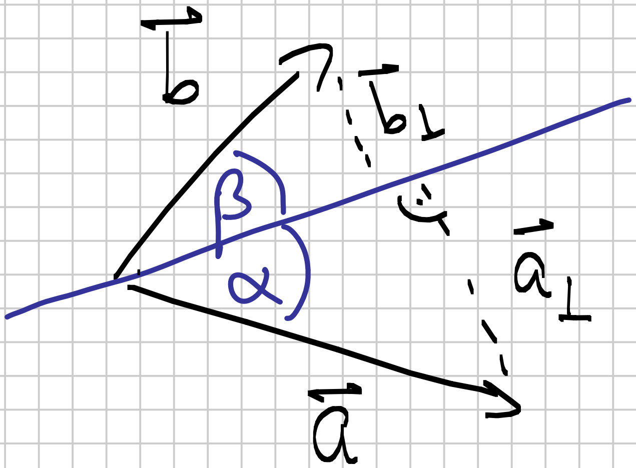
oder $\quad ab \sin(180 - \gamma) = bc \sin(180 - \alpha) = ac \sin(180 - \beta)$

wg $\quad \sin(180 - \varphi) = \sin\varphi$

$$ab \sin\gamma = bc \sin\alpha = ac \sin\beta \quad | : abc$$

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

## 7.2 Additionstheoreme:




$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\,\cos(\alpha+\beta) = (\vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp)(\vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp)$$

$$= a_\parallel b_\parallel - a_\perp\, b_\perp$$

$$= a\cos\alpha\, b\cos\beta - a\sin\alpha\, b\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = a\,b\,\sin(\alpha+\beta) = (\vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp)\times(\vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp)$$

$$= a_\parallel b_\perp + a_\perp b_\parallel = ab\cos\alpha\sin\beta + ab\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\sin\beta + \sin\alpha\,\cos\beta$$

## 7.3. Entwicklungssatz: „bac - cab" Regel

$$\vec{p} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = \underbrace{\beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{p}}_{\vec{p} \text{ liegt in } \vec{b},\vec{c} \text{ Ebene}}$$

$$\vec{p}\perp\vec{a} \Rightarrow \vec{p}\cdot\vec{a} = 0 = \beta\,\vec{b}\cdot\vec{a} + \gamma\,\vec{c}\vec{a}$$

Sei $\alpha := \frac{\beta}{\vec{a}\vec{c}} \Rightarrow \gamma = -\frac{\beta}{\vec{c}\cdot\vec{a}}\,\vec{b}\cdot\vec{a} = -\alpha\,\vec{b}\vec{a}$

$$\Rightarrow \vec{p} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha\left[\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})\right] = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$$

Sei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq 0$ und $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$

Wähle $\vec{e}_1 \parallel \vec{b}$ und $\vec{e}_2$ in $b, c$-Ebene

also $\vec{b} = b\,\vec{e}_1$ und $\vec{c} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2$

$$\Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = b\, c_2 \cdot \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = b c_2 (\vec{a} \times \vec{e}_3) = b c_2 \Big( a_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2} + a_2 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{+\vec{e}_1} + a_3 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}}$$

$$= \begin{pmatrix} b c_2 a_2 \\ -b c_2 a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Andererseits:

$$\alpha\left[\vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b})\right] = \alpha\left[b\,\vec{e}_1\,(a_1 c_1 + a_2 c_2) - (c_1\,\vec{e}_1 + c_2\,\vec{e}_2)(a_1\,b)\right]$$

$$= \alpha\left[\vec{e}_1\left(b\,\cancel{a_1 c_1} + a_2 c_2 b - \cancel{a_1 c_1 b}\right) - a_1 c_2 b\,\vec{e}_2\right]$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a_2 c_2 b \\ a_1 c_2 b \\ 0 \end{pmatrix}$$

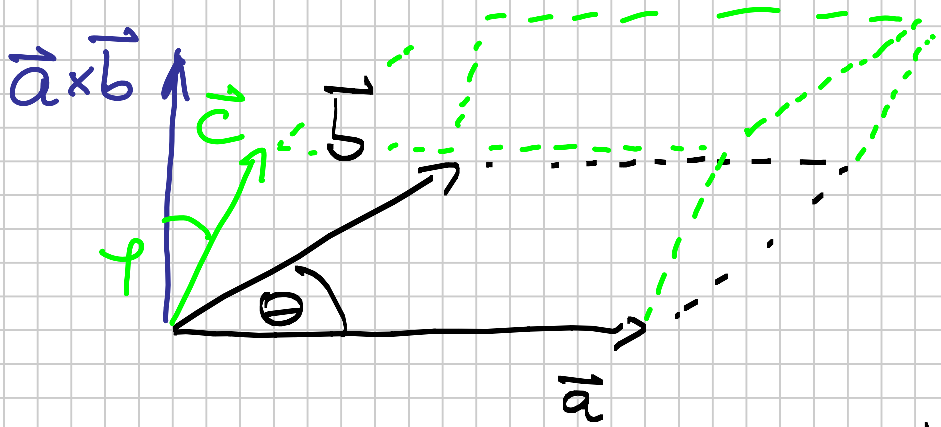
$$\alpha = 1$$

$\Rightarrow$ Entwicklungsatz gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

# 7.4. Spatprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Notiztitel 05.09.2012




$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$$

$$a\, b \sin\Theta \cdot c \cdot \cos\varphi$$

Interpretation:

Volumen = Grundfläche × Höhe

= Länge a · Breite b · $\sin\Theta$ × Höhe c × $\cos\varphi$

$$V = \vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \vec{e}_i \cdot \varepsilon_{jkl}\, b_j\, c_k\, \vec{e}_l$$

$$\boxed{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_l = \delta_{il} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = l \\ 0 & \text{für } i \neq l \end{cases}}$$

$$= a_i\, b_j\, c_k\, \delta_{il}\, \varepsilon_{jkl} = a_l\, b_j\, c_k\, \varepsilon_{jkl}$$

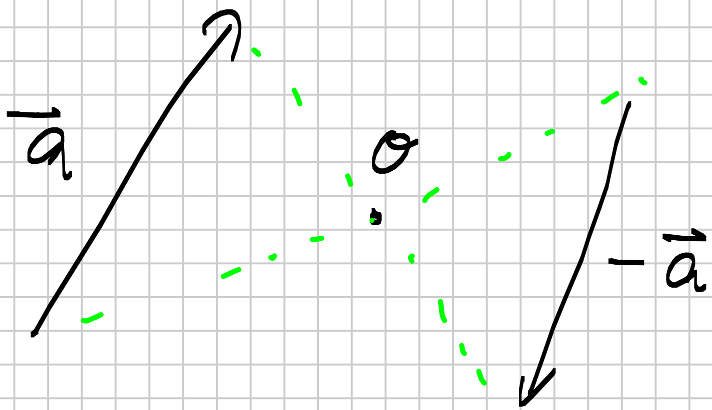
$$= \varepsilon_{jkl}\, b_j\, c_k\, a_l = \varepsilon_{klj}\, b_j\, c_k\, a_l = \varepsilon_{ljk}\, b_j\, c_k\, a_l$$

$$= \vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{b}\,(\vec{c} \times \vec{a})$$

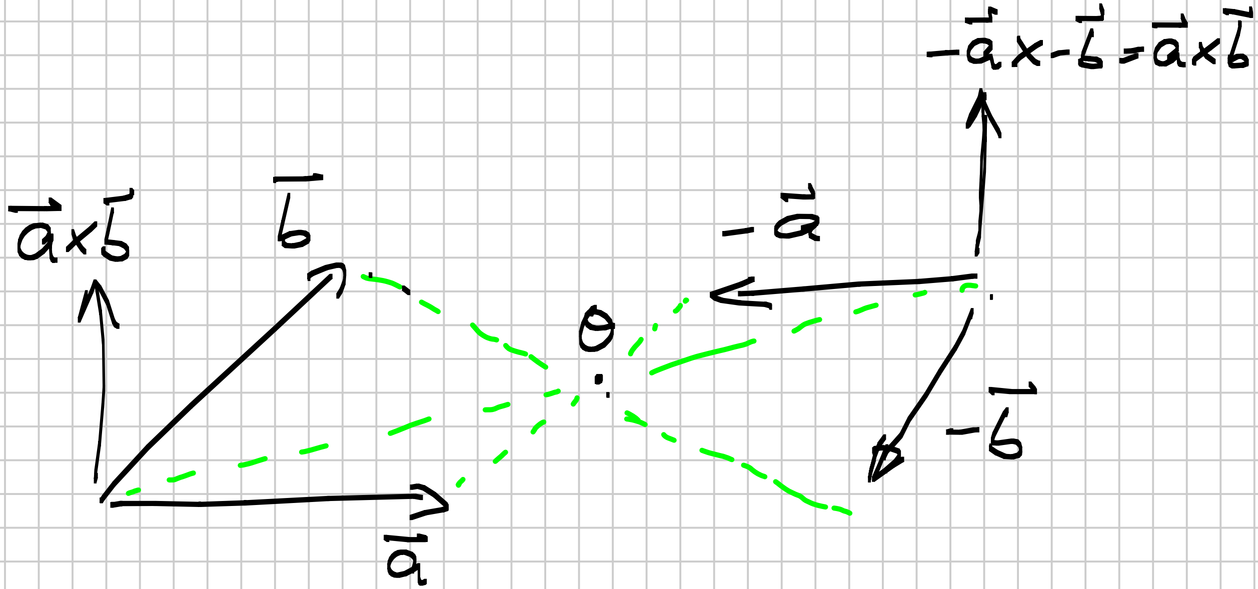
$$= -\varepsilon_{kjl}\, b_j\, c_k\, a_l = \ldots$$

$$= -\vec{b}\,(\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$$

# 7.5. Polare und axiale Vektoren




Inversion am Ursprung




Vektorprodukt axialer Vektor (Pseudovektor, Drehsinn)

## 8) Drehung von Vektoren (Drehmatrizen)

a) Drehung der Vektoren im festen Koordinatensystem

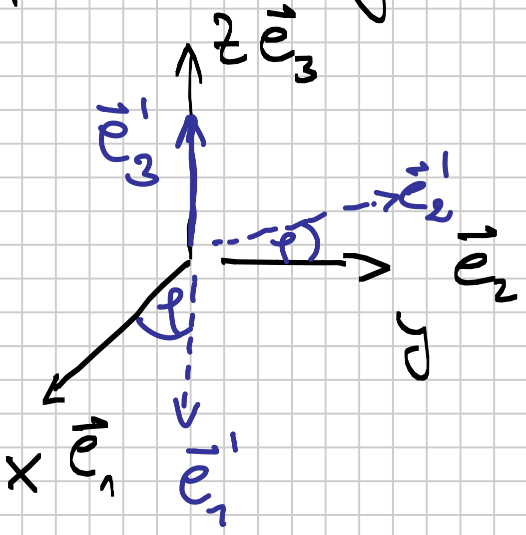
$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \longrightarrow \vec{a}' = a_i' \vec{e}_i$$

b) Drehung des Koordinatensystems

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \longrightarrow \vec{a}' = a_i' \vec{e}_i' \equiv \vec{a}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ & $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ sind zwei rechtshändige Koord. systeme mit gleichem Ursprung

Bsp: Drehung um alte z-Achse $\vec{e}_3$ um Winkel $\varphi$:




$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i = a_i' \vec{e}_i\,'$$

$$\vec{e}_i\,' = d_{ij} \vec{e}_j$$ Koordinatentransformation

z.B. $\vec{e}_1\,' = \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2 + 0\, \vec{e}_3$

$\vec{e}_2\,' = -\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2 + 0\, \vec{e}_3$

$\vec{e}_3\,' = \vec{e}_3$

$$\vec{e}_i\,' \cdot \vec{e}_k = d_{ij} \vec{e}_j \vec{e}_k = d_{ij} \delta_{jk} = d_{ik}$$

$$d_{ik} = \vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_k = \cos(\vec{e}_i{}', \vec{e}_k)$$ Drehmatrix

$$\mathbb{D} = (d_{ik}) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

zu Bsp:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Betrachte

$$\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}' = \delta_{ij} = d_{ik}\,\vec{e}_k \cdot d_{je}\,\vec{e}_e = d_{ik}\, d_{je}\, \underbrace{\vec{e}_k \vec{e}_e}_{\delta_{ke}}$$

$$= d_{ik}\, d_{jk}$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, d_{jk} = \delta_{ij}$$

$\Longrightarrow$ Zeilenvektoren $\vec{d}_i = \begin{pmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ d_{i3} \end{pmatrix}$ bilden Orthonormalsystem wie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

denn $\vec{d}_i \cdot \vec{d}_j = \delta_{ij}$

Zeilenvektor

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \boxed{d_{11} \quad d_{12} \quad d_{13}} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\cos\varphi \quad +\sin\varphi \quad 0} \\ -\sin\varphi \quad \cos\varphi \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = (d_{11}, d_{12}, d_{13}) \cdot \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \cos\varphi(-\sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi + 0 = 0$$

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \quad \ldots$$

Betrachte die inverse Drehung: $\vec{e}_i = \tilde{d}_{ij}\, \vec{e}_j\,'$

$$D^{-1} = (\tilde{d}_{ij}) = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} & \tilde{d}_{13} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} & \tilde{d}_{23} \\ \tilde{d}_{31} & \tilde{d}_{32} & \tilde{d}_{33} \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $\vec{e}_j' = d_{jk} \vec{e}_k$

$$\vec{e}_i = \tilde{d}_{ij} \, d_{jk} \, \vec{e}_k \qquad | \cdot \vec{e}_l$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_l = \delta_{il} = \tilde{d}_{ij} \, d_{jk} \, \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = \tilde{d}_{ij} \, d_{jk} \, \delta_{kl}$$

$$\underline{\delta_{il} = \tilde{d}_{ij} \, d_{jl}}$$

Zeilenvektor der inversen Matrix $D^{-1}$

Spaltenvektor der Matrix $D$

bilden Orthonormal-System!

Es gilt:

„Neu" durch „Alt":

1) $\vec{e}_i{}' = d_{ij}\,\vec{e}_j \quad \rightsquigarrow \quad \vec{e}_i{}'\,\vec{e}_k = d_{ij}\,\vec{e}_j\,\vec{e}_k = d_{ij}\,\delta_{jk} = d_{ik}$

$$\boxed{\vec{e}_i{}'\,\vec{e}_k = d_{ik}}$$

„Alt" durch „Neu":

2) $\vec{e}_i = \tilde{d}_{ij}\,\vec{e}_j{}' \quad \rightsquigarrow \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k{}' = \tilde{d}_{ij}\,\vec{e}_j{}'\,\vec{e}_k{}' = \tilde{d}_{ij}\,\delta_{jk}$

$$\boxed{\vec{e}_i\,\vec{e}_k{}' = \tilde{d}_{ik}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\vec{e}_k\,\vec{e}_i{}' = \tilde{d}_{ki}}$$

$$= \vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_k = d_{ik}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{d}_{ki} = d_{ik}}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} = D^T$$

transponierte Matrix $D^T$

$$D^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilen- und Spaltenvektoren von $D^{-1}$ und $D$ bilden Orthonormalsystem

Bsp: Drehung um $\varphi$ um z-Achse:

$$D_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_z^{-1}(\varphi) = D_z(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) & 0 \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_z^{-1}(\varphi) = D_z^{T}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ +\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ +\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Drehung des Koordinatensystems

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \longrightarrow \vec{a}' = a_i' \vec{e}_i' \equiv \vec{a}$$

$$\vec{e}_i' = d_{ij} \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} d_{ij} \vec{e}_j$$ Koordinatentransformation

Bestimmung der Komponente $a_j$ des Vektors $\vec{a}$ aus den Komponenten $a_i'$ im gedrehten KOS:

$$\vec{a}' = \sum_{i=1}^{3} a_i' \vec{e}_i' = \vec{a} = \sum_{j=1}^{3} a_j e_j \qquad | \cdot \vec{e}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i' \, \underbrace{\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j} = a_j$$

$$d_{ij} = \vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j = \cos(\vec{e}_i{}', \vec{e}_j)$$

$$\boxed{a_j = \sum_{i=1}^{3} a_i' \, d_{ij}}$$

Bestimmung der Komponente $a_i'$ des Vektors $\vec{a}'$ aus den Koordinaten $a_j$ im ungedrehten KOS:

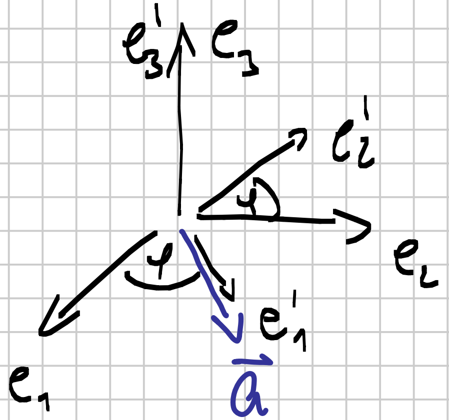
$$\vec{a}' = \sum_{i=1}^{3} a_i' \, \vec{e}_i' = \vec{a} = \sum_{j=1}^{3} a_j e_j \qquad | \cdot \vec{e}_i'$$

$$= a_i' = \sum_{j=1}^{3} a_j \underbrace{\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i'}_{\tilde{}}$$

$$\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i' = \tilde{d}_{ji} = d_{ij}$$

$$a_i' = \sum_{j=1}^{3} a_j \tilde{d}_{ji} = \boxed{\sum_{j=1}^{3} a_j d_{ij} = a_i'}$$

Bsp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi = 45°$




$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\,' = (d_{ij}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notiztitel 06.09.2012

# 9) Matrizen und Determinanten

Definition: $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & & & \vdots \\ a_{31} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}}$

$n \times m$ Matrix

Zeilen Spalten

- quadratische Matrix $n = m$
- diagonale Matrix $a_{ij} = 0 \;\forall\, i \neq j \iff a_{ij} = \delta_{ij} a_i$ $\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \; a_n \end{pmatrix}$

- Einheitsmatrix $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad e_{ij} = \delta_{ij}$

i-ter Zeilenvektor $(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} \dots a_{im})$ $(1 \times m)$-Matrix

j-ter Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ $(n \times 1)$ Matrix

- Zeilenrang: Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren
- Spaltenrang: " " " " Spaltenvektoren

Es gilt Spaltenrang = Zeilenrang = Rang einer Matrix

Bsp (statt Beweis): $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Zeilen

Zeilenrang = 2 ; denn

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \text{ nur für}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Spaltenrang $= 2$ ; denn: $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0$

und $\beta_1 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0$ nur für $\beta_1 = \beta_2 = 0$

## 9.1. Rechenregeln für Matrizen

- Skalare Multiplikation: $A = (a_{ij})$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})$
- Addition von Matrizen: $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ sind $n \times m$ Matrizen

$\Rightarrow C = A + B = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\quad C$ ist $n \times m$ Matrix

- Multiplikation von Matrizen: $A = (a_{ij})$ $m \times n$ Matrix

$B = (b_{ij})$ $n \times r$ Matrix

Spaltenzahl $n$ von $A$ = Zeilenzahl $n$ von $B$

$\Rightarrow$ $C = A \cdot B = (c_{ij})$ ist eine $m \times r$ Matrix

mit $c_{ij} = a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

$c_{ij}$ ist Skalarprodukt des $i$-ten Zeilenvektors von $A$ mit dem $j$-ten Spaltenvektor von $B$.

$$
\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ m \end{array}
\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}
\cdot
\begin{array}{c} 1 \;\cdots\; j \;\cdots\; r \\ \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} \end{array}
=
\begin{array}{cc} 1 \;\cdots\; i \;\cdots\; m & \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ r \end{array} \end{array}
$$

Nur für quadratische Matrizen existieren $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Allgemein gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$

also $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \neq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{jk}$

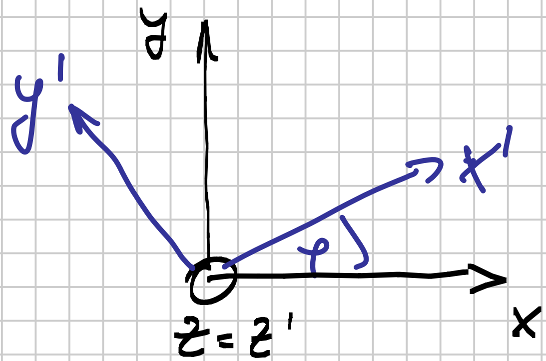
Im Folgenden werden nur noch quadratische Matrizen betrachtet.

- Symmetrische Matrizen : $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = a_{ji}$
- transponierte Matrix : $A = (a_{ij})$ $\quad A^T = (\tilde{a}_{ij}) = (a_{ji})$
- inverse Matrix : $A = (a_{ij})$ $\quad A^{-1} \cdot A = E = (\delta_{ij})$

Für Drehmatrizen gilt $D^{-1} = D^T \Rightarrow D^T \cdot D = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bsp.: Drehung um z-achse um $\varphi$:

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$D^{-1}$ : Drehung um $-\varphi$ : $D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) & 0 \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D^T$$

$$D^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + (-\sin\varphi)^2 & \cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

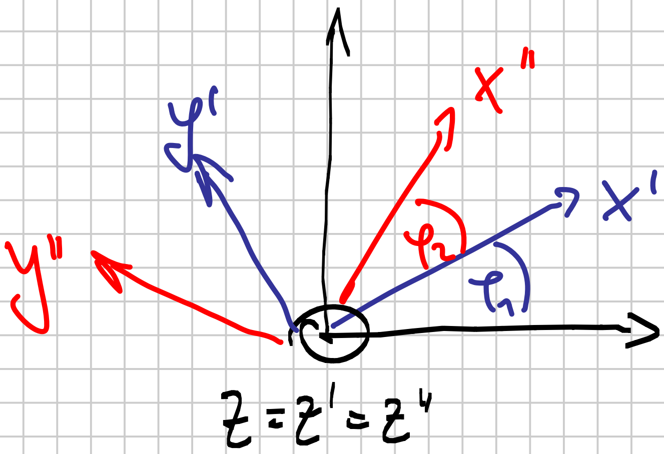
Betrachte 2 Drehungen nacheinander um $\varphi_1$ bzw $\varphi_2$ jeweils um z-Achse

$$D_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 0 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesamtdrehung $D = D_2 \cdot D_1$

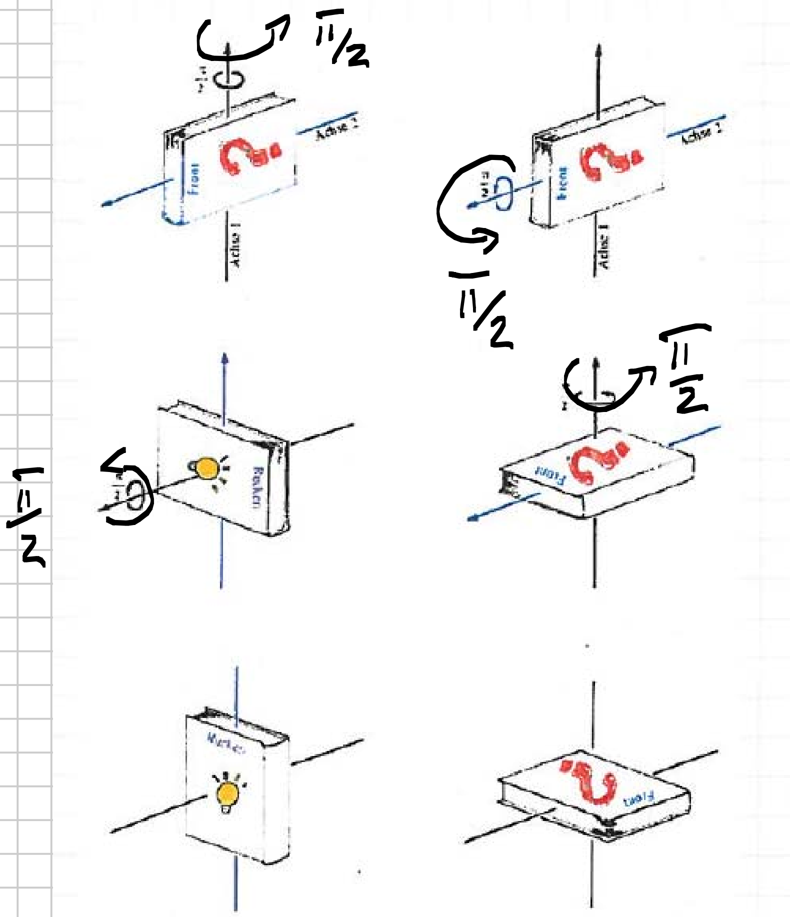
$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_2 \sin\varphi_1 & \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 & 0 \\ -\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 & -\sin\varphi_2 \sin\varphi_1 + \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = D_2 \cdot D_1 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \\ -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$




Drehwinkel addieren sich

# Drehungen um verschiedene Achsen:




- Ergebnis unterschiedlich

„2 nach 1"

$$D_{gesamt} = D_2 \cdot D_1$$

$$D_2 \cdot D_1 \neq D_1 \cdot D_2$$

- Reihenfolge der Drehungen beachten

# 9.2. Determinanten

Hilfsmittel zur Berechnung der inversen Matrix, Lsg linearer Gleichungssysteme

QM: Symmetrie der Wellenfkt

Determinante von $A = (a_{ij})$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} - a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \dots + a_{1n} A_{1n}$$

Mit $A_{ke}$ der Unterdeterminante:

$$A_{kl} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Streichen der $k$-ten Zeile und $l$-ten Spalte aus $|A|$

Bspe:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$
$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Rechenschema: Jeder Summand besteht aus 3 Faktoren

Jeder Summand erhält aus jeder Zeile genau einen Faktor
" " Spalte "

Es treten alle Permutationen (Vertauschungen) auf: $3! = 6$

Vertauschung der Indizes im Produkt $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3}$

geht aus der natürlichen Reihenfolge 1, 2, 3

aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Vertauschungen

hervor: Vorzeichen $(-1)^P$

$\Rightarrow$ Definition der Determinante:

$$|A| := \sum_P (-1)^P a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Summation über alle $n!$ Permutationen von $j_1\ j_2\ j_3 \cdots j_n$ der Spaltenindizes aus 1, 2, 3, ... n.

## Sarrus'sche Regel (n=3):

$$|a_{ij}| = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

## Entwicklungssatz von Laplace:

Entwicklung von $|A|$ nach der $j$-ten Spalte:

$$\mathrm{Det}(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$ mit Unterdeterminante $A_{ij}$

Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\mathrm{Det}(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

Mit $U_{ij} := (-1)^{i+j} A_{ij}$ „algebraisches Komplement"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Unterdeterminante

$$A_{11} = \det(\quad)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Unterdeterminante

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\quad)$$

Nutzen:

Entwicklung sinnvollerweise nach Spalte oder Zeile mit den meisten Nullen.

## 9.3. Rechenregeln für Determinanten

- Multiplikation einer Zeile:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Entwicklung nach i-ter Zeile:

$$\det(\tilde{A}) = \lambda \cdot \det(A)$$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$$

- Addition einer Zeile (aus Entwicklungssatz nach 1. Zeile):

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

- Vertauschen benachbarter Zeilen $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel

  folgt aus Entwicklungssatz wegen $(-1)^{i+j}$

- sind 2 Zeilen identisch, dann ist $\det(A)=0$

  vertausche benachbarte Zeilen solange bis identische Zeilen benachbart sind, vertausche diese $\Rightarrow \det(A) = -\det(A) = 0$

- Addition von Zeilen

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & \cdots & \\ a_{j1} & & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \lambda \overbrace{\det\begin{pmatrix} & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix}}^{=0}$$

Multiplikationstheorem: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Transponierte Matrix: $\det(A^T) = \det A$

Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

folgt auch aus Entwicklungssatz für die letzte Zeile, der $(n-1)$ fach angewendet wird.

Einheitsmatrix:

$$E = \mathbb{1} \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- inverse Matrix $\quad A^{-1} \cdot A = E$

$$\det(A^{-1}) \cdot \det(A) = \det(E) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Umkehrung (ohne Beweis):

Falls $\det A \neq 0$ existiert $A^{-1}$, sodaß $A^{-1} \cdot A = E$

# 10. Lineare Gleichungssysteme

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} x_2 + \dots \quad a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + \dots \quad a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1} x_1 + \dots \quad a_{nn} x_n = b_n$$

Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

homogenes Gleichungssystem für $b_1 = b_2 = b_{\dots} = b_n = 0$

ansonsten inhomogen

10.1a) inhomogene Gleichungssysteme

$$\sum_{i=1}^{n} \Big| \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \Big| \cdot U_{ik}$$

Multiplikation mit algebraischem Komplement

$U_{ik}$ (für festes k) und summiere über alle Zeilen n:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \, U_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_i \, U_{ik}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Big( \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} U_{ik}}_{\substack{= \det(A) \text{ für } j=k \\ = 0 \text{ für } j \neq k}} \Big) \cdot x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i U_{ik}$$

Matrix $\hat{\tilde{A}}$ sei identisch mit $A$, aber Spalte $k$ durch Spalte $j$ ersetzt $\Rightarrow \det(\hat{A}) = 0$, da 2 identische Spalten vorhanden

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ik} U_{ik}}\, x_k = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i U_{ik}}$$

$\det(A)$ $\det(\tilde{A}_k)$

Matrix $A_k$ identisch mit $A$, Spalte $k$ wird jedoch durch $b$ ersetzt:

$$\tilde{a}_{ik} = b_i \implies \det(\tilde{A}_k) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ik} U_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_i U_{ik}$$

$$\implies \det(A) \cdot x_k = \det(\tilde{A}_k)$$

$$\implies x_k = \frac{\det(\tilde{A}_k)}{\det(A)}$$

$\implies$ 1) inhomogenes lineares Gleichungssystem nur lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$

2) Lösung $(x_1 \dots x_n)$ ergibt sich durch $x_k = \dfrac{\det(\tilde{A}_k)}{\det(A)}$ für $k = 1, \dots n$. Dabei ergibt sich $\tilde{A}_k$ aus $A$ indem die $k$-te Spalte $a_{jk}$ durch $b_j$ $(j = 1, \dots n)$ ersetzt wird.

Bsp:
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{matrix}$$

$$\det(A) = 2 + 5 - 9 - (10 - 3 + 3) = -12$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{matrix}$$

$$\det(A_1) = 4 - 12 - (-6 + 4) = -6$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{matrix}$$

$$\det(\tilde{A}_2) = 4 + 10 - (20 + 6) = -12$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{matrix}$$

$$\det(\tilde{A}_3) = 20 - 18 - (20 - 12) = -6$$

$$x_1 = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = +\frac{1}{2}$$

10.1b homogenes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

mit $b_1 = b_2 = \dots b_n = 0$

$\Rightarrow \det(\hat{A}_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots n \Rightarrow x_k \det(A) = 0$

Falls $\det(A) \neq 0 \Rightarrow x_k = 0 \quad \forall k$

Falls $\det(A) = 0 \Rightarrow$ nicht-triviale Lsg

$\det(A) = 0 \iff l$ Spalten (Zeilen) ergeben sich aus Linearkombination der anderen $m = n - l$ Spalten (Zeilen)

Umsortieren:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11} x_1 + \dots a_{1m} x_m & = & -(a_{1m+1} x_{m+1} + \dots a_{1n} x_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} x_1 + \dots a_{mm} x_m & = & -(a_{mm+1} x_{m+1} \dots a_{nn} x_n)
\end{array}
$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{mit } b_i = -\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j$$

Mit $\det(A') \neq 0$ gilt $x_k = \dfrac{\det(\tilde{A}_k')}{\det A'}$ $\quad k = 1, \dots m$

$\tilde{A}_k'$ ergibt sich aus $A'$ durch Ersetzen der Spalte $k$ durch $\vec{b}$.

Lsg enthält frei wählbare Parameter $x_{m+1}, \dots x_n$.

Bsp: $x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

$$4x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 16 & -4 \end{pmatrix} \times 4$$

$$\det(A) = 0$$

Umschreiben:

$$x_1 + 4x_2 = x_3$$

$$2x_1 - 3x_2 = -x_3$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \det(A') = -11$$

$$\tilde{A}'_1 = \begin{pmatrix} x_3 & 4 \\ -x_3 & -3 \end{pmatrix} \quad \det \tilde{A}'_1 = -3x_3 + 4x_3 = x_3$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_3 \\ 2 & -x_3 \end{pmatrix} \quad \det \hat{A}'_2 = -x_3 - 2x_3 = -3x_3$$

$$\left.\right\} \quad x_1 = \frac{x_3}{-11} \qquad x_2 = +\frac{3x_3}{11}$$

## 10.2. Die inverse Matrix: $A^{-1} = (a_{ij})^{-1} = (b_{ij})$

$$A \cdot A^{-1} = E \Longleftrightarrow$$

algebraisches Komplement:

Benutze: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, U_{ij}$ mit $U_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, U_{kj} = \delta_{ik} \cdot \det(A)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, \frac{U_{kj}}{\det(A)} = \delta_{ik} \quad \text{vgl.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, b_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\Longrightarrow \quad b_{jk} = \frac{U_{kj}}{\det(A)} = \underline{\frac{(-1)^{k+j} A_{kj}}{\det(A)} = b_{jk}}$$

Berechnung der Elemente der inversen Matrix

Bsp: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det(A) = ad - bc$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} (-1)^2 d & (-1)^3 b \\ (-1)^3 c & (-1)^4 a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} A = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & db-bd \\ -ca+ca & -cb+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 10.3. Lineare Gleichungen in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{b}$$

1) Sei $\det(A) \neq 0 \iff \exists\, \underline{\underline{A}}^{-1}$ mit $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{b}$$

2) Sei $\det(A) \neq 0$ und $\vec{b} = 0 \Longrightarrow \vec{x} = 0$

3) $\det(A) = 0$ und $\vec{b} = 0$ :

Umschreiben: $\underline{A}'\,\underline{x}' = -\underline{\underline{A}}''\,\underline{x}''$ mit $\det(A') \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{1\,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m\,m+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(m \times m) \cdot (m \times 1) \qquad (m \times (n-m)) \cdot ((n-m) \times 1)$$

$$\exists\ \underline{\underline{A}}'^{-1} \text{ mit } \underline{\underline{A}}'^{-1}\,\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{E}}$$

$$\Rightarrow \underline{x}' = \underline{\underline{A}}'^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}''\,\underline{x}''$$

# 11) Krummlinige Koordinaten

Ortsvektor $\vec{r}$ in kartesischen, ortsunabhängigen Koordinatensystem: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

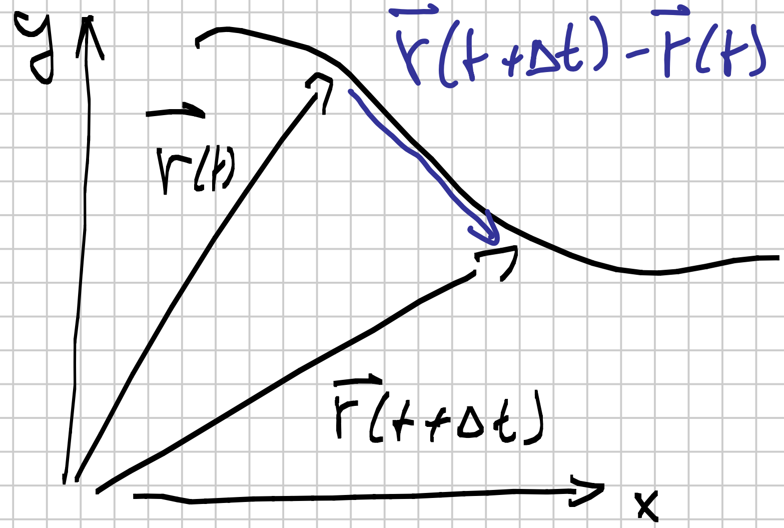
Sei $\vec{r}(t)$ eine Bahnkurve

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z$$

dann ergibt sich durch Ableitung nach der Zeit die

Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$ da $\vec{e}_i$ orthonormal. (konstant)




Differentiation:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

$$= \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Analog für die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

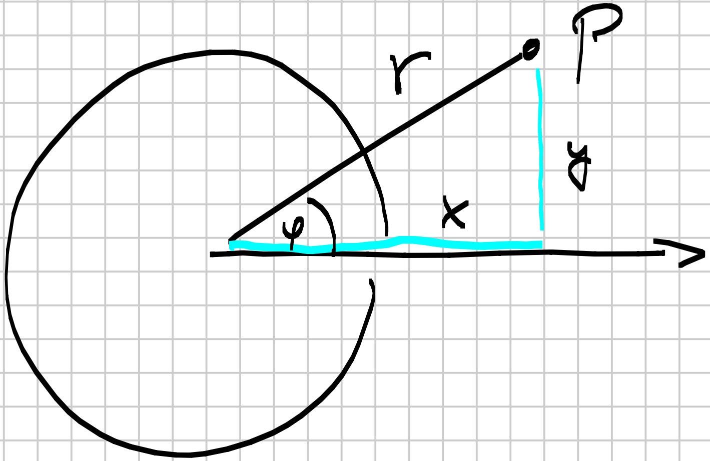
Umkehrung: $$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(\tau)\, d\tau$$
Integration

mit $$\int_0^t \vec{v}(\tau)\, d\tau = \vec{e}_x \int_0^t v_x(\tau)\, d\tau + \vec{e}_y \int_0^t v_y(\tau)\, d\tau + \vec{e}_z \int_0^t v_z(\tau)\, d\tau$$

und $$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(\tau)\, d\tau$$

## 11.1. Ebene Polarkoordinaten

Betrachte Kreisbewegung (Planetenbahn):




Kartesische Koord. Polarkoordinaten

$x, y$ $r, \varphi$

Darstellung der Ebene durch zwei Parameter

Transformationsgleichungen

$$x = r \cos\varphi \qquad 0 < r < \infty$$

$$y = r \sin\varphi \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Umkehrung: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Betrachte gleichförmige Kreisbewegung:

$r(t) = r_0 = \text{const.}\ ; \quad \varphi(t) = \omega \cdot t$ einfache Darstellung

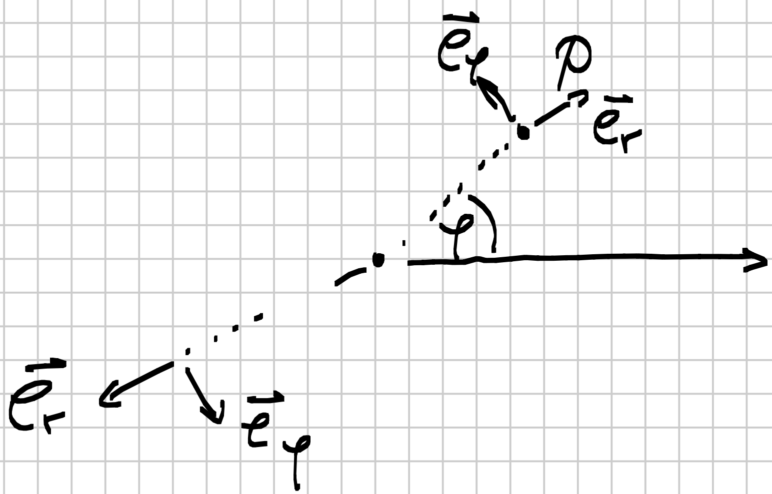
Gleichförmige geradlinige Bewegung in Polarkoord.

$$r(t) = \left( r_0^2 + 2 v r_0 t \cos(\alpha - \varphi_0) + v^2 t^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(t) = \arctan \left( \frac{vt \sin\alpha + r_0 \sin\varphi_0}{vt \cos\alpha + r_0 \cos\varphi_0} \right)$$

„komplizierte Darstellung"

# ortsabhängige Basisvektoren:




$$\vec{r} = r\cos\varphi \cdot \vec{e}_x + r\sin\varphi\,\vec{e}_y$$

Koordinatentransformation:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos\varphi\;\vec{e}_x + \sin\varphi\;\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\;\vec{e}_x + \cos\varphi\;\vec{e}_y \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}^{T} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\varphi \, \vec{e}_r - \sin\varphi \, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin\varphi \, \vec{e}_r + \cos\varphi \, \vec{e}_\varphi \end{aligned}}$$

lokale Basis $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$

Betrachte

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r \cdot \vec{e}_r) = \left(\frac{d}{dt} r\right) \cdot \vec{e}_r + r \left(\frac{d}{dt} \vec{e}_r\right)$$

$$= \dot{r} \, \vec{e}_r + r \, \dot{\vec{e}}_r$$

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_r = \underset{\text{Const.}}{\vec{e}_x} \cdot \frac{d}{dt} \cos(\varphi(t)) + \vec{e}_y \, \frac{d}{dt} \sin(\varphi(t))$$

$$= \vec{e}_x \, -\sin\varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + \vec{e}_y \, \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)$$

$$= \dot{\varphi}\,(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

gleichförmige Kreisbewegung: $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$

$$\vec{v} = \omega \cdot r\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = r\omega\,\vec{e}_z \times \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

und allgemein ($\dot{r} \neq 0$): $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$

Ebenso ergibt sich $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi)$

$$\vec a = \ddot r\, \vec e_r + \underbrace{\dot r\, \dot{\vec e}_r}_{\dot r \dot\varphi \vec e_\varphi} + \dot r\, \dot\varphi\, \vec e_\varphi + r\, \ddot\varphi\, \vec e_\varphi + \underbrace{r\, \dot\varphi\, \dot{\vec e}_\varphi}_{-r\dot\varphi^2 \vec e_r}$$

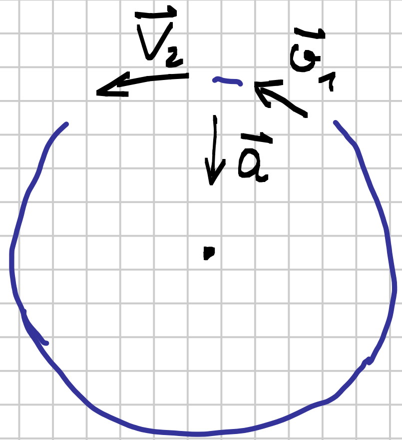
$$\vec a = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\, \vec e_r + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)\, \vec e_\varphi$$

Radialbeschleunigung $\ddot r$

Radialkomponente der Beschleunigung: $\ddot r - r\dot\varphi^2$ !

Gleichförmige Kreisbewegung: $\ddot{r} = \dot{r} = 0 \qquad \dot{\varphi} = \omega$

$$\ddot{\varphi} = 0$$




$$\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Corioliskraft: $F = m\vec{a} = m(\vec{\omega} \times \vec{v})$

$\Longrightarrow$ Manche Zusammenhänge in krummlinigen Koordinaten zu beschreiben.

## Zylinderkoordinaten: $(x, y, z) \longrightarrow (r, \varphi, z)$

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$

$z = z$

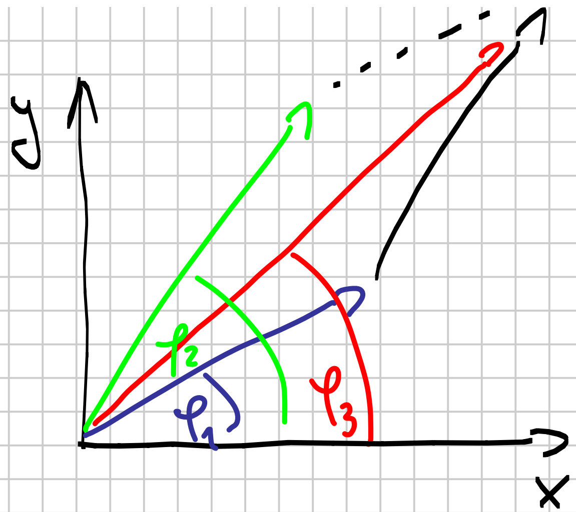
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{für } x \geq 0 \quad r > 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & x < 0 \quad r > 0 \\ \text{beliebig} & r = 0 \end{cases}$$

## Rechnen mit Zylinderkoordinaten

$\vec{a}_1 = (r_1, \varphi_1, z_1) \qquad \vec{a}_2 = (r_2, \varphi_2, z_2)$

Kartesische Basis $\quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} r_1 \cos\varphi_1 \\ r_1 \sin\varphi_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \cos\varphi \\ r_2 \sin\varphi \\ z_2 \end{pmatrix}$




$r_3 = \dots$

$\varphi_3 \neq \varphi_1 + \varphi_2$

- Skalare Multiplikation: $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{a} = (r, \varphi, z)$

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda r, \varphi, \lambda z)$$

- Skalarprodukt: $\vec{a}_1 = (r_1, \varphi_1, z_1)$ $\quad \vec{a}_2 = (r_2, \varphi_2, z_2)$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = r_1 \cdot r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdot \vec{e}_r^{\,2} + r_1 r_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \, \vec{e}_\varphi^{\,2} + z_1 z_2 \, \vec{e}_z^{\,2}$$

$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + z_1 z_2$$

$$= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + z_1 z_2$$

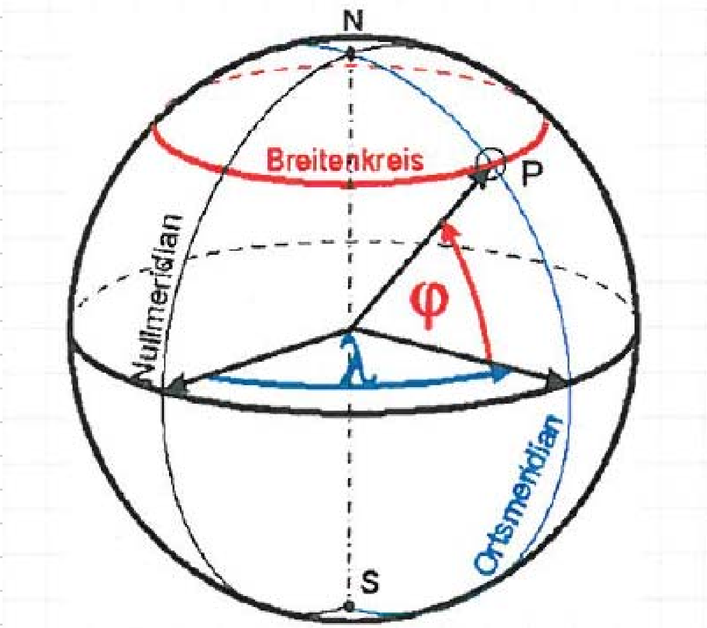
$$|\vec{a}| = \sqrt{r^2 + z^2} \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{a}_1 \, \vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + z_1 z_2}{\sqrt{r_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{r_2^2 + z_2^2}}$$

$\Rightarrow \alpha \neq \varphi_2 - \varphi_1$ (außer für $z = 0$)

$\Rightarrow$ Rechnen in krummlinigen Koordinaten (lokale Basis) oft mühsam

# Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten):

Bsp Kugeloberfläche (Erde)



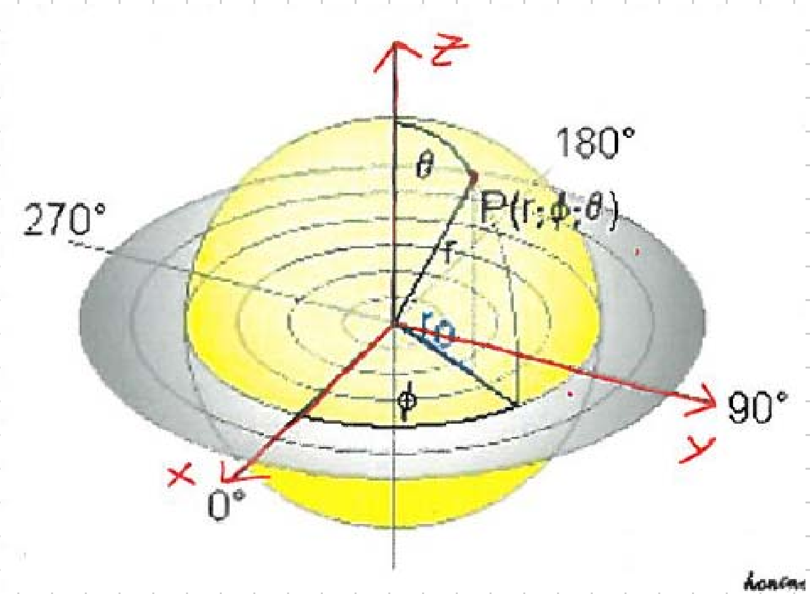

Koordinaten $(\lambda, \varphi)$

„Länge": $-180° \leq \lambda \leq 180°$

östliche bzw westliche Länge

„Breite": $-90° \leq \varphi \leq 90°$

südliche bzw nördliche Breite




$\vec{a} = (r, \phi, \theta) \qquad 0 \leq r < \infty$

Azimuthwinkel: $0 \leq \phi < 2\pi$

Polarwinkel : $0 \leq \theta < \pi$

$x = r \sin\theta \cos\phi$

$y = r \sin\theta \sin\phi$

$z = r \cos\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta = \arccos \frac{z}{r} \quad$ für $r > 0$

$$\phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ gleiche Problematik wie bei Zylinder Koordinaten

Winkel zwischen Vektoren i.a. nicht $\phi_2 - \phi_1$ bzw $\Theta_2 - \Theta_1$

$\Rightarrow$ Berechnen mit Skalarprodukt

Aber:

Einfache Darstellung des Gravitationsfeldes (Punktmasse)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{g}(\vec{r}) = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$