Mathematische Methoden

Johannes Berg
Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

16. November 2016

Inhaltsverzeichnis

Null

Fourierreihen

Periodische Funktionen lassen sich in Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen zerlegen, lassen sich also als eine (unendliche) Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen schreiben. Wir lernen die Koeffizienten dieser Reihe zu berechnen und interpretieren die Sinus- und Kosinusfunktionen als eine Basis, die den Vektorraum periodischer Funktionen aufspannt.

Viele periodische Funktionen lassen sich als Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktion schreiben, also als eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz. Diese Behauptung wurde 1807 von Joseph Fourier aufgestellt (er meinte sogar, jede periodische Funktion ließe sich als eine solche Reihe schreiben). Vorläufer der sogenannten Fourierreihen finden sich wohl aber schon in den Arbeiten babylonischer Astronomen.
Wir betrachten zunächst eine Funktion $f(x)$ mit Periode 2π, $f(x+2\pi) = f(x)\,\forall x$. (Durch Transformation der Variablen x lassen sich dann alle andere Perioden erreichen.) Die Funktionen $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$ mit $n \in \mathbb{N}$ haben alle Periode 2π, unterscheiden sich allerdings durch ihre kleinste Periode $2\pi/n$, oder durch die Wellenkreiszahl $k = n$. Der Ansatz

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad \frac{1}{2}\,a_0 \quad + \quad a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + a_3\cos 3x + \ldots \\ & \qquad\qquad\quad + \quad b_1\sin(x) + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

ist eine Überlagerung (Summe, Linearkombination) aller Sinus- und Kosinusfunktionen mit kleinster Periode $2\pi/n$, $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt **Fourierreihe** einer Funktion $f(x)$ mit Periode 2π. Die einzelnen Terme werden als **Fourierkomponenten** bezeichnet. Die sogenannten **Fourierkoeffizienten** $\{a_n, b_n\}$ sind noch zu bestimmen. Ebenso werden wir die Frage stellen, wann diese unendliche Reihe konvergiert, und ob ihr Grenzwert in der gesamten Domäne von $f(x)$ mit der Funktion übereinstimmt.

Info: Vergleichen Sie diesen Ansatz mit der Taylorreihe (**??**). Die Taylorreihe ist die Zerlegung einer Funktion $f(x)$ in unterschiedliche Potenzen von x, die Fourierreihe ist eine Zerlegung in Sinus- und Kosinusterme unterschiedlicher Frequenz. Gilt der Ansatz (1) für periodische Funktionen, lässt sich also die Information, welcher Funktionwert $f(x)$ jedem x zugeordnet ist, durch die (abzählbar) unendlich vielen Fourierkoeffizienten ausdrücken.

Anwendungen

- getriebener harmonische Oszillator mit periodischer Antriebskraft, siehe **??**. Da die DGL des harmonischen Oszillators linear ist, können wir die Lösung für eine beliebige periodische Inhomogenität finden, indem wir Linearkombinationen aus Lösungen für sinusförmige externe Antriebskraft bilden: Aus der Bewegungsgleichung (**??**) für den getriebenen harmonischen Oszillator folgt durch Zerlegung der externen Kraft in eine Fourierreihe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\, y(t) &= f(t) \qquad\qquad \text{mit } \mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + b\,\frac{d}{dt} + c \\ &= \frac{1}{2}a_0 + a_1\, \cos(t) + a_2\, \cos(2t) + \dots \\ &\qquad + b_1\, \sin(t) + b_2\, \sin(2t) + \dots \end{aligned} \tag{2}$$

  Mit (**??**) kennen wir die Lösungen der DGL für sinus/kosinusförmige externe Kraft unterschiedlicher Antriebsfrequenz $\mathcal{L}\, y_0(t) = 1,\ \mathcal{L}\, y_1^{(a)} = \cos t,\ \mathcal{L}\, y_2^{(a)} = \cos 2t,\ \dots,$ d.h. für die einzelnen Terme der Fourierreihe. Dann ist aufgrund der Linearität von $\mathcal{L}$ (einsetzen!) die Lösung von $\mathcal{L}\, y(t) = f(t)$

$$y(t) = \frac{1}{2}a_0 y_0(t) + a_1\, y_1^{(a)}(t) + a_2\, y_2^{(a)}(t) + \dots + b_1\, y_1^{(b)}(t) + b_2\, y_1^{(b)}(t) + \dots\ . \tag{3}$$

  Die Lösung der DGL mit allgemeiner (aber periodischer) Antriebskraft ergibt sich also durch Zerlegung der Antriebstkraft in ihre Fourierreihe. Die Lösung setzt sich als Linearkombination aus den Lösungen der DGL für sinus/kosinusförmige Antriebskraft zusammen, die Koeffizienten dieser Linearkombination sind die Koeffizienten der Fourierreihe.

- Anfangsbedingung der Wellengleichung zerlegt in die verschiedenen Moden der Gleichung, siehe **??**.

- In der Quantenmechanik spielt die Zerlegung der Wellenfunktion in Fourierkomponenten eine wichtige Rolle, da die Fourierkomponenten einen wohldefinierten Impuls haben.

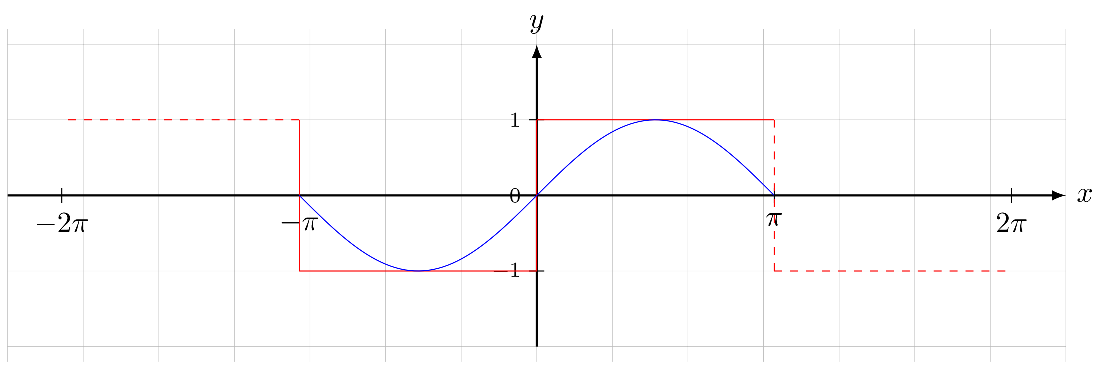
- Digitale Verfahren zur Speicherung von Audiodaten (z.B. das MP3-Format) zerlegen ein Audiosignal in Fourierkomponenten und behalten nur die Freuqenzen, die das menschlich Ohr auch wahrnehmen kann. Dieser Schritt (und viele weitere) reduzieren den nötigen Speicherplatz. Analoge Verfahren werden zur komprimierten Speicherung von Bildern genutzt (z.B. das JPEG-Format).

0.1 Fourierreihe der Rechteckfunktion

Die Berechnung der Koeffizienten der Fourierreihe lässt sich am besten zunächst an einem konkreten Beispiel zeigen. Wir betrachten die sogenannte Rechteckfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 \qquad & -\pi < x < 0 \\ f(x) &= +1 \qquad & 0 < x < \pi \end{aligned}$$

mit Periode 2π.



Unser Ziel ist die Koeffizienten der Fourierreihe für diese Funktion zu bestimmen

$$\begin{aligned} f(x) = &\frac{1}{2}a_0 + a_1\,\cos(x) + a_2\,\cos(2x) + \ldots \\ &+ b_1\,\sin(x) + b_2\,\sin(2x) + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

1. Bestimmung von a_0

Wir integrieren rechte und linke Seite von (4) über das Intervall $[-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\; f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}a_0 + a_1\,\cos x + a_2\,\cos 2x + \ldots + b_1\,\sin x + b_2\,\sin 2x \ldots\right]\,. \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{linke Seite} && \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x) = 0 && (6)\\
&\text{rechte Seite} && \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, \left[\frac{1}{2}a_0 + a_1\, \cos x + a_2\, \cos 2x + \ldots\, b_1\, \sin x + b_2\, \sin 2x \ldots\right] &&\\
& && = \frac{1}{2}\, 2\pi a_0 + a_1 0 + a_2 0 + \ldots b_1 0 + b_2 0 \ldots &&\\
& && = \pi a_0 \qquad \curvearrowright a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x) = 0 &&
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis ist nicht unerwartet: Da $\cos(kx), \sin(kx)$ im Mittel über eine oder mehrere Perioden Null sind, muss $a_0/2$ gleich dem Mittelwert von $f(x)$ über eine Periode sein.

2. Bestimmung von $a_n, b_n \qquad n > 0$

Wir werden die folgende Integrale benötigen

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \sin^2(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \cos^2(nx) = \frac{1}{2}\ 2\pi = \pi && (\text{da } \cos^2(nx) + \sin^2(nx) = 1)\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \sin(nx)\ \cos(mx) = 0 && n, m\ >\ 0\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \sin(nx)\ \sin(mx) = 0 && n \neq m\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \cos(nx)\ \cos(mx) = 0 && n \neq m \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Die letzten 3 Integrale lassen sich mit Hilfe der Eulerformel (**??**) leicht berechnen. Zum Beispiel $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \cos(nx)\ \cos(mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)\ \frac{1}{2}\left(e^{imx} + e^{-imx}\right)$. Durch Ausmultiplizieren erhält man vier Terme, die alle von der Form sind

$$
\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ e^{ilx} = \frac{1}{il}\left[e^{ilx}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{il}\left(e^{il\pi} - e^{-il\pi}\right) = \frac{2}{l}\sin(l\pi) = 0 \ \ \forall\, l = \pm n \pm m \neq 0. \qquad (8)
$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten der Kosinusterme a_n multiplizieren wir nun rechte und linke Seite von (4) mit $\cos(nx)$ und integrieren wieder über $[-\pi, \pi]$

$$
\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \cos(nx) f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \cos(nx)\left[\frac{1}{2}a_0 + a_1\, \cos x + a_2\, \cos 2x + \ldots + b_1\, \sin x + b_2\, \sin 2x \ldots\right]. \qquad (9)
$$

Von der linken Seite erhalten wir $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ \cos(nx) = 0$, da (hier) $f(x)$ eine ungerade Funktion von x ist, $\cos(nx)$ aber gerade ist; der Integrand ist also eine ungerade Funktion, integriert über ein symmetrisches Interval erhalten wir null.

Auf der rechten Seite stehen Integrale über $\cos(nx)$, $\cos(nx)\cos(mx)$, und $\cos(nx)\sin(mx)$. Nach (7) integrieren alle diese Terme zu null, bis auf einen einzelnen Term $\cos(nx)\cos(mx)$ mit $n = m$, der $a_n \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \cos^2(nx) = a_n \pi$ ergibt. Daraus erhalten wir den Koeffizienten a_n als

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \cos(nx) f(x) = a_n\,\pi \qquad \curvearrowright a_n = 0 \qquad \forall\, n > 0\ . \tag{10}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten der Sinusterme b_n gehen wir analog vor und multiplizieren wir rechte und linke Seite von (4) mit $\sin(nx)$ und integrieren wieder

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \sin(nx) f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \sin(nx) \left[\frac{1}{2} a_0 + a_1\ \cos x + a_2\ \cos 2x + \ldots + b_1\ \sin x + b_2\ \sin 2x \ldots\right] . \tag{11}$$

Von der linken Seite erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \sin(nx) f(x) = -\int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}x\ \sin(nx) + \int_{0}^{\pi} \mathrm{d}x\ \sin(nx) \\
&= 2 \int_{0}^{\pi} \mathrm{d}x\ \sin(nx) = -2 \left[\frac{1}{n}\ \cos(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} \frac{4}{n} & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

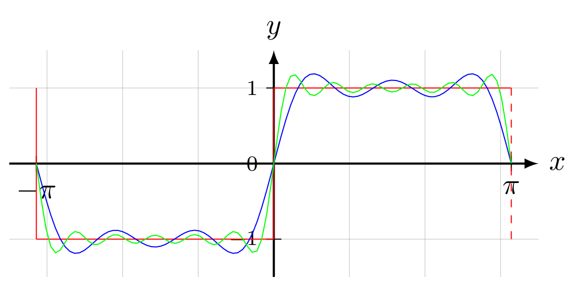
Von der rechten Seite integrieren wieder alle Terme zu Null, bis auf den Term $\sin(nx)\sin(mx)$ mit $n = m$, er gibt $b_n \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \sin^2(nx) = \pi b_n$. Damit ist

$$b_n = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{4}{\pi n} & \text{wenn n ungerade} \\ 0 & \text{wenn l gerade.} \end{array} \right.$$

somit ist die Fourierreihe der Rechteckfunktion

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right) \tag{12}$$

Die ersten 3 und die ersten 6 Terme dieser Reihe sind in blau und grün gezeigt.



0.2 Fourierkoeffizienten einer allgemeinen periodische Funktion

Zur Darstellung einer Funktion mit allgemeiner Periode $2L$ im Intervall $[-L, L]$ gehen wir analog vor. Die Argumente der Sinus- und Kosinusfunktionen der Fourierreihe sind um einen Faktor π/L gestreckt

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\frac{\pi x}{L}) + a_2 \cos(\frac{2\pi x}{L}) + a_3 \cos(\frac{3\pi x}{L}) + \cdots \\ + b_1 \sin(\frac{\pi x}{L}) + b_2 \sin(\frac{2\pi x}{L}) + \cdots \ , \end{aligned} \tag{13}$$

so dass jetzt das Intervall $[L, L]$ ein ganzes Vielfaches der Periode der Sinus- und Kosinusfunktionen ist.

Berechnung von a_0
Wir multiplizieren (13) mit 1 und integrieren über das Intervall $[-L, L]$. Die Sinus und Kosinusterme integrieren zu Null, es bleibt

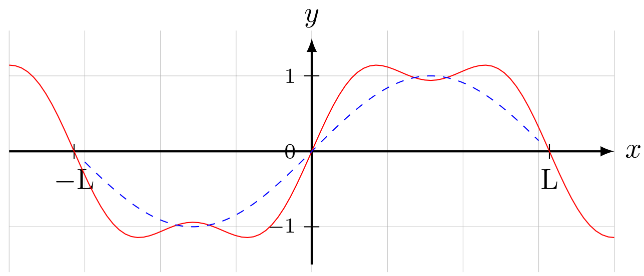
$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} dx f(x) &= \left(\frac{1}{2}a_0\right) \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x\, 1 = \frac{1}{2}a_0 \times 2L = a_0 L \\ \curvearrowright \quad a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x\, f(x) \end{aligned} \tag{14}$$

Berechnung von a_n, b_n $(n > 0)$
Wir multiplizieren (13) mit $\cos(\frac{\pi n x}{L})$, bzw. $\sin(\frac{\pi n x}{L})$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x \ \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) f(x) &= a_n \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x \ \cos^2\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \\ &\overset{x'=\frac{\pi x}{L}}{=} a_n \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x' \cos^2(nx') = a_n \frac{L}{\pi}\frac{1}{2} \times 2\pi = a_n L \\ \curvearrowright a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x \ \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) f(x) \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x \ \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) f(x) \end{aligned} \tag{15}$$

Intuitiv

Die Formeln für die Koeffizienten der Fourierreihe lassen sich als Maß für die Ähnlichkeit zwischen der Funktion $f(x)$ und den Termen der Fourierreihe interpretieren. Z.B. gibt das Integral zur Bestimmung von b_n an, wie “ähnlich” $f(x)$ der Funktion $\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$ ist; ist $f(x)$ dort positiv, wo auch die Kosinus-Funktion positiv ist ergibt das einen positiven Beitrag zum Integral.



$\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x\ f(x)\ \sin \frac{\pi x n}{L}$ wird daher als **Überlapp** der Funktion $f(x)$ und der Funktion $\sin \frac{\pi x n}{L}$ bezeichnet. Terme der Fourrierreihe mit großem Überlapp mit $f(x)$ haben dann entsprechend große Koeffizienten. Diese Interpretation der Ergebnisse (15) lässt sich im Rahmen des folgenden Bildes noch vertiefen.

Interpretation von Funktionen als Elemente eines Vektorraumes

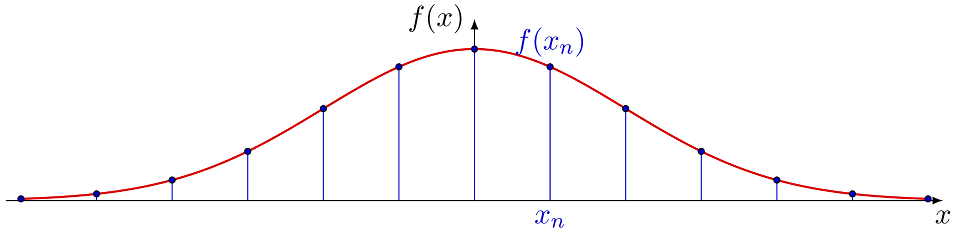
Funktionen lassen sich addieren und mit Zahlen multiplizieren, das Ergebnis ist wieder eine Funktion. Funktionen bilden also einen Vektorraum. Betrachten wir $f(x)$ als Element eines Vektorraumes, der aus Funktionen mit Periode $2L$ besteht, kann man $1, \cos \frac{\pi x l}{L}, \sin \frac{\pi x l}{L}$ als seine Basisvektoren auffassen.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \cdots \\ \text{Vergl. } \vec{v} &= v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 \cdots \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x\, f(x)\, \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x\, f(x)\, \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \\ \text{Vergl. } v_i &= \vec{e}_i \cdot \vec{v} \end{aligned} \tag{17}$$

Die auftretenden Integrale können als Verallgemeinerung des euklidischen Skalarproduktes $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + \cdots = \sum_i v_i w_i$ mit $\sum_i \longrightarrow \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x$ aufgefasst werden. Dabei ist es hilfreich eine (beliebige) Funktion $f(x)$ als Vektor $\mathbf{f}$ mit Komponenten $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ zu denken. Je enger die Stützstellen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ liegen, desto besser beschreibt dieser Vektor die Funktion $f(x)$. Das euklidische Skalarprodukt zweier solcher

Vektoren **f** und **g** ist $f(x_1)g(x_1)+f(x_2)g(x_2)+f(x_3)g(x_3)+\ldots$. Multipliziert man mit dem Abstand der Stützstellen Δx erhält man im Grenzfall $\Delta x \to 0$ das Integral $\int \mathrm{d}x f(x)g(x)$.



Die Integrale (7) zeigen außerdem, dass die Kosinus- und Sinusfunktionen unterschiedlicher Wellenzahl n nach diesem Skalarprodukt orthogonal sind. (17) kann dann verstanden werden als Bestimmung der Koeffizienten der Basisvektoren $\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right), \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ durch Berechnung des Skalarproduktes zwischen $f(x)$ und $\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$ bezw. $\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$, analog zu (**??**).

0.2.1 Konvergenz der Fourierreihe: Die Dirichlet Bedingung

Die Fourierreihe hatten wir als einen Ansatz konstruiert, (1) enthält alle Terme die mit der Periode einer Funktion kompatibel sind. Aber lässt sich wirklich jede periodische Funktion als Fourierreihe darstellen? Wann und wo ist eine allgemeine periodische Funktion $f(x)$ gleich ihrer Fourierreihe?
Die allgemeinste Anwort gibt folgendes Theorem: Sei $f(x)$ im Intervall $[-L, L]$ quadratintegrabel, d.h. $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x|f(x)|^2$ ist endlich, dann ist an fast allen Punkten x $f(x)$ gleich seiner Fourierreihe.
Von Lennart Carleson 1966 (!) bewiesen, gilt dieser Satz als einer der Höhepunkte der Analysis des letzten Jahrhunderts. An fast allen Punkten bedeutet (grob) überall, außer möglicherweise an einzelnen isolierten Punkten. Welche einzelnen Punkte problematisch sein können, sagt die Dirichlet- Bedingung (1829), die hier ebenso ohne Beweis zitiert wird: Ist $f(x)$ periodisch mit Periode $2L$, absolut integrierbar, d.h. $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x|f(x)|$ ist endlich, nach oben und unten beschränkt und lässt sich in endlich viele Intervalle zerlegen, in denen $f(x)$ stetig und monoton ist und existiert an den Intervallgrenzen rechter und linker Grenzwert f_+ und f_-, dann konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ punktweise gegen

$$\begin{array}{ll} f(x) & \text{wenn } f \text{ in } x \text{ stetig ist} \\ (f_- + f_+)/2 & \text{wenn } f \text{ in } x \text{ nicht stetig ist.} \end{array}$$

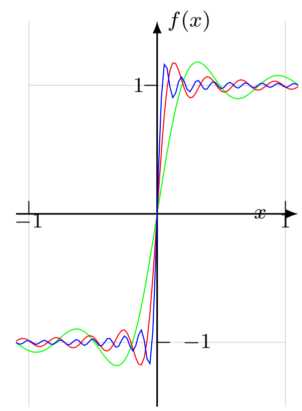
Wenn $f(x)$ in einer Periode also eine *endliche* Zahl von Maxima, Minima oder Sprüngen aufweist, konvergiert die Fourierreihe. An einer Sprungstelle konvergiert die Fourierreihe zum arithmetischen Mittel der Funktion rechts und links der Sprungstelle. *Definiert* man den Wert von $f(x)$ am Punkt x des Sprunges z.B. gleich dem rechten Grenzwert, konvergiert die Fourierreihe dennoch zu $(f_- + f_+)/2$. Dann ist $f(x)$ an fast allen Punkten gleich seiner Fourierreihe, nämlich überall außer am Punkt des Sprunges x.

Das Gegenteil des Satzes von Dirichlet gilt übrigens nicht; es gibt Funktionen die die Dirichlet-Bedingung verletzen und dennoch konvergente Fourierreihen haben.

0.2.2 Das Gibbs-Phänomen

Approximiert man $f(x)$ durch eine endliche Fourierreihe, bricht also den Ansatz (1) nach einer endlichen Zahl von Termen ab, beobachtet man in der Nähe von Sprüngen deutliche Abweichungen zwischen $f(x)$ und der endlichen Reihe. Die Rechteckfunktion ist ein gutes Beispiel, die Abbildung zeigt die Summer der ersten 20 und 50 Terme der Reihe (12)

Die Abbildung zeigt die ersten 5 Terme (grün), 12 Terme (rot) und 25 Terme (blau) der Fourierreihe der Recheckfunktion (12) in der Nähe des Sprungs bei $x = 0$. Wir bebachten ein **Überschwingen** der endlichen Fourierreihe; in der Nähe von Sprüngen sind die Ausschläge der endlichen Reihe größer als der eigentliche Sprung. Das liegt daran, dass bei *endlichen* Frequenzen $k = n\pi/L$ eine große Steigung in einem bestimmten Bereich von x einhergeht mit einer großen Amplitude. Die endliche Fourierreihe erkauft also den korrekten Wert der Steigung am Sprung mit einer Abweichung zwischen der endlichen Reihe und $f(x)$ kurz vor und hinter dem Sprung selbst.



Die Überschwing-Breite nimmt mit zunehmendender Zahl der Terme in der Fourierreihe ab (geht gegen Null), die Überschwing-Amplitude bleibt jedoch endlich.

Info: Nutzt man die Fourierreihe zur Darstellung eines Bildes ($f(x, y)$ beschreibt z.B. Grauwerte), führt das Gibbs-Phänomen in der Nähe von scharfen Kontrastgrenzen zu sogenannten "ringing artefacts" (`http://en.wikipedia.org/wiki/File:Asterisk_with_jpg-artefacts.png`). Ein Analogon in der Klangverarbeitung sind sogenannte "pre-echos", die als Artefakte bei Aufnahmen von Perkussionsinstrumenten in MP3-Dateien auftreten, ein Beispiel finden sie auf `http://en.wikipedia.org/wiki/Pre-echo` .

Wer selbst mit der Fourierreihe experimentieren möchte, sei auf Wolfram Alpha (`www.wolframalpha.com`) verwiesen. Der Befehl `4/Pi Sum[1/n Sin[n x],n,1,9,2]` in das Eingabefenster eingegeben zeigt das Ergebnis der Reihe (12) bis zum Term $1/9 \sin(9x)$.

0.2.3 Die komplexe Fourierreihe

Die Euler-Formel (**??**) führt auf eine weitere, einfache und kompakte Form der Fourierreihe. Wir beschränken uns wieder auf Funktionen mit Periode 2π. Aus der Euler-Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ erhalten wir $\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$ und $\sin(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} - e^{-inx})$. Setzt man diese Ausdrücke in die Fourierreihe (1) ein erhält man

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + c_{-2}e^{-2ix} + \dots \tag{18}$$

mit $\frac{1}{2}a_0 = c_0$, $\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = c_n$ und $\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = c_{-n}$ für $n > 0$.
Wenn $f(x)$ reell ist, erhalten wir ausserdem $c_{-n} = c_n^*$, denn dann ist $c_n e^{ixn} + c_{-n}e^{-inx} = c_n e^{ixn} + c_n^* e^{-inx} \in \mathbb{R}$, d.h. der Beitrag der Terme n und $-n$ zur Fourierreihe ist eine reelle Zahl.
Die Koeffzienten c_n können auch direkt aus der Funktion $f(x)$ bestimmt werden, die Berechnung folgt dem Schema von (15), ist allerdings erheblich einfacher.

Berechung von c_0

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x f(x) &= c_0 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x 1 = 2\pi c_0 \\ \curvearrowright \quad c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x f(x)\ . \end{aligned} \tag{19}$$

Berechung von $c_n, n \neq 0$
Wir multiplizeren (18) mit e^{-inx} und integrieren über das Intervall $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}x f(x) e^{-inx} &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x e^{-inx}\left[c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + c_{-2}e^{-2ix} + \dots\right] = c_n \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi c_n \\ \curvearrowright \quad c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x f(x) e^{-inx} \end{aligned} \tag{20}$$

Damit ist die komplexe Fourierreihe

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ixn} \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ e^{-inx} f(x)\ . \end{aligned} \tag{21}$$

Die Interpretation des Integrals (21) als Skalarprodukt impliziert (Minuszeichen in e^{-inx}!) für komplexe Funktionen

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x f^*(x) g(x)\ . \tag{22}$$

Diese Definition des Skalarproduktes für komplexe Argumente stellt sicher, dass das Quadrat der Norm eines komplexwertigen Vektors (hier einer Funktion) stets nicht-negativ ist, $\langle f, f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2$, und dass der einzige Vektor mit Norm Null die Nullfunktion $f(x) = 0\,\forall x$ ist.

0.2.4 Der Satz von Parseval

Der Satz von Parseval verbindet die Norm $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x|f(x)|^2$ mit dem Betragsquadraten der Fourierreihe von $f(x)$. Wir gehen aus von der komplexen Form der Fourierreihe $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, bilden von beiden Seiten das Betragsquadrat und integrieren über eine Periode

$$\text{links:} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x|f(x)|^2 \tag{23}$$

$$\text{rechts:} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^* e^{-imx}\right) \tag{24}$$

$$= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_n c_m^* \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, e^{inx-imx} \tag{25}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2\, 2\pi\ , \tag{26}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, e^{imx} \overset{m\neq 0}{=} 0$ genutzt haben, s. (8). Setzen wir linke und rechte Seite gleich, erhalten wir **Parsevals Theorem**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x|f(x)|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2\ . \tag{27}$$

Mit der Interpretation von $f(x)$ als Vektor, und dem Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren (22) ist die linke Seite von Parsevals Theorem das Quadrat der Norm von $f(x)$, die rechte Seite ist die Summe der Quadrate der Komponenten von $f(x)$ in einer quadratischen Basis, analog zu $||\mathbf{v}||^2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots$.

0.3 Die Fouriertransformation

Ausgangspunkt der Fourierreihe (1) war eine Überlagerung aus allen trigonometrischen Funktion die im Intervall 2π, bezw. L periodisch sind. Das Ergebnis waren Fourierkoeffizienten a_n und b_n (bezw. c_n für die komplexe Reihe). Diese Koeffizienten geben an, wie stark eine Oszillation mit Kreisfrequenz $k = n\pi/L$ ($n \in \mathbb{N}$) in der Fourierreihe vertreten ist.

Natürlich sind nicht alle interessanten oder relevanten Funktionen periodisch und wiederholen sich nach einem endlichen Intervall $2L$. Betrachtet man die Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx\frac{\pi}{L}} \tag{28}$$

einer Funktion mit großer Periode $2L$, dann liegen die Kreisfrequenzen $k = n\pi/L$ umso dichter, je größer die Periode ist. Um nicht-periodische Funktion zu beschreiben, machen wir einen Ansatz analog zur Fourierreihe (28), bei dem die Kreisfrequenzen allerdings dicht im Frequenzraum liegen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\; c(k)\; e^{ikx}\;. \tag{29}$$

Dieser Ansatz kann als Überlagerung der e^{ikx} *für beliebige Kreisfrequenzen* k verstanden werden. Die Funktion $c(k)$ gibt an, wie stark eine Kreisfrequenz k in (29) vertreten ist. Im Gegensatz zur Fourierreihe einer periodischen Funktion gibt es im Allgemeinen aber keine niedrigste Frequenz $k = \pi/L$ unterhalb der $c(k)$ verschwindet, und die Kreisfrequenzen k in (29) sind im Allgemeinen auch keine Multiplen einer solchen niedrigsten Frequenz.

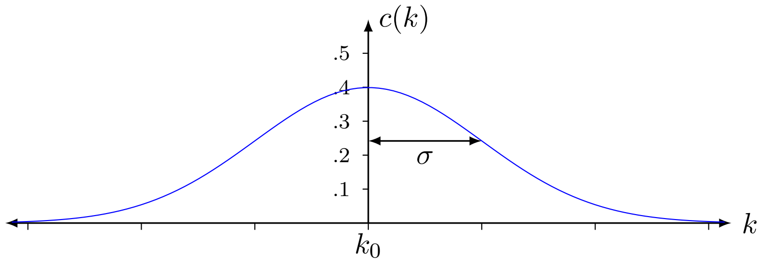
$\tilde{f}(k) \equiv c(k)$ heißt **Fouriertransformierte** von $f(x)$. Wie bei der Fourierreihe ist noch zu klären, für welche Funktionen $f(x)$ eine solche Fouriertransformierte $\tilde{f}(k)$ existiert.

Das Gaußsche Wellenpaket

Um den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Fouriertransformierten (FT) zu verstehen, betrachten wir zunächst ein konkretes Beispiel

$$c(k) = \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\; e^{-\frac{1}{2}(k-k_0)^2/\sigma^2} \tag{30}$$

Diese sogenannte **Gaußsche Normalverteilung** beschreibt eine Verteilung der unterschiedlichen Wellenzahlen k mit Mittelwert k_0. Der Parameter σ gibt an, wie breit die Verteilung ist, bei kleinen Werten von σ ist $c(k)$ stark um k_0 herum lokalisiert, d.h. bei Werten von k weitab von k_0 ist $c(k)$ klein. In diesem Beispiel leisten Oszillation mit Wellenzahl $k = k_0$ den größten Beitrag zur Funktion $f(x)$.



Ziel ist es, die Funktion $f(x)$ zu dieser konkreten Fouriertransformierten $\tilde{f}(k) = c(k)$ zu berechnen. Mit (29) ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; e^{ikx} \; \tilde{f}(k) \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; \exp\left\{ ikx - \frac{1}{2\sigma^2}(k-k_0)^2 \right\} \; . \tag{32}$$

Das Argument der Exponentialfunktion lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} ikx - \frac{1}{2\sigma^2}(k-k_0)^2 &= -\frac{1}{2\sigma^2}(k^2 - 2k_0 k + k_0^2 - 2i\sigma^2 kx) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(k^2 - 2k[k_0 + i\sigma^2 x] + [k_0 + i\sigma^2 x]^2 - [k_0 + i\sigma^2 x]^2 + k_0^2\right) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(k - [k_0 + i\sigma^2 x]\right)^2 + ik_0 x - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \end{aligned}$$

Mit dieser sogenannten **quadratischen Ergänzung** ist

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(k - [k_0 + i\sigma x])^2 \right\} \times e^{ik_0 x - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2} \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \; e^{ik_0 x - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k' \; e^{-\frac{1}{2}k'^2} \; , \tag{34}$$

wobei wir im letzten Schritt die Variablentransformation $k' = (k - [k_0 + i\sigma x])/\sigma$ durchgeführt haben.

Info: Der letzte Schritt ist die Auswertung des Integrals über k'. Integrale über die Gaußsche Normalverteilung lassen sich mithilfe des folgenden Tricks berechnen: wir berechnen zunächst das Quadrat des Integrals, also

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; dy \; e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\phi \; r \; e^{-\frac{1}{2}r^2} = 2\pi[-e^{-\frac{1}{2}r^2}]_0^{\infty} = 2\pi \tag{35}$$

Im dritten Schritt haben wir zu Polarkoordinaten $x = r \; \cos\phi, y = r \; \sin\phi$ gewechselt. In kartesischen Koordinaten ist der Flächeninhalt eines kleinen Rechtecks mit Kantenlängen Δx und Δy das Produkt $\Delta x \; \Delta y$. Das durch eine kleine Änderung des Winkels ϕ

und des Radius r definierte (näherungsweise) Rechteck hat die Fläche $r\Delta\phi\ \Delta r$, woraus sich der zusätzliche Faktor r im Integral ergibt. Damit ist $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}$ und $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int \mathrm{d}x\ ; e^{-x^2/(2\sigma^2)} = 1$.
Nach Auswertung des Integrals über k' in (33) erhalten wir

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + ik_0 x\right\} \tag{36}$$

Diese Überlagerung $f(x)$ von Oszillationen unterschiedlicher Frequenzen, bei denen $c(k)$ der Gaußverteilung folgt, heiß Gaußsches Wellenpaket. Für $k_0 = 0$ ist $f(x)$ auch wieder eine Gauß-Kurve, mit Maximum bei $x = 0$. Allerdings ist die Breite nun durch σ^{-1} gegeben; je breiter die Verteilung der Wellenzahlen $c(k)$, desto schmaler ist also die Funktion $f(x)$, und umgekehrt. Bei endlichem k_0 oszilliert $f(x)$ mit Wellenzahl k_0, die Amplitude dieser Oszillation fällt mit $e^{\sigma^2 x^2/2}$ ab. Im Fall $\sigma = 0$ beschreibt $f(x)$ ungedämpfte Oszillationen mit Wellenzahl k_0 (so wie wir es für ein scharf bei k_0 lokalisertes $c(k)$ auch erwarten).

Die δ-Funktion

Im Fall von großen Werten von σ ist $c(k)$ in (30) eine breite Verteilung, die Funktion $f(x)$ in (31) enhält also Beiträge von vielen unterschiedlichen Wellenzahlen k. Wir betrachten den Fall großer Werte von σ für $\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}$

$$f(x) = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}k\ e^{ikx - \frac{1}{2\sigma^2}k^2} = \lim_{\sigma\to\infty} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 x^2} \quad \text{“} \equiv \delta(x)\text{”} \tag{37}$$

$\delta(x)$ ist eine “Funktion”, die überall Null ist, bis auf $x = 0$. Dennoch ist das Integral von $\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 x^2}$ für beliebige σ gleich 1 und damit $\int \mathrm{d}x\ \delta(x) = 1$.
$\delta(x)$ wird als **Delta-Funktion** bezeichnet, obwohl $\delta(x)$ bei $x = 0$ unendlich ist (und sonst überall null) und damit keine wohldefinierte Funktion ist. $\delta(x)$ wird verwendet um die Dichte punktförmiger Objekte zu beschreiben, z.B. die Masseverteilung einer Punktmasse bei $x = 0$, oder die Ladungsverteilung einer Punktladung. Deren Masse- oder Ladungsdichte ist überall Null, bis auf einen Punkt, ebenso ist das Integral über die Dichte endlich. Wir können die δ-Funktion als ein Objekt auffassen, das nur innerhalb eines Integrals Sinn macht. Bei einzelnen Rechenschritten mag das Integral dann unterschlagen werden, so dass man in der Praxis mit $\delta(x)$ wie mit einer Funktion rechnet. Zentrale Eigenschaft ist $\delta(x) = 0$ überall ausser bei $x = 0$ und $\int \mathrm{d}x\ ; \delta(x) = 1$, und damit für eine Funktion $g(x)$ $\int \mathrm{d}x\ \delta(x) g(x) = \int \mathrm{d}x\ ; \delta(x)[g(0) + xg'(x) + \ldots] = g(0)$.
Info: Der mathematisch korrekte Zugang basiert auf sogenannten **Funktionalen**, Abbildungen von Funktionen auf Zahlen. Ein Beispiel für ein Funktional ist die Abbildung von der Funktion $f(x)$ auf die Zahl $\int \mathrm{d}x f(x) g(x)$ (bei gegebener Funktion $g(x)$). Das δ-Funktional ist die Abbildung von $f(x)$ auf die Zahl $f(0)$.

0.3.1 Fouriertransformation und inverse Fouriertransformation

Wir nutzen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\; e^{ik(x-x_0)} &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\; e^{-\frac{1}{2}\sigma^2k^2+ik(x-x_0)} \\ &= \lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_0)^2\right\}\end{aligned}$$

als Integraldarstellung von $\delta(x-x_0)$, also einer δ-Funktion, die überall Null ist bis auf x_0. Damit zeigen wir nun, dass $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\; e^{-ikx}\; f(x)$ die Fouriertransformierte von $f(x)$ ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\; e^{ikx}\;\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\; e^{ikx}\;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\; e^{ikx'}\; f(x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\; f(x')\;\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}k\; e^{ik(x-x')}}_{\delta(x-x')} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\; f(x')\;\delta(x-x') = f(x)\;.\end{aligned}$$

Die Fourier-Transformation von $f(x)$ zu $\tilde{f}(k)$ und die inverse Fouriertransformation von $\tilde{f}(k)$ zu $f(x)$ zeichnen sich also durch eine hohes Maß an Symmetrie aus

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\; e^{-ikx}\; f(x) \tag{38}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\; e^{ikx}\;\tilde{f}(k)\;. \tag{39}$$

Diese Ausdrücke sind das Analogon zur komplexen Fourierreihe (21). In der Tat ist mit (38) die Fouriertransformierte von $e^{ik'x}$ die δ-Funktion $\delta(k-k')$, und die Fouriertransformierte einer periodischen Funktion eine Reihe von δ-förmigen Maxima bei $\pi/L, 2\pi/L, 3\pi/L, \ldots$. Durch die Definition (29) treten in beiden Ausdrücken an gleicher Stelle Faktoren von $(2\pi)^{-1/2}$ auf. Nicht alle Lehrbücher folgen dieser Konvention, manche Texte definieren $(2\pi)^{-1/2}\tilde{f}(k)$ als die Fouriertransformierte von $f(x)$.

0.3.2 Anwendungen

Kern aller (?) Anwendungen der Fourier-Transformation in der Physik ist die Eigenschaft, dass die Fourier-Transformation von $\frac{df}{dx} = f'(x)$ gleich $ik\;\tilde{f}(k)$ ist.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left(\frac{d}{dx} f(x)\right) e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\Big[f(x)\, e^{-ikx}\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{\hookrightarrow 0,\ \text{wenn } f(x) \text{ quadratintegrabel}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x\, f(x)\, \frac{d}{\mathrm{d}x}\, e^{-ikx}$$

$$= \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\, e^{-ikx} = ik\, \tilde{f}(k)$$

Damit ist auch die FT der n-ten Ableitung von $f(x)$ gleich $(ik)^n \tilde{f}(k)$. Ableitungen von $f(x)$ sind also rein algebraische Operationen der Fouriertransformierten. *Lineare* Differentialgleichungen lassen sich also durch FT leicht lösen.

Beispiel

Wir lösen die DGL

$$f'' + b\, f' + c\, f(x) = g(x) \tag{40}$$

für eine allgemeine Funktion $g(x)$. Interpretieren wir x als die Zeit, erhalten wir die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators mit zeitabhhängiger Antriebskraft $g(x)$. Für $g(x) = e^{-ikx}$ (periodische Antriebskraft) hatten wir in Sektion **??** diese Gleichung bereits gelöst.
Fourier-Transformation von rechter und linker Seite dieser Gleichung ergibt

$$-k^2\, \tilde{f}(k) + ikb\, \tilde{f}(k) + c\, \tilde{f}(k) = \tilde{g}(k) \qquad \curvearrowright \tilde{f}(k) = \frac{\tilde{g}(k)}{c + ikb - k^2} \tag{41}$$

Die inverse Fourier-Transformation von $\tilde{f}(k)$ ergibt nun die gesuchte Lösung $f(x)$ der Differentialgleichung.
Den Nenner $c + ikb - k^2$ in diesem Ergebnis haben wir bereits in der Lösung des getriebenen harmonischen Oszillators (**??**) gesehen. Dies ist kein Zufall, die Fouriertransformation zerlegt $g(x)$ in eine Kombination von von Oszillationen mit Wellenzahl k, für jede einzelne Wellenzahl löst (41) die Bewegungsgleichung, die inverse Fourier-Transformation von $\frac{\tilde{g}(k)}{c+ikb-k^2}$ setzt die Beiträge von jeder Oszillationsfrequenz zur speziellen Lösung der Bewegungsgleichung für ein gegebenes $g(x)$ zusammen.