Mathematische Methoden

Johannes Berg
Institut für Biologische Physik
Universität zu Köln

January 29, 2019

Contents

Überblick

"Let me end on a more cheerful note. The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning." (Eugene Wigner)

Diese Vorlesung gibt eine Einführung in mathematische Methoden, derer sich die Physik (und viele weitere Wissenschaften) bedient. Dabei nutzt die Physik mathematische Methoden durchaus auch als Handwerkszeug, also um Rechenmethoden für ein konkretes Problem zu finden. Wichtiger noch ist aber die Suche nach dem passenden mathematischen Formalismus um bestimmte physikalische Sachverhalte zu beschreiben. Ein Beispiel ist das zweite Newtonsche Gesetz $\vec{F} = m\vec{a}$. Implizit in diesem Formulierung ist die Annahme, dass die Kraft $\vec{F}$ und die Beschleunigung $\vec{a} \equiv d^2\vec{x}/dt^2$ Vektoren (im Ortsraum) sind[1]. Gemeinsam bilden sie eine Differentialgleichung $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$, ihre Lösung $\vec{x}(t)$ sagt die Bahnkurve voraus, die ein Teilchen unter dieser Kraft nimmt. Ohne Kenntnis von Differentialgleichungen und Vektoren lässt sich diese grundlegende Gleichung der Mechanik nicht verstehen.
Dabei treten oft dieselben mathematischen Konzepte in unterschiedlichen physikalischen Zusammenhängen auf. Hier ein kurzer Überblick verschiedener Teilgebiete der Physik und verwandter Gebiete, jeweils mit den mathematischen Methoden, die dort Verwendung finden.

1. Mechanik: *Differentialgleichungen (DGL)*, *Vektorrechung*
2. Elektromagnetismus: *DGL, Vektoranalysis*
3. Quantenmechanik: *DGL, lineare Algebra, komplexe Zahlen*
4. Relativitätstheorie und Kosmologie: *Vektoren und Tensoren, Differentialgeometrie*
5. Teilchenphysik und Quantenfeldtheorie: Gruppentheorie, *lineare Algebra*, *Funktionentheorie*, ...
6. Meteorologie: *DGL, lineare Algebra*
7. Geologie: Gruppentheorie, *DGL*, Statistik

[1] Das Gleichheitszeichen $\equiv$ bedeutet Gleichheit im Sinne einer Definition. In einer anderen Welt könnte die z.B. Kraft auch ungleich der Masse mal Beschleunigung sein, die Beschleunigung ist aber als zweite Ableitung des Ortsvektors *definiert*.

Die kursiv gesetzten Themen bilden ein Grundgerüst mathematischer Methoden für die ersten Semester des Physikstudiums. In dieser Vorlesung (Wintersemester) werden die Themen Vektorrechnung, Analysis, komplexe Zahlen, Differentialgleichungen und Vektoranalysis behandelt. Eine weitere Vorlesung, *Lineare Algebra und Vektoranalysis*, folgt im Sommersemester und behandelt lineare Algebra, Fourieranalyse, Funktionentheorie und Tensorrechnung.
Dieses Skript basiert auf einer Vorlesungsmitschrift von Sebastian Breustedt und Nikolaus Rademacher, bei denen ich mich herzlich bedanke. Vielen Dank auch an Dennis Finck, Uli Michel, Steffen Karalus und Donald Köster und für engagiertes Korrekturlesen und Anmerkungen. Weitere Fehler und Anregungen bitte direkt an `berg@thp.uni-koeln.de`. Die Lektüre dieses Skriptes ersetzt weder den Vorlesungsbesuch, noch das eigenständige Nacharbeiten des Stoffes anhand von Textbüchern, noch das selbstständige Bearbeiten der Übungen.

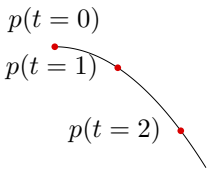
Null

Grundlagen

Wir beginnen mit einigen Vorstellungen zum Thema Raum und Koordinaten, der Bühne auf der sich physikalische Prozesse abspielen. Um das dabei benutzte Vokabular zu definieren, entwickeln wir die mathematischen Begriffe der Menge, Abbildung, und Gruppe. Diese Überlegungen dienen als Vorbereitung auf das erste Kapitel, das sich mit Vektorräumen beschäftigt.

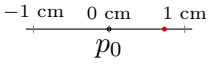
0.1 Der physikalische Raum

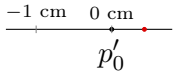
Alles Geschehen in unserem Universum läuft im Raum ab, Grund genug sich mit dem dreidimensionalen Raum unserer Wahrnehmung und Erfahrung zu beschäftigen. Mit der Definition eines mathematischen Modells dieses Raumes müssen wir bis Abschnitt 1.2 warten; die Überlegungen hier dienen als Motivation, zunächst die dazu nötigen Begriffe zu definieren. Der Inhalt dieses Abschnittes ist ihnen (vermutlich) aus der analytischen Geometrie bekannt.
Um die Dinge einfach zu halten, betrachten wir uns zunächst einen eindimensionalen Raum, konkret eine gerade Linie ———————. Dieser Raum umfasst eine (unendlich große) Menge von Punkten sowie Beziehungen zwischen diesen Punkten, d.h. Angaben wie man von einem Punkt zu einem anderen Punkt gelangt. Diese Beziehung zwischen Punkten sind Verschiebungen.
Analoges gilt für den zweidimensionalen Raum, zum Beispiel dieses Blatt Papier bezw. die Oberfläche des Bildschirms auf dem Sie diesen Text lesen. Der Hörsaal ist ein Beispiel für einen dreidimensionalen Raum.
Ein Punkt p in einem solchen Raum könnte nun die Position einer Punktmasse beschreiben. Bewegt sich die Punktmasse, so hängt p von der Zeit ab; die Funktion $p(t)$ gibt zu jedem Zeitpunkt t den Punkt $p = p(t)$ an, an dem sich die Masse befindet. $p(t)$ beschreibt also die Bahnkurve an, auf er sich die Punktmasse bewegt. Die Berechung solcher Bahnkurven ist Ziel der Mechanik, die dazu verwendeten Differentialgleichungen werden wir in Kapitel 4 kennenlernen.
Die Abbildung links zeigt ein Beispiel für eine solche Bahnkurve in 2 Dimensionen. Eine Punktmasse bewege sich zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer einer nicht-verschwindenden Geschwindigkeit v_0 horizontal, die Schwerkraft beschleunigt die Punktmasse nach unten. Wir legen eine zweidimensionale Ebene so, dass die gesamte Bewegung innerhalb dieser Ebene verläuft (dazu muss

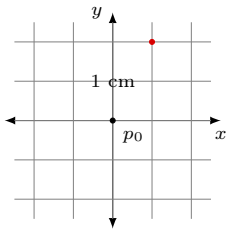


die Ebene den Anfangspunkt $p(t = 0)$, die horizontale Achse der Anfangsgeschwindigkeit, und die vertikale Achse einschließen). Die Bahnkurve lässt sich dann in zwei Dimensionen darstellen, links erkennen sie die Form der Wurfparabel.

0.1.1 Koordinaten







Zur Beschreibung von Punkten in solchen Räumen sind **Koordinaten** nützlich. Im Beispiel des eindimensionalen Raumes genügt ein ausgezeichneter Punkt (der **Koordinatenursprung**), eine Längeneinheit (1 Meter, 1 Zoll, oder 1 Smoot [1]), und eine Richtung um jedem Punkt auf der Linie eine Zahl, seine **Koordinate** zuzuordnen. Ursprung, Längeneinheit und Richtung definieren ein **Koordinatensystem** für den eindimensionalen Raum. Der rote Punkt im Beispiel links hat zum Beispiel die Koordinate $x = 0.732$ cm. Die Koordinaten eines Punktes hängen natürlich von der Wahl des Koordinatensystems ab. Die zweite Abbildung links zeigt denselben Raum mit demselben Punkt. In diesem Beispiel ist allerdings der Ursprung p_0' anders gewählt, entsprechend ist die Koordinate des Punktes eine andere, hier $x' = x - 0.3$.
Analog lässt sich jeder Punkt der zweidimensionalen Ebene mit zwei Koordinaten beschreiben. Ein besonders einfaches Koordinatensystem besteht aus einem Punkt p_0 als Ursprung und zwei rechtwinkligen Achsen; solche Koordinaten werden als **kartesische Koordinaten** bezeichnet. In dem Beispiel links hat der rote Punkt die Koordinaten $x = 1$ cm und $y = 2$ cm. Weitere Koordinatensysteme werden wir später kennenlernen. Analog ist ein Punkt im dreidimensionalen Raum durch 3 Koordinaten charakterisiert.
Eine Bahnkurve wie das Beispiel oben kann nun durch eine Funktion angegeben werden, die zu jedem Zeitpunkt t die Koordinaten des Punktes angibt, an dem sich eine Masse befindet. Im Beispiel mit der Wurfparabel sind diese Funktionen $x(t) = v_0 t$ und $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$. Zweifaches Ableiten nach der Zeit führt auf $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ und $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$, die Beschleunigung in x-Richtung ist also Null, in y-Richtung ist sie die Fallbeschleunigung $-g$. Die Koordinaten des Massepunktes gehorchen also Differentialgleichungen (hier dem zweiten Newtonschen Gesetz, Beschleunigung gleich Kraft durch Masse). Im Kapitel 4 werden wir solche Gleichungen systematisch formulieren und lösen.

0.2 Mengen, Abbildungen, Gruppen

Mit diesen einfachen Betrachtungen haben wir bereits recht weit vorgegriffen und Begriffe wie Menge, Funktion, Abbildung verwendet. Im Folgenden werden wir diese Begriffe definieren und eine einheitliche Notation entwickeln.

[1] Die Längeneinheit Smoot ist nach Oliver R. Smoot benannt; 1 Smoot sind 1.7018 m. Die Länge der Harvard Bridge in Boston wurde unter Verwendung des Originalmassstabes (also der Person O.R. Smoot) in einer Nacht im Oktober 1958 vermessen und beträgt 364.4 Smoots plus/minus ein Ohr. Heute erinnert eine Plaquette auf der Brücke an diese Großtat der Vermessungskunst. Damals war Oliver Smoot Student am MIT, später wurde er Vorsitzender des American National Standards Institute (ANSI) und Präsident der International Organization for Standardization (ISO). Das MIT-Studentenradio sendet auf der Wellenlänge 2 Smoot (88.1 MHz).

0.2.1 Mengen

Die **Menge** ist ein grundlegender Begriff der Mathematik, er bezeichnet eine Zusammenfassung von unterschiedlichen Objekten. Wir werden diesen Begriff hier nicht weiter definieren. Ein Beispiel ist die Menge der natürlichen Zahlen, die wir als $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bezeichnen. Die Zahl 13 ist ein Element dieser Menge, wir schreiben $13 \in \mathbb{N}$. Analog gilt "Donnerstag"$\notin \mathbb{N}$.
Die **Teilmenge** (oder auch **Untermenge**) einer Menge M enthält ausschließlich Elemente aus dieser Menge. Zum Beispiel sind die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, wir schreiben $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Die Teilmenge von M, deren Elemente die Eigenschaft E haben, schreiben wir als $\{x \in M | E(x)\}$. Zum Beispiel schreiben wir die Menge der geraden Zahlen als $\{x \in \mathbb{N} | x/2 \in \mathbb{N}\}$.
Die **Vereinigung** zweier Mengen sind alle Elemente, die in der einen oder der anderen Menge vertreten sind, $M \cup N = \{x | x \in M \text{ oder } x \in N\}$. Der **Durchschnitt** zweier Mengen sind alle Elemente die in der einen und der anderen Menge vertreten sind, $M \cap N = \{x | x \in M \text{ und } x \in N\}$.
Die Menge, die kein Element enthält, wird als leere Menge bezeichnet und als $\varnothing$ notiert.
Als nächstes definieren wir das **Produkt** $A \times B$ zweier Mengen A, B, als die Menge aller geordneten Paare der Elemente aus A und B. Für $A = \{\text{Peter, Ida}\}$ und $B = \{\text{Müller, Maier, Schmidt}\}$ ist $A \times B$ gleich der Menge {(Peter, Müller),(Peter, Maier), (Peter, Schmidt),(Ida, Müller), (Ida, Maier),(Ida, Schmidt)}. Geordnet bedeutet, dass das erste Element eines solchen Paares aus der ersten Menge A stammt, und das zweite aus der zweiten Menge B. Die Menge $B \times A$ enthält damit {(Müller, Peter), ...}.

0.2.2 Abbildungen

Eine **Abbildung** f zwischen zwei Mengen ist eine Zuordnung, die jedem Element einer Menge X (der **Definitionsmenge**) jeweils ein Element einer zweiten Menge Y (**Zielmenge**) zuweist. Hierfür verwenden wir die folgende Schreibweise $f : X \to Y; x \mapsto f(x)$, wobei $x \in X$ und $f(x) \in Y$. Im täglichen Gebrauch sind wir meist etwas lax und sprechen von der Funktion $f(x)$, meinen aber eine solche Abbildung. Sogenannte **reelle Funktionen** sind ein häufig auftretender Spezialfall, sie haben als Zielmenge die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. $D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$ ist das was Sie bereits als "Funktion einer Veränderlichen" kennengelernt haben, und wir werden die Sprechweise auch im Alltag beibehalten. Funktionen dieser Art mit $f(-x) = f(x)$ für alle x heißen **gerade Funktionen**, solche mit $f(-x) = -f(x)$ heißen **ungerade Funktionen**.

Beispiel

Ein Paar reeller Zahlen ist ein Element der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Addition von zwei reellen Zahlen a, b ist eine Abbildung aus der Menge der Paare reeller Zahlen auf die Menge der reellen Zahlen, also $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (a, b) \mapsto a + b$. Machen Sie sich klar, dass sich hier $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nicht auf die Operation der Multiplikation zweier Zahlen bezieht, sondern auf die Bildung der Paare reeller Zahlen (die Paare von Zahlen, die dann addiert werden).

Ist jedes Element der Zielmenge genau ein Abbild eines Elementes der Definitionsmenge, heißt die Abbildung **bijektiv**. Insbesondere existiert dann ein Inverses dieser Abbildung

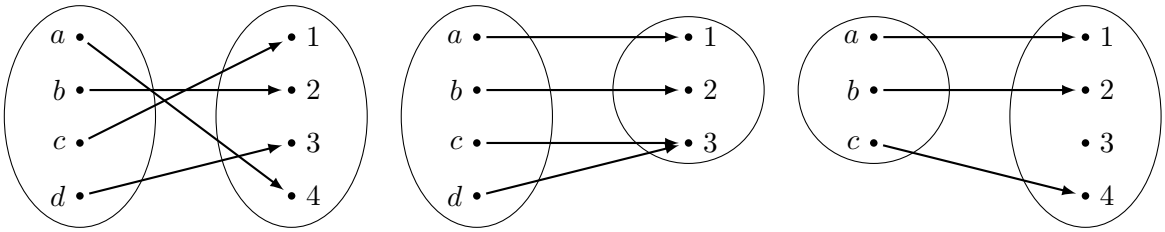


Figure 0.1: Je ein Beispiel für bijektive, eine surjektive, und eine injektive Abbildung (von links nach rechts).

$f^{-1} : Y \to X, y \mapsto f^{-1}(y) = x$. Gibt es eine bijektive Abbildung zwischen zwei Mengen, so heißen die Mengen **gleichmächtig** zueinander. Mit dieser Definition kann man auch die Anzahl von Elementen in Mengen mit unendlich vielen Elementen vergleichen.
Tritt jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Abbildung der Definitionsmenge auf, heißt die Abbildung **surjektiv**, d.h. f(X)=Y. Eine Abbildung heißt **injektiv** wenn jedem Element der Zielmenge höchstens ein Element der Definitionsmenge zugeordnet ist. Damit ist eine Abbildung dann und nur dann bijektiv wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist. Abbildungen lassen sich hintereinander ausführen. Folgt z.B. auf die Abbildung f von der Menge X auf die Menge Y noch eine weitere Abbildung g von Y auf die Menge Z so schreiben wir die kombinierte Abbildung $X \to Z$ als $g \circ f : X \to Z, x \mapsto z = g(f(x))$.

0.2.3 Gruppen

Die minimale Struktur, die man einer Menge sinnvollerweise geben kann, führt auf das Konzept der Gruppe. Eine **Gruppe** $M, *$ ist eine Menge M sowie eine Verknüpfung $*$ der Elemente dieser Menge mit bestimmten Eigenschaften. Diese Verknüpfung nimmt zwei Elemente von M und generiert aus ihnen eine neues Element von M. Die Verknüpfung ist also eine Abbildung $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto z = x * y$ und sie gehorcht den folgenden Forderungen (den Gruppenaxiomen [2]):

1. dem Assoziativgesetz $x * (y * z) = (x * y) * z$
2. der Existenz eines neutralen Elements e mit $x * e = e * x = x$ für alle $x \in M$.
3. der Existenz von inversen Elementen: für alle $x \in M$ existiert ein x^{-1}, so dass $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Dabei ist bereits die Eigenschaft der Verknüpfung $M \times M \to M$ nichttrivial, sie bedeutet dass die Verknüpfung stets auf Elemente von M führt, und nicht auf andere Objekte. Man sagt in diesem Zusammenhang, dass M unter der Verknüpfung **abgeschlossen** ist.

[2] (Für Puristen:) Diese Forderungen lassen sich noch weiter reduzieren. Zum Beispiel genügt in 2. die Forderung, dass $x * e = x \forall x$ (e wird dann als rechtsneutrales Element bezeichnet). Daraus kann man dann leicht folgern, dass auch $e * x = x$; beginnen wir mit $x * e = x$ und multiplizieren links mit x^{-1} und rechts mit x.

Beispiel

Ein einfaches Beispiel für eine Gruppe sind die reellen Zahlen, verknüpft mit der Operation der Addition. Die natürlichen Zahlen bis 9 und die Null, $M = \{0, 1, \ldots, 9\}$ bilden allerdings keine Gruppe unter der Addition, da diese Menge nicht abgeschlossen ist: $3 + 8$ ist kein Element von M, obwohl 3 und 8 Elemente von M sind. Auch die natürlichen Zahlen mit Null bilden keine Gruppe unter Addition (fehlendes Inverses).

Aus diesen Axiomen folgen bereits eine Reihe interessanter Eigenschaften, z.B. kann es nur ein neutrales Element geben, denn gäbe es zwei neutrale Elemente e und e' dann gälte $e = e*e' = e' * e = e'$. Analog gibt es zu jedem Element x nur ein inverses Element x^{-1}. Angenommen es gäbe ein Element a mit zwei Inversen b und c, dann gilt unter Nutzung des ersten Axioms $b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c$.

Beispiel

Gruppen spielen eine zentrale Rolle in der modernen Physik bei der Beschreibungen von Symmetrien. Zum Beispiel bildet die Menge der Rotationen um eine feste Achse um Vielfache von 60° eine Gruppe: Ihre Elemente sind $0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°$. Die Verknüpfung zweier Rotationen ist definiert als ihre Hintereinanderausführung. Das neutrale Element ist damit die Rotation um 0°, die Inverse von z.B. 60° ist das Element 300°.
In diesem Beispiel ist die Verknüpfung **kommutativ**, d.h. $x * y = y * x$ für alle $x, y \in M$. Gruppen mit einer kommutativen Verknüpfung heißen **Abelsche Gruppen**. Im Allgemeinen ist allerdings $x*y$ nicht gleich $y*x$! Ein Beispiel für eine nicht-Abelsche Gruppe sind Rotationen um x-Achse und um die y-Achse. Nehmen sie ein Buch zur Hand (ein Smartphone geht notfalls auch), legen Sie es auf den Tisch, rotieren Sie es um 90° um die Achse die durch den Tisch geht. Dann rotieren Sie es um 90° um eine Achse senkrecht dazu. Beginnen Sie noch einmal von vorn, und führen Sie nun diese Operationen in umgekehrter Reihenfolge aus. Die Endposition des Buches wird in den beiden Fällen nicht die Gleiche sein!

Beispiel

Ein weiteres Beispiel einer Gruppe ist die Menge der Permutationen. Eine **Permutation** ist eine Transformation, die die Reihenfolge in der Objekte angeordnet sind, ändert. Beispiel für eine solche Transformation ist die Überführung von A, B, C in C, A, B. Es gibt verschiedene Möglicheiten eine Permutation zu notieren, wir nutzen das Ergebnis von (1,2,3) unter der Permutation um eine Permutation anzugeben. Bei unserem Beispiel handelt es sich also um die Permutation $\sigma = (3, 1, 2)$; in der neuen Ordnung steht an erster Stelle Objekt das von der dritten Stelle geholt wurde, etc.
Für die $n = 3$ Objekte gibt es die Permutationen $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$. In jeder Permutation tritt jede der 3 Zahlen genau einmal auf, aber jeweils auf unterschiedlichen Positionen. Platzieren wir die Zahl eins zuerst, gibt es für sie 3 mögliche Positionen (an erster, zweiter, oder dritter Stelle), platzieren wir als nächstes die Zahl zwei sind noch zwei Möglichkeiten geblieben , und die 3 kommt in die letzte verbliebene Position. Insgesamt gibt es also $1 \times 2 \times 3 = 6$ Permutationen von 3 Objekten. Für n Elemente gibt es $1 \times 2 \times 3 \ldots \times n \equiv n!$ Permutationen [a]
Man kann Permutationen verknüpfen, indem man sie hintereinander ausführt. Wir nummerieren die 6 Permutationen von drei Objekten willkürlich in der obigen Reihenfolge mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$. Wenn wir jetzt zuerst $\sigma_2 = (1, 3, 2)$ auf $(1, 2, 3)$ anwenden und auf das Ergebnis $\sigma_3 = (2, 1, 3)$

anwenden, erhalten wir $(3, 1, 2)$. Wir definieren die Verküpfung von zwei Permutation als ihre Hintereinanderausführung (von rechts nach links gelesen) und schreiben $\sigma_3 * \sigma_2 = \sigma_5$.
Unsere Notation erlaubt die Verknüpfung von Permutationen sehr einfach zu beschreiben, für $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ und $\tau = (\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n))$ ist $\sigma * \tau = (\sigma(\tau(1)), \sigma(\tau(2)), \ldots, \sigma(\tau(n))$.
Das erste Element $\sigma_1 = (1, 2, 3)$ entspricht dem neutralen Element, denn es lässt die Reihenfolge unverändert. Jede Permutation läßt sich durch eine Serie paarweiser Vertauschungen generieren, benötigt man eine gerade (ungerade) Zahl von Vertauschungen spricht man von einer geraden (ungeraden) Permutation.

[a] $n!$ wird 'n-Fakultät' ausgesprochen, auf Englisch 'n-factorial'.

Aufgabe

Überzeugen Sie sich, dass dass die Gruppenaxiome für Permutationen gelten. Die Gruppe der Permutationen von n Elementen heißt die **symmetrische Gruppe** S_n. Zeige Sie, dass Permutationen nicht kommutieren, indem Sie auch $\sigma_2 * \sigma_3$ berechnen.

Info:

Mit ein wenig mehr Struktur als eine Gruppe kommen wir bereits bei Objekten wie Zahlen an: ein **Körper** ist eine Menge mit einer als 'additiv' bezeichneten Verknüpfung, die den Gruppenaxiomen gehorcht und kommutativ ist, sowie einer als 'multiplikativ' bezeichneten Verknüpfung, die (bis auf das additive Nullelement) ebenso eine Abelsche Gruppe bildet. Die Menge rationalen Zahlen oder der reellen Zahlen bilden einen solchen Körper. Einen weiteren Körper werden wir in Kapitel 3 kennenlernen, die komplexen Zahlen.

0.3 Ein Minimum an Notation

In konkreten Rechnungen werden wir häufig mit Summen zu tun haben und nutzen um unnötige Schreibarbeit zu vermeiden das Summenzeichen $\sum$. Zum Beispiel ist $1 + 2 + 3$ die Summe der natürlichen Zahlen i von 1 bis 3, was wir als $\sum_{i=1}^{3} i$ schreiben. Statt i hätten wir natürlich auch eine andere Variable nutzen können, $\sum_{j=1}^{3} j$ gibt die gleiche Summe an. Die Grenzen der Summe schreiben wir oft nicht mit, wenn sie aus dem Kontext folgen, zum Beispiel wenn i etwas die drei Raumdimensionen beschreibt. Doppelte Summen wie $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} ij$ schreiben wir kompakt als $\sum_{i,j=1}^{3} ij$.
In unseren Definitionen haben wir häufig die Wendungen "für alle x" oder "es existiert" benutzt. Wir kürzen sie ab mit $\forall$ als "für alle" und $\exists$ für "es existiert". Ein Gleichheitszeichen im Sinne einer Definition schreiben wir als $\equiv$, z.B. als wir $n!$ als $1 \times 2 \times \cdots \times n$ definiert haben. Mit $\curvearrowright$ kürzen wir "daraus folgt" ab. Weitere Notation werden wir entwickeln, wo und wenn wir sie benötigen.

Zusammenfassung:

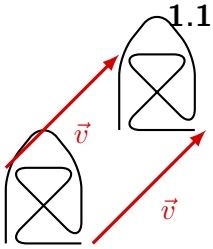
- Wir nutzen Koordinaten, um die Position von Punkten im Raum eindeutig anzugeben. Ein Koordinatensystem dessen Achsen senkrecht aufeinander stehen, heißt kartesisch.
- Eine Abbildung ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Definitionsmenge) genau ein Element der anderen Menge (Zielmenge) zuordnet. Eine solche Abbildung heißt injektiv, wenn jedem Element der Zielmenge höchstens ein Element der Definitionsmenge zugeordnet ist. Sie heißt surjektiv, wenn jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Abbildung der Definitionsmenge auftritt.
- Eine Gruppe ist eine Menge mit einer Verknüpfung, die je zwei Elementen der Menge ein drittes Element derselben Menge zuordnet und drei Bedingungen erfüllt: das Assoziativgesetz, die Existenz eines neutralen Elements und die Existenz von inversen Elementen (die Gruppenaxiome).

Eins

Vektoren und Vektorräume

Vektoren spielen eine zentrale Rolle bei der Beschreibung von physikalischen Vorgängen im dreidimensionalen Raum oder der vierdimensionalen Raumzeit. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel, der Verschiebung in der Ebene, bevor wir uns dem Begriff des Vektorraums auf allgemeinerem (und etwas abstrakterem) Niveau nähern.

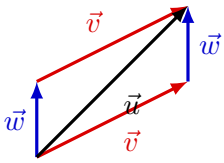
1.1 Verschiebungen in der Ebene



Eine Verschiebung $\vec{v}$ bildet jeden Punkt p der Ebene auf einen anderen Punkt p' ab. Abstände der Punkte untereinander und ihre Orientierung zueinander bleiben erhalten. Alle Verschiebungspfeile der Abbildung sind also einander äquivalent, und sollen als eine einzelne Verschiebung $\vec{v}$ betrachtet werden.

Zwei Verschiebungen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ lassen sich kombinieren ("verknüpfen"), indem man erst $\vec{v}$ und dann $\vec{w}$ ausführt. Das Ergebnis ist eine neue Verschiebung, die wir $\vec{u}$ nennen. Wir schreiben

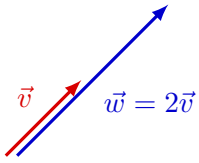
$$\vec{u} = \vec{w} + \vec{v} \; . \tag{1.1}$$



Anstelle des Pluszeichens $+$ hätten wir auch ein beliebiges anderes Symbol nutzen können für eine Verknüpfung, die aus zwei Verschiebungen eine dritte generiert. Die Schreibweise mit dem Pluszeichen nutzt aus, dass diese Verknüpfung zweier Verschiebungen Eigenschaften hat, die uns aus der Verknüpfung zweier Zahlen durch Addition geläufig sind. Wir bezeichnen sie daher auch als die 'Addition' zweier Verschiebungen. Es gilt nämlich $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, also $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ und ebenso $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{x} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{x})$, die Hintereinanderausführung von Verschiebungen ist also kommutativ und assoziativ. Es existiert auch eine Verschiebung, die jeden Punkt auf sich selbst abbildet (das sogenannte Nullelement). Diese Eigenschaften hat die Hintereinanderausführung von Verschiebungen gemeinsam mit der Addition von Zahlen: Die Verschiebungen bilden eine Gruppe, wenn man sie durch Hintereinanderausführung verknüpft (wir sagen auch sie bilden eine Gruppe unter Hintereinanderausführung).

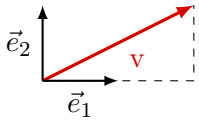
Diese Eigenschaften von Verschiebungen haben wir übrigen nicht bewiesen. Diese folgen aus unserer Alltagserfahrung; streng genommen handelt es sich um experimentelle Ergebnisse, aus denen wir fordern die Verknüpfung von Verschiebungen in der Ebene möge kommutativ und assoziativ sein.

Zusätzlich zur Addition von zwei Verschiebungen lässt sich die Multiplikation einer Verschiebung $\vec{v}$ mit einer Zahl λ als Streckung von $\vec{v}$ um einen Faktor λ definieren. Dabei ist dann $\vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v}$. Bei $\lambda < 0$ ist die Streckung in Gegenrichtung gemeint. Es gelten $\lambda\vec{v} + \nu\vec{v} = (\lambda + \nu)\vec{v}$ und $\lambda(\nu\vec{v}) = (\lambda\nu)\vec{v}$ (wieder experimentelles Ergebnis, bzw. Forderung).
Durch Addition von Verschiebungen entsteht wieder eine Verschiebung (und nicht ein anderes Objekt), ebenso wie durch die Multiplikation einer Verschiebung mit einer Zahl wieder eine Verschiebung entsteht. Kurz: Verschiebungen kann man addieren (definiert durch Hintereinanderausführung) und mit Zahlen multiplizieren (definiert durch Streckung). Weitere physikalische und mathematische Objekte mit diesen beiden Eigenschaften werden wir im Abschnitt 1.3 finden. Solche Objekte werden wir dort als Vektoren bezeichnen. So bildet die Menge der Verschiebungen mit den Operationen Hintereinanderausführung und Streckung einen sogenannten Vektorraum.



1.1.1 Basissysteme von Verschiebungen

Basissysteme erlauben, Verschiebungen durch Zahlen zu beschreiben, was konkrete Rechnungen stark vereinfacht. Wir beginnen damit, zwei ausgezeichnete Richtungen in der Ebene ('rechts' und 'oben') und eine Längeneinheit ('1 m') zu wählen. Die Verschiebung $\vec{e}_1$ verschiebe alle Punkte um eine Längeneinheit nach rechts, $\vec{e}_2$ verschiebe alle Punkte um eine Längeneinheit nach oben. Alle Verschiebungen lassen sich dann durch Streckungen von $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ und Hintereinanderausführung der resultierenden Verschiebungen generieren, z.B. $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.
Ein Basissystem aus Verschiebungen, die senkrecht aufeinanderstehen (dazu später mehr) bezeichnet man als **kartesische Basis**. Haben die Verschiebungen auch noch alle die gleiche Länge spricht man von einem **orthonormalen** Basissystem. Eine Basis muss allerdings nicht aus solchen orthonormalen Verschiebungen bestehen, in der Praxis hat eine solche Basis jedoch klare Vorteile (einen werden wir in Abschnitt **??** kennenlernen).



Jede Verschiebung $\vec{v}$ in der Ebene ist damit durch 2 Zahlen charakterisiert, $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$. Diese Zahlen v_1 und v_2 heißen **Komponenten** von $\vec{v}$ in der Basis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Die Komponenten der Verschiebung $\vec{v}$ lassen sich in Spaltenschreibweise zusammenfassen,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ,$$

wobei $\mathbf{v}$ aus den Komponenten der Verschiebung in der gewählten Basis besteht. $\mathbf{v}$ wird auch als **Darstellung** der Verschiebung $\vec{v}$ in der gewählten Basis bezeichnet, oder als **Koordinatenvektor**. Die Komponenten werden dann als Koordinaten des Vektors bezeichnet (nicht zu verwechseln mit den Koordinaten eines Punktes im Raum aus Abschnitt 0.1.1). Gegeben die Basis, bezeichnet jedes $\mathbf{v}$ eindeutig eine Verschiebung $\vec{v}$. Trotzdem handelt es sich um unterschiedliche Objekte, $\vec{v}$ bezeichnet eine Verschiebung (ist also unabhängig von der Wahl einer Basis), $\mathbf{v}$ die Komponenten von $\vec{v}$ in einer bestimmten Basis[1]. Basisvektoren haben in ihrer Basis stets die Darstellung $(1, 0, 0, \ldots), (0, 1, 0, \ldots), \ldots$. Die Aussage $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots)$ ist korrekt, aber recht inhaltsleer, wenn nicht gesagt wird was $\vec{e}_1$ ist (z.B. horizontale Verschiebung Richtung Osten um 1 m).

[1] In Textbüchern wird oft kein Unterschied zwischen diesen Objekten gemacht, der Sinn erschließt sich allerdings meist aus dem Kontext.

Für die Addition zweier Verschiebungen gilt nun

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) + (w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2) = (v_1 + w_1)\vec{e}_1 + (v_2 + w_2)\vec{e}_2 \tag{1.2}$$

(der zweite Schritt folgt aus der Assoziativität der Addition von Verschiebungen und der Forderung $\lambda\vec{v} + \nu\vec{v} = (\lambda + \nu)\vec{v}$ an die Streckung). In Komponentenschreibweise

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} . \tag{1.3}$$

Dieses Ergebnis ist nicht zu unterschätzen! Wir haben nun eine Rechenregel, die die Addition (Hintereinanderausführung) von Verschiebungen durch die Addition von Zahlen beschreibt: Gegeben zwei Verschiebungen, addieren wir einfach ihre Komponenten und erhalten die Komponenten der Summe der Verschiebungen.

Aufgabe

Zeigen Sie analog, dass die Verschiebung $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ die Komponenten $w_1 = \lambda v_1$ und $w_2 = \lambda v_2$ hat.

1.2 Raumpunkte und Verschiebungen

Es mag verwunderlich erscheinen, dass wir als Beispiele für Vektoren Verschiebungen genutzt haben, aber noch nicht über 'Ortsvektoren' gesprochen haben. Tatsächlich sind die Punkte einer Ebene oder des dreidimensionalen Raumes keine Elemente eines Vektorraumes, denn man kann Punkte im Raum nicht sinnvoll addieren. Mit der Wahl eines ausgezeichneten Punktes, des sogenannten **Ursprungs** können wir jedoch jeden Punkt im Raum durch eine Verschiebung beschreiben.

Beispiel

Die Universität befindet sich in Köln-Sülz am Punkt p. Anstatt der Beschreibung dieses Punktes im Raum, z.B. durch ein Koordinatensystem, kann man aber genauso gut angeben, welche Verschiebung $\vec{r}$ uns vom Koordinatenursprung p_0 (der in diesem Beispiel natürlich am Dom liegt) zur Universität bringt, wir schreiben $p = p_0 + \vec{r}$ und haben damit jedem Punkt einen Vektor (und nur einen) zugeordnet.

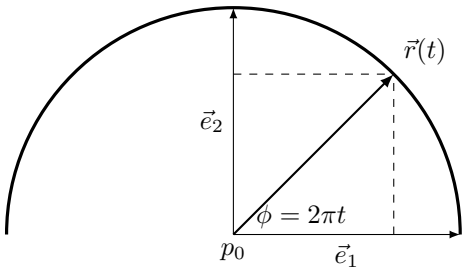
Nach Wahl eines Ursprungs lassen sich Punkte im Raum als Verschiebungen vom Ursprung, und damit als Vektoren beschreiben. Etwas präziser: jeder Punkt entspricht genau einer Verschiebung, und jede Verschiebung genau einem Punkt. Die Verschiebung $\vec{r}$ wird als **Ortsvektor** bezeichnet. Sie beschreibt einen Raumpunkt allerdings nur bei gegebenem Ursprung.

Eine wichtige Anwendung des Konzepts des Ortsvektors sind sogenannte **Bahnkurven**. Denken wir an eine Punktmasse, die sich durch den Raum bewegt. Zu jedem Zeitpunkt t befindet sie sich an einem anderen Punkt p im Raum. Die Bahnkurve ist also durch eine Funktion der Zeit $p(t)$, oder äquivalent bei Wahl eines Ursprungs durch den zeitabhängigen Ortsvektor $\vec{r}(t)$ beschrieben. Wählen wir nun noch eine (feste, zeitlich unveränderte) Basis für die Ortsvektoren, beschreiben die Komponenten $\mathbf{r}(t)$ die Bewegung der Punktmasse.

Verschiebungen in der Ebene sind durch ein Zahlenpaar charakterisiert, kompakt schreiben wir $\mathbf{v} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2$. Als Beispiel für Abbildungen nutzen wir noch einmal die obige Raumkurve $\mathbf{r}(t)$. Formal betrachtet ist eine Raumkurve in zwei Dimensionen eine Abbildung aus den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf die Verschiebungen in der Ebene $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Beispiel



Betrachten wir einen Punkt der sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einem Halbkreis mit Radius 1 bewegt. Zur Zeit $t = 0$ beginne die Bewegung, zur Zeit $t = 1/2$ sei das Ziel erreicht. Legen wir p_0 in das Zentrum des Halbkreises und wählen die Basis entlang der Achsen wie in der Abbildung, ist die Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \ . \tag{1.5}$$

Aufgabe

Berechnen Sie die Komponenten einer dreidimensionalen spiralförmigen Bahnkurve um die z-Achse (Wendeltreppe, Korkenzieher). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ v_z t \end{pmatrix} \ . \tag{1.6}$$

Info:

Für den physikalischen Raum (ohne Wahl eines Ursprungs) ist ein sogenannter affiner Raum die adäquate Beschreibung. Ein **affiner Raum** $(M, V, +)$ ist eine Menge M von Punkten, ein Vektorraum V und eine Verknüpfung $+$

$$\begin{aligned} &M \times V \rightarrow M \\ &(p, \vec{v}) \longmapsto p + \vec{v} \in M \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft $p + (\vec{u} + \vec{v}) = (p + \vec{u}) + \vec{v}$. Zudem existier zu jedem Paar $p, q \in M$ genau ein Vektor $\vec{v} \in V, p = q + \vec{v}$.
Das heißt, Punkte $p, q \in M$ des affinen Raumes können subtrahiert werden, $p - q = \vec{v}$ (das Ergebnis ist die Verschiebung von q nach p). Punkte des affinen Raumes können aber nicht addiert werden, und bilden daher auch keinen Vektorraum.

Als Alternative zu den Koordinaten aus Abschnitt 0.1.1 kann als Koordinatensystem eines affinen Raumes auch ein ausgezeichneter Punkt p_0 (der Koordinatenursprung) und eine Basis $\{\vec{e}_i\} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots$ von V genutzt werden. Jeder Punkt $p \in M$ kann dann als

$$p = p_0 + \sum_{i=1}^{k} v_i \vec{e}_i \tag{1.7}$$

geschrieben werden, und wird mit dem Verschiebungsvektor $\vec{v}$ von p_0 nach p identifiziert. $\vec{v}$ kann dann als Ortsvektor bezeichnet werden. Diese Zuordnung ist allerdings nur möglich, nachdem wir p_0 (willkürlich) gewählt haben, während die Punkte im Raum unabhängig von einer solchen Wahl existieren; es handelt sich beim Ortsvektor $\vec{v}$ also um eine Darstellung von p beigegebenen p_0.

1.3 Axiome des Vektorraums

Mengen, für deren Elemente eine Additionsoperation und eine Multiplikation mit Zahlen existiert treten in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auf. Als konkretes Beispiel werden wir zwar weiter die Menge der Verschiebungen benutzen, es lassen sich allerdings auch für ganz andere Objekte die Operationen Addition und Multiplikation mit Zahlen definieren; sie bilden also auch Vektorräume. Daher ist eine formale Definition des Vektorraums sinnvoll; sie erlaubt eine einheitliche Beschreibung dieser Mengen.
Ausgerüstet mit den Begriffen zu Mengen und Gruppen aus Abschnitt 0.2.1 und 0.2.3 können wir den Begriff des Vektorraumes präzise fassen. Ein Vektorraum über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist eine Menge V von Elementen (genannt Vektoren) und zwei Verknüpfungen. Die erste Verknüpfung ist die Addition von zwei Vektoren. Diese Verknüpfung bildet zwei Vektoren (ein Element von $V \times V$) auf ein Element von V ab. Die zweite Verknüpfung ist die Multiplikation einer rellen Zahl mit einem Vektor, sie bildet also ein Element von $\mathbb{R} \times V$ auf V ab.
Ein **Vektorraum** über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist ein Tripel $(V, +, \times)$ bestehend aus einer Menge V und zwei Verknüpfungen $+$ und $\times$.

$$V \times V \longrightarrow V, (\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \vec{v} + \vec{w} \quad (\vec{v}, \vec{w} \in V)$$

$$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V, (\lambda, \vec{v}) \longmapsto \lambda \times \vec{v} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $(V, +)$ bildet eine Gruppe
2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}\ \forall \vec{w}, \vec{v} \in V$ (Kommutativität)
3. $(\lambda + \mu) \times \vec{v} = \lambda \times \vec{v} + \mu \times \vec{v}$
4. $\lambda \times (\mu \times \vec{v}) = (\lambda\mu) \times \vec{v}$
5. $\lambda \times (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \times \vec{v} + \lambda \times \vec{w}$
6. $1 \times \vec{v} = \vec{v}$

Das Multiplikationszeichen wird häufig weggelassen, $\lambda\vec{v} \equiv \lambda \times \vec{v}$. In Punkt 4 ist mit $\lambda \times \mu$ die Multiplikation von zwei Zahlen gemeint, nicht die Multiplikation von Vektoren mit einer Zahl. Wir könnten zwischen diesen Operationen einen Unterschied in der Notation machen, verzichten aber darau da ohnehin stets klar sein muss welches Objekt ein Vektor ist und welches eine Zahl.

Aufgabe

Prüfen Sie, ob die Verschiebungen in der Ebene, mit den Operationen der Hintereinanderausführung und der Streckung, die Axiome des Vektorraumes erfüllen.

Beispiel

- Verschiebungen (mit Hintereinanderausführung als Addition, Streckung als Multiplikation)
- Geschwindigkeiten; als Verschiebungen pro Zeit lassen sich Geschwindigkeiten genauso addieren und mit Zahlen multiplizieren wie Verschiebungen. Ein Massepunkt der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt und pro Zeitintervall τ um $\vec{s}$ verschoben wird hat die Geschwindigkeit $\vec{s}/\tau$.
- n-Tupel von reellen Zahlen (1-Tupel: einzelne Zahl, 2-Tupel: ein Paar von Zahlen, ...) mit Addition definiert als Addition der Komponenten der Tupel, und analog der Multiplikation. Zum Beispiel gilt für 3-Tupel

  $$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}.$$

  Damit bilden auch die Vektorkomponenten einen Vektorraum.
- Funktionen $f(x)$; durch Addition $f(x) + g(x)$ oder Multiplikation $\lambda f(x)$ für alle x entstehen neue Funktionen. Folgende Überlegung mag hilfreich sein: Approximieren wir eine Funktion $f(x)$ durch diskrete Funktionswerte bei $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Diese Funktionswerte

  $$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \cdots \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

  bilden unter der Addition von Funktionen und der Multiplikation von Funktionen mit Zahlen einen Vektorraum (er ist gleich dem Raum der n-Tupel im obigen Beispiel). Legt man die diskreten Funktionswerte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ beliebig dicht, so approximiert man die Funktion $f(x)$ beliebig gut. Daraus folgt auch, dass der von Funktionen gebildete Vektorraum unendlichdimensional ist.
- Und hier noch ein Beispiel für etwas, das kein Vektorraum ist: einzelne Kugeln Eis verschiedener Sorten. Die Menge { Vanille, Erdbeere, Schokolade } bildet *keinen* Vektorraum, weil keine (sinnvolle) Additionsregel für Eiskugeln existiert, bei der die Addition von zwei Kugeln wieder eine Eiskugel ergibt.
- Permutationen bilden ebenso keinen Vektorraum, sie lassen sich nicht mit Zahlen multiplizieren.

- Ein weiteres Beispiel einer Menge die keinen Vektorraum (über den reellen Zahlen) bildet sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Die Zahlen 3 und 5 sind Elemente dieser Menge, aber $3 + (-1)5$ ist es nicht.

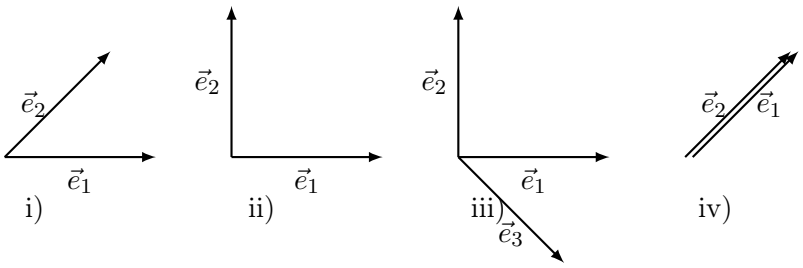
Die Elemente der Menge V werden als Vektoren bezeichnet, verkürzend spricht man oft vom Vektorraum V und meint das Tripel $(V, +, \times)$. Schreibt man $\vec{u} - \vec{v}$ für $u + (-1\vec{v})$, und $\frac{\vec{u}}{\lambda}$ für $(\frac{1}{\lambda})\vec{u}$, so sind auch Subtraktion und Division definiert. Gelten diese Axiome auch für eine Untermenge (Teilmenge) $U \subset V$, spricht man von einem **Unterraum** $(U, +, \times)$. Dann generieren Addition und Multiplikation von Vektoren aus U nur Vektoren aus U. Zum Beispiel bilden Verschiebungen entlang einer Geraden bilden einen Unterraum der Verschiebungen in der Ebene. Begriffe wie "'Länge"', "'Richtung"' tauchen in diesen Axiomen nicht auf, sie lassen sich auch nicht für alle Vektorräume definieren.
In unseren Beispielen und den Axiomen des Vektorraums haben wir Vektoren mit reellen Zahlen multipliziert, man spricht auch von einem 'Vektorraum über den reellen Zahlen'. Diese Definition lässt sich leicht auf Vektorräume über beliebigen Körpern erweitern, indem man die Menge der reellen Zahlen durch einen anderen Körper ('Zahlenkörper') ersetzt. Ein Beispiel wäre der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$; bei einem Vektorraum über den rationalen Zahlen können Elemente des Vektorraumes nur mit rationalen Zahlen multipliziert werden. Ein Vektorraum über den komplexen Zahlen spielt die zentrale Rolle in der Quantenmechanik.

1.4 Basissysteme

Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots \vec{e}_n \in V$ nennt man ein **Erzeugendensystem**, wenn man jeden Vektor $\vec{v} \in V$ schreiben kann als

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 + \ldots v_n\vec{e}_n v_1, \ldots v_n \in \mathbb{R} \tag{1.9}$$

Durch Multiplikation dieser Vektoren mit Zahlen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und Addition der Vektoren lässt sich also jedes Element des Vektorraumes erzeugen. Man bezeichnet (1.9) als **Linearkombination** der Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots \vec{e}_n \in V$.
Die Beispiele i)-iii) sind alle Erzeugendensysteme der Verschiebungen in der Ebene, iv) allerdings nicht.



Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn gilt

$$\text{sei } v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 + \ldots v_n\vec{e}_n = \vec{0}\text{ , dann gilt } v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0\text{ .} \tag{1.10}$$

Anders ausgedrückt kann aus einer Menge linear unabhängiger Vektoren kein Element als Linearkombination der anderen Vektoren geschrieben werden. Beispiele i) und ii) zeigen linear unabhängige Vektoren, nicht aber iii) oder iv).
Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_k$ bilden eine sogenannte **Basis** von V, wenn sie sowohl ein Erzeugendensystem sind als auch linear unabhängig sind. Denn dann kann jeder Vektor $\vec{v}$ auf eine einzige Art als eine Summe $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ldots v_k\vec{e}_k$ ausgedrückt werden: Erstens kann jeder Vektor als Linearkombination dieser Basisvektoren ausgedrückt werden, denn die Basisvektoren bilden ein Erzeugendensystem. Und zweitens, wäre die Darstellung nicht eindeutig dann hätten wir $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} v_i\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{k} v'_i\vec{e}_i$ mit $v_i \neq v'_i$ für mindestens ein i. Damit hätten wir $\sum_{i=1}^{k}(v_i - v'_i)\vec{e}_i = \vec{0}$ mit $v_i - v'_i \neq 0$ für mindestens ein i, dann wären die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_k$ aber (im Widerspruch zur Annahme) nicht linear unabhängig.
Gegeben sei eine Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_k$. Dann ist also jeder Vektor $\vec{v}$ eindeutig durch das Tupel

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

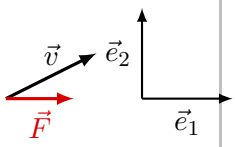
bestimmt. Jedem $\vec{v}$ ist genau ein $\mathbf{v}$ zugeordnet ist, und umgekehrt jedem $\mathbf{v}$ genau ein $\vec{v}$, die Abbildung zwischen Vektoren und ihrer Darstellung ist also bijektiv. Die Zahl der Basisvektoren k heißt die Dimension des Vektorraumes. Interessanterweise ist sie unabhängig von der Wahl der Basis (was wir aber nicht beweisen werden, siehe z.B. Fischer und Kaul Abschnitt 6.4, oder Kerner und v. Wahl 7.3.10).
Gegeben eine Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots$, ergeben sich aus den Axiomen des Vektorraumes Rechenregeln für die Komponenten von Vektoren. Damit lässt sich (zumindest in endlichdimensionalen Vektorräumen) mit Vektoren wie mit Zahlen rechnen. Zum Beispiel sind zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ dann und nur dann gleich, wenn ihre Komponenten gleich sind, denn die Darstellung eines Vektors $\vec{x}$ in einer Basis als $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ ist eindeutig. Weitere Rechenregeln sind

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ \lambda\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Aufgabe

Leiten Sie den Rest der Rechenregeln aus den Axiomen des Vektorraumes her.

1.5 Das Skalarprodukt und die Norm



Beispiel

Betrachten wir die Verschiebung $\vec{v}$ eines Massepunktes gegen eine konstante Kraft. In *einer* Dimension ist die Arbeit, die die Kraft am Massepunkt verrichtet, definiert als vF. v und F sind die Komponenten der Verschiebung und Kraft. In mehr als einer Dimension trägt nur die Komponente der Verschiebung parallel zur Kraft zur Arbeit bei.
Zerlegt man Kraft und Verschiebung in die Komponenten einer orthonormalen Basis (aus Vektoren der Länge eins, die senkrecht aufeinander stehen, siehe unten), $\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3$ und $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$ kann man die Punktmasse zunächst um die Distanz v_1 entlang von $\vec{e}_1$ verschieben, dann um v_2 entlang von $\vec{e}_2$, und schließlich um v_3 entlang $\vec{e}_3$. Die dabei insgesamt an der Punktmasse verrichtete Arbeit ist

$$v_1F_1 + v_2F_2 + v_3F_3 \ . \tag{1.13}$$

Warum ist die Kraft ein Vektor? Die Beschleunigung ist ein Vektor, implizit aus dem zweiten Newtonschen Gesetz ist damit auch die Kraft gleich Masse (Skalar) mal Beschleunigung ein Vektor. Siehe 2.4.1.

Formal handelt es sich bei der Arbeit um eine Abbildung von zwei Vektoren (Verschiebung, Kraft) auf eine reelle Zahl (Arbeit, eine sogenannte **skalare** Größe). Wir führen eine neue Verknüpfung von zwei Vektoren auf die reellen Zahlen ein, das sogenannte Skalarprodukt oder innere Produkt $V \times V \to \mathbb{R}, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$.
Wir beginnen im dreidimensionalen (affinen) Raum und wählen einen Ursprung und ein Basis aus drei rechtwinklig zueinander stehenden Vektoren der Länge eins. Eine solche Orthonormalbasis lässt sich aus einem kartesischen Koordinatensystem konstruieren (siehe 0.1.1), indem man vom Ursprung aus jeweils eine Verschiebung eine Längeneinheit in Richtung der x-,y-, und z-Achsen betrachtet[2].
In orthonormaler Basis definieren wir das **Skalarprodukt** von zwei Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, als

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + \ldots v_nw_n \tag{1.14}$$

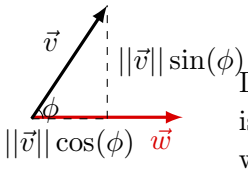
Damit ist Arbeit definiert als das Skalarprodukt von Kraft und Verschiebung. Räume, in denen das obige Skalarprodukt definiert ist, heißen **euklidisch**, (1.14) wird auch als das euklidische oder kanonische oder Standard-Skalarprodukt bezeichnet.
Aus dem euklidischen Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst lässt sich die **euklidische Norm** $||\vec{v}||$ definieren

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots} \ . \tag{1.15}$$

Geometrische Interpretation

Das Skalarprodukt hat eine geometrische Interpretation: Wählen wir die (orthonormalen) Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ in der Ebene, die von $\vec{v}, \vec{w}$ aufgespannt wird, und $\vec{e}_1$ parallel zu $\vec{w}$, dann gilt $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + \ldots = v_1w_1 = (||\vec{v}|| \cos(\phi))(||\vec{w}||) = ||\vec{v}||\,||\vec{w}|| \cos(\phi)$.

[2]Zur Konstruktion der kartesischen Basis benötigen wir Achsen, die senkrecht aufeinander stehen; um eine Definition dieses Begriffes kommen wir also nicht herum. Wenn wir Längen messen können, ist das leicht zu erreichen: Zwei Achsen stehen senkrecht aufeinander wenn die beiden Punkte die jeweils eine Längeneinheit vom Ursprung entfernt sind die Distanz $\sqrt{2}$ haben.



Damit gibt das Skalarprodukt an, wie stark sich zwei Vektoren "ähnlich" sind: $\vec{v}\cdot\vec{w}/(||\vec{v}||\,||\vec{w}||)$ ist 1, wenn $\vec{v}=\vec{w}$, es ist 0 wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen, und -1 wenn $\vec{v}=-\vec{w}$. In euklidischen Räumen gilt damit die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq ||\vec{v}||\;\|\vec{w}\| \;.$$

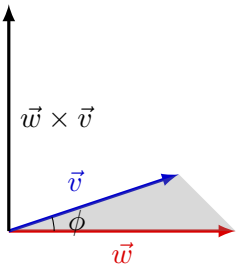
1.6 Das Kreuzprodukt

Ein weiteres Produkt von zwei Vektoren kann im dreidimensionalen Raum definiert werden. Als Ergebnis dieser neuen Multiplikation von zwei Vektoren erhalten wir einen weiteren Vektor. Am leichtesten läßt sich das sogenannte Kreuzprodukt in einer kartesischen Basis definieren. Wir betrachten eine sogenanntes **rechtshändiges** kartesisches Basissystem im dreidimensionalen Raum, bei der die Basisvektoren $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ orthonormal sind und wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger Ihrer rechten Hand angeordnet sind (ein sogenanntes Rechtssystem bilden). Das **Kreuzprodukt** zwischen $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ ist in einer solchen Basis definiert als

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2\\ v_3w_1 - v_1w_3\\ v_1w_2 - v_2w_1\end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Geometrische Interpretation

1. $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ steht.



$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= v_1v_2w_3 - v_1v_3w_2\\ &\quad + v_2v_3w_1 - v_2v_1w_3\\ &\quad + v_3v_1w_2 - v_3v_2w_1\\ &= 0\;,\end{aligned} \tag{1.17}$$

und analog für $\mathbf{w}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$.

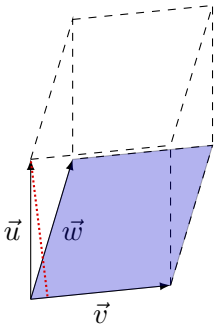
2. $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\sin\phi$, wobei ϕ der Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ ist.

$$\begin{aligned} ||\mathbf{v}\times\mathbf{w}||^2 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2 &= v_2^2w_3^2 - 2v_2w_3v_3w_2 + v_3^2w_2^2\\ &\quad + v_3^2w_1^2 - 2v_3w_1v_1w_3 + v_1^2w_3^2\\ &\quad + v_1^2w_2^2 - 2v_1w_2v_2w_1 + v_2^2w_1^2\\ &\quad + (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)^2\\ &= (v_1^2+v_2^2+v_3^2)(w_1^2+w_2^2+w_3^2)\\ &= \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2\\ \curvearrowright \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|^2 &= \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2 = (1-\cos^2\phi)\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2\\ &= \sin^2\phi\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2\end{aligned} \tag{1.18}$$

Damit ist das Kreuzprodukt von zwei Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ ein Vektor, der senkrecht auf der von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Ebene steht.
3. Diese geometrische Interpretation lässt allerdings noch die Richtung des Kreuzproduktes frei. Nach der Definition (1.16) folgt diese der "Rechte-Hand-Regel": Daumen = $\mathbf{v}$; Zeigefinger = $\mathbf{w}$; Mittelfinger = $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Daraus folgt auch die wichtigste algebraische Eigenschaft des Kreuzproduktes, es ist **antikommutativ**, $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$.
Das Kreuzprodukt zweier Verschiebungen $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ist selbst keine Verschiebung, denn die Einheiten sind [Länge]^2 nicht [Länge]. Es beschreibt vielmehr eine Fäche, nämlich das von seinen beiden Argumenten aufgespannte Parallelogramm. Dabei beschreibt die Richtung von $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ die Orientierung des Parallelogramms im Raum, die Norm von $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ seinen Flächeninhalt.

Info:

Das Kreuzprodukt hängt in zwei Punkten von der Wahl der Basis ab: in seiner Orientierung senkrecht zur von $\vec{v}, \vec{w}$, aufgespannten Oberfläche und in seiner Norm durch die Wahl der Längeneinheit. Es ist nur in drei Dimensionen definiert. Trotz dieser klaren Mängel wird ihnen das Kreuzprodukt an vielen Stellen begegenen. Wen diese Beschränkungen irritieren: eine allgemeine Definition findet sich im Rahmen des Cartan-Kalküls (Vorlesungen "Differentialgeometrie" oder "Geometrie in der Physik").



Das Kreuzprodukt und Flächen und Volumina

Das Kreuzprodukt $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ist nützlich um die Fläche des von $\vec{v}$ und von $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms zu berechnen (durch die Norm von $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$). Eine weitere wichtige Anwendung aus der Geometrie betrifft den von drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Körper, der sogenannte **Spat** oder das **Parallelepiped**. Sein Volumen ist die Grundfläche (das von $\vec{v}, \vec{w}$ aufgespannte Parallelogramm), mal die Höhe des Parallelepipeds (senkrecht zur Grundfläche, gepunktete Linie in rot). Da $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ senkrecht zur Grundfläche steht ist das orientierte Volumen damit $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, da das Skalarprodukt von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ gleich der Grundfläche mal die Komponente von $\vec{u}$ senkrecht zur Grundfläche ist[3]. Welches Paar der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ man zur Definition der Grundfläche nimmt kann dabei keine Rolle spielen, wir erwarten also $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ [4].

Das Kreuzprodukt und Rotationen

Die wichtigste Anwendung des Kreuzproduktes in der Mechanik liegt in Verbindung mit Rotationen. Betrachten wir eine sich drehende Scheibe und konstruieren einen Vektor ω, der senkrecht zur Scheibe steht und als Norm die Winkelgeschwindigkeit hat (2π/Drehperiode). Jeder Punkt auf der Scheibe bewegt sich nun mit einer anderen Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Legen wir

[3] Das orientierte Volumen gibt über das Vorzeichen außer dem Volumen noch die Orientierung der Elemente des Spats an: das orientierte Volumen hat einen positiven Wert, wenn die 3 Elemente des Spats ein rechtshändiges System bilden, einen negativen Wert für ein linkshändiges System. Das Volumen des Spats ist dann einfach der Betrag des orientierten Volumens.

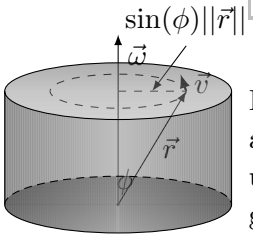
[4] Bei diesen **zyklischen Vertauschungen** bleibt die Reihenfolge der drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ erhalten. Damit bleibt die Orientierung des Spats erhalten, z.B. bilden $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ ein rechtshändiges System wenn $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ein rechtshändiges System bilden.

den Ursprung in den Scheibenmittelpunkt, bewegt sich jeder Punkt auf der Scheibe senkrecht zu seinem Ortsvektor *und* senkrecht zu dem Winkelgeschwindigkeitsvektor ω, die ihrerseits senkrecht aufeinanderstehen. Betrag der Geschwindingkeit is $||\mathbf{r}||||\omega||$ und somit

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \ . \tag{1.19}$$

Aufgabe

Hier haben wir uns auf eine Scheibe beschränkt, so dass $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ senkrecht aufeinander stehen. Betrachten Sie einen rotierenden Zylinder, um zu zeigen, dass dieses Ergebnis allgemein gilt. (Hinweis: Nutzen Sie dass der Abstand eines Punktes von der Rotationsachse $\sin(\phi)||\vec{r}||$ ist.) Zeigen Sie, dass dieses Ergebnis für beliebiger Körper bei Rotation mit fester Drehachse gilt.



Es macht Sinn, die Winkelgeschwindigkeit als Vektor zu definieren, da sich Winkelgeschwindigkeiten additiv verhalten. Betrachten wir eine Scheibe die sich mit Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_1$ dreht, und die sich in einem System befindet, das seinerseits mit Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_2$ rotiert gilt für die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ am Punkt $\mathbf{r}$ $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}$.
Es stellt sich heraus, dass die Definition der Winkelgeschwindigkeit als Vektor nur in drei Dimensionen funktioniert (genauer: das Kreuzprodukt ist nur in 3 Dimensionen definiert). Eine allgemeinere Definition werden wir später im Rahmen der Tensorrechnung kennenlernen.

Zusammenfassung:

- Ein Vektorraum ist eine Menge von Objekten, die paarweise addiert werden können und mit Zahlen multipliziert werden können. (Genaugenommen: Ein Vektorraum ist diese Menge, sowie eine additive Verknüpfung von Vektoren und eine multiplikative Verknüpfung von Vektoren mit Zahlen.) Ein wichtiges Beispiel sind Verschiebungen.

- Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren. Ein Vektor $\vec{v}$ lässt sich als Linearkombination von Basisvektoren schreiben $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 + \ldots v_n\vec{e}_n$. Die Zahlen $v_1, \ldots, v_n$ heißen Komponenten des Vektors in der Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

- In einigen Vektorräumen (Skalarprodukträumen) lässt sich eine Verküpfung definieren, die zwei Vektoren eine Zahl (Skalar) zuordnet, das sogenannte Skalarprodukt. In einer kartesischen Basis definiert $\vec{v}\cdot\vec{w} \equiv \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + \ldots v_nw_n$ das euklidische Skalarprodukt.

- Im dreidimensionalen Raum lässt sich eine Verknüpfung definieren, die zwei Vektoren wieder einen Vektor zuordnet. Dieses Kreuzprodukt zweier Vektoren ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet. Seine Länge entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektore aufgespannt wird.

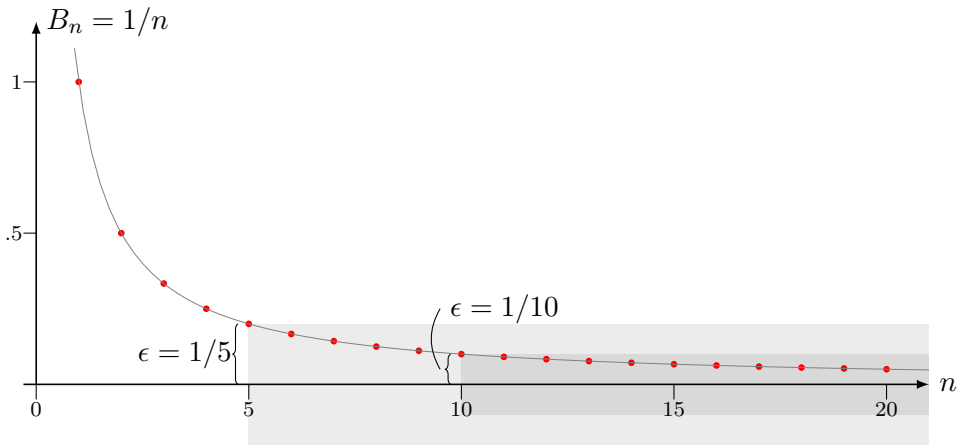
Zwei

Analysis

Analysis beinhaltet die Themen Grenzwerte, Differentiation und Integration. In der Physik spielen diese Themen eine zentrale Rolle bei der Beschreibung der Veränderung physikalischer Größen in Raum und Zeit: die Position eines Teilchens als Funktion der Zeit in der Mechanik, oder die räumliche und zeitliche Änderung elektromagnetischer Felder. Wir diskutieren die Differentiation von Funktionen einer und mehrerer Veränderlicher sowie Integrale über eine und mehrere Variablen.

Einiges dieser Themen ist Ihnen aus der Schule geläufig, wir beginnen daher nur mit einem kurzen Abriss der Themen Folgen und Reihen, Grenzwert, Differentiation und Integration von Funktionen einer Veränderlichen. Eine tiefere Darstellung bleibt den Analysis-Vorlesungen vorbehalten, die die meisten von Ihnen hören werden. Zentraler Begriff ist der Grenzwert einer Folge oder einer Funktion. Mit Hilfe des Grenzwerts einer unendlichen Folge von Zahlen lernen wir Summen mit einer unendlichen Zahl von Termen zu berechnen. Praktische Anwendungen liegen in der Entwicklung von Funktionen als Potenzenreihen, sogenannte Taylorreihen; weite Teile der theoretischen Physik fußen auf kunstvollen Reihenentwicklungen.

2.1 Folgen



Wir betrachten eine (unendliche) **Folge** von Zahlen $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Ein Beispiel ist die Folge

$1, 1/2, 1/3, \ldots$ mit $B_n = 1/n$. Die Abbildung zeigt, wie die Terme B_n für wachsendes n immer näher an Null heranrücken, ohne die Null für endliche n je zu erreichen. Dennoch rückt $1/n$ für wachsende n beliebig nahe an die Null heran. Dieses "beliebig nahe" lässt sich präzise fassen: egal wie klein man $\epsilon > 0$ wählt, gibt es immer ein N, so dass für alle $n > N$ die Differenz zwischen B_n und einer Zahl B kleiner ist als ϵ. In diesem Beispiel ist $B = 0$. Die Abbildung zeigt Beispiele für $\epsilon = 1/5$ und $1/10$. Existiert für eine Folge für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$ gilt $|B_n - B| < \epsilon$, so nennen wir die Folge **konvergent** mit **Grenzwert** oder **Limes** B und schreiben $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Diese Definition beschreibt das Verhalten der Folge B_n für unendliche n, kommt aber selbst eleganterweise völlig ohne den Begriff "unendlich" aus.

Beispiel

Wir zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} 1/n$ gleich Null ist. Für ein gegebenes $\epsilon > 0$ wählen wir $N \in \mathbb{N}$ größer $1/\epsilon$. Also gilt für alle $n > N$ dass $|B_n - B| = |1/n - 0| = 1/n < 1/N < \epsilon$, wobei die erste Ungleichung aus $n > N$, die zweite aus $N > 1/\epsilon$ folgt. (Überzeugen Sie sich, dass dies für andere Werte von B als Null nicht gilt.)

2.2 Reihen

Wir betrachten Folgen, deren einzelne Terme durch Summen gebildet werden. Eine Folge von Zahlen, die durch die **Teilsummen** $b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, \ldots$ gebildet wird,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \ , \tag{2.1}$$

heißt **Reihe**. Ist die Folge dieser Teilsummen konvergent, sprechen wir von einer **konvergenten Reihe**. Damit läßt sich auch einer Summe mit unendlich vielen Termen ein Wert zuweisen, nämlich der Grenzwert der Folge $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Informell bezeichnet man $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ als Reihe und meint die Folge der Teilsummen (denn nur dann kann man Konvergenz definieren).

Beispiel

Als Beispiel betrachten wir die sogenannte **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots = 1.1111\ldots, & \text{für } x = 0.1 \\ 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots, & \text{für } x = 2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ob die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergent ist oder nicht hängt also von x ab. Die Summe B_n

der ersten Terme bis x^n dieser Reihe lässt sich leicht berechnen

$$(1-x)B_n = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} \tag{2.3}$$
$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^n) - (x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}$$
$$B_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$
$$\curvearrowright B = \lim_{n\to\infty} B_n = \frac{1}{1-x} \text{ für } |x| < 1$$

Das letzte Gleichheitszeichen der zweiten Zeile ergibt sich, weil sich alle Terme in $\sum_{k=0}^{n} x^k$ und $-\sum_{k=0}^{n} x^{k+1}$ gegenseitig wegheben, bis auf den ersten und den letzten Term. Für $n \to \infty$ geht x^k gegen Null, wenn $|x| < 1$. Die geometrische Reihe konvergiert also für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

2.2.1 Potenzreihen

Reihen $\sum_{k=0} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, $a_k \in \mathbb{R}$ aus unterschiedlichen Potenzen einer Variablen heißen **Potenzreihen**. Die geometrische Reihe (2.2) ist ein Beispiel für eine Potenzreihe, mit $a_k = 1\,\forall k$. Bricht man die Reihe nach einer n Termen ab, so erhält man ein Polynom $n-1$-ter Ordnung.
Grund sich mit Potenzreihen zu beschäftigen ist, dass sich eine Vielzahl von Funktionen durch unendliche Potenzreihen darstellen lässt. Bricht man die Potenzreihe nach einer endlichen Zahl von Termen ab erhält man oft eine nützliche Näherung. Wir werden diesem Gedanken noch in Abschnitt 2.5 nachgehen.

Der Konvergenzradius

Hängen die Terme einer Reihe von einem Parameter x ab, kann es also sein, dass die Reihe für bestimmte Werte von x konvergiert, für andere aber nicht. Mit der geometrischen Reihe (2.2) haben wir ein Beispiel kennengelernt.
Nehmen wir an, eine Potenzreihe in $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiere für einen bestimmten Wert von $x = x_1 \neq 0$. Also ist $|a_k x_1^k| \leq C\ \forall k$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine endliche Konstante ist, denn $a_k x_1^k$ kann nicht beliebig mit k wachsen. Aus $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x_1^k \left(\frac{x}{x_1}\right)^k$ folgt damit, dass jeder Term in $\sum a_k x^k$ betragsmäßig kleiner ist als die Terme in

$$\sum_{k=0}^{\infty} C \left|\frac{x}{x_1}\right|^k .$$

Für $|x| < |x_1|$ konvergiert diese geometrische Reihe, und da Reihe $\sum_k a_k x^k$ nur betragsmäßig kleinere Terme enthält konvergiert auch sie. D. h. wenn eine Reihe für einen Wert von $x = x_1$ konvergiert, muss sie das für alle betragsmäßig kleineren Werte auch tun.
Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gibt es also ein $\rho \in [0, \infty]$ mit der Eigenschaft, dass die Reihe für $|x| < \rho$ konvergiert, und für $x > \rho$ divergiert. ρ heißt **Konvergenzradius**. Über das Verhalten der Potenzreihe bei $x = \rho$ macht dieser Satz übrigens keine Aussage, dort gibt es

auch kein allgemeine gültiges Verhalten: es gibt Reihen die am Konvergenzradius konvergieren, Reihen die divergieren, oder sogar an einem Punkt konvergiere, an einem anderen divergieren.

Ausblick (ohne Beweise)

- Der Konvergenzradius lässt sich durch einen Grenzwert $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ bestimmen, wenn ab einem bestimmten n alle a_n von Null verschieden sind, und wenn der Grenzwert existiert. (Für den Fall, dass er nicht existiert, s. Satz von Cauchy-Hadamard.)
- Eine Reihe heißt **absolut konvergent**, wenn auch die Reihe ihrer Absolutbeträge konvergiert. $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ konvergiert. Innerhalb ihres Konvergenzradius ist jede Reihe absolut konvergent.
- Absolut konvergente Reihen können Term für Term multipliziert werden

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\ \left(\sum_{k'=0}^{\infty} b_{k'}\right) = \sum_{k,k'}^{\infty} a_k b_{k'}$$

- eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ heißt **gleichmäßig konvergent** in einem Bereich $D \subset \mathbb{R}$ wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n > N \forall x\ \in D\ \ \left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right| < \epsilon$$

  Dies ist ein strengeres Kriterium als Konvergenz an jedem einzelnen Punkt x; eine Beziehung zwischen N und ϵ muss jetzt statt an einem einzelnen Punkt im gesamten Definitionsbereich der Funktion gelten. Innerhalb ihres Konvergenzradius konvergieren Potenzreihen gleichmäßig.

- Gleichmäßig konvergente Potenzreihen können Term für Term differenziert und integriert werden

$$\int dx \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\int dx\ a_k x^k\right)$$

  und Grenzwerte vertauschen bei gleichmäßiger Konvergenz der Reihe

$$\lim_{x\to A} \lim_{y\to B} f(x,y) = \lim_{y\to B} \lim_{x\to A} f(x,y)\ .$$

Der Beweis dieser Aussagen ist ein wichtiger Teil von Vorlesungen in Analysis.

2.3 Grenzwert von Funktionen

2.3.1 Grenzwert einer Funktion bei unendlichem Argument

Die Definition der Konvergenz einer Folge lässt sich leicht auf Funktionen verallgemeinern. Damit können wir dann das Verhalten einer Funktion (z.B $1/x$) für große Werte des Arguments

charakterisieren. Eine Funktion $f(x)$ hat den Grenzwert F bei unendlich, wenn man für jedes $\epsilon > 0$ ein Wert von x (nennen wir ihn δ) existiert, so dass sich rechts von diesem Wert die Funktion weniger als ϵ von F unterscheidet. In kompakter Form hat die Funktion f für $x \to \infty$ den **Grenzwert** F, wenn $\forall\epsilon > 0 \exists\delta : \forall x > \delta |f(x) - F| < \epsilon$. Man sagt auch die Funktion konvergiert für $x \to \infty$ gegen F.

Beispiel

Wir suchen den Grenzwert von $1/x$ bei unendlich und prüfen ob dieser gleich Null ist. Für jedes $\epsilon > 0$ können wir ein δ angeben, so dass für $x > \delta$ $1/x$ weniger als ϵ von null abweicht, nämlich $\delta = 1/\epsilon$.

Es gibt Funktionen, die ohne obere Schranke im Unendlichen anwachsen, z.B. $f(x) = x$. Für jedes T gibt es also ein Zahl (nennen wir sie wieder δ), so dass rechts davon die Funktion stets grösser als T ist. Man sagt der Grenzwert von f bei $x \to \infty$ ist unendlich, wenn $\forall T \exists\delta : \forall x > \delta f(x) > T$. Analog kann mit mit $f(x) < T$ der Grenzwert $-\infty$ definiert werden. Der Grenzwert einer Funktion bei $-\infty$ ist analog definiert, nur dass nun für $x<\delta$, $|f(x)-F| < \epsilon$ gefordert ist, bezw. $x<\delta$, $f(x) > T$.

2.3.2 Grenzwert einer Funktion bei endlichem Argument

Oft sind auch Grenzwerte bei endlichem Argument interessant, z.B. wenn die Funktion an einem bestimmten Punkt nicht definiert ist. Ein Beispiel werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen.
Betrachten wir als Beispiel $g(x) = (x - x_0)^2$. (Dort ist tatsächlich die Funktion bei x_0 definiert.) Nähert sich x dem Wert x_0, nähert sich $g(x)$ der Null an. Was bedeutet das "nähert sich der Null an"? Eine Abweichung von 10^{-10} von Null? Oder 10^{-100}?
Der Sachverhalt lässt sich wieder präziser formulieren: Fordern wir, dass der Abstand zwischen $g(x)$ und 0 einen Wert $\epsilon > 0$ nicht übersteige. Dabei können wir ϵ so klein wählen wie wir wollen. Dann gibt es in unserem Beispiel einen Wert δ, so dass sobald x näher als δ an x_0 liegt, diese Forderung erfüllt ist, d.h. $|g(x)| < \epsilon$. Geometrisch betrachtet liegt die Funktion innerhalb eines Kastens mit Seitenlänge 2δ und Höhe 2ϵ um x_0 und den Grenzwert 0.
Diese Denkweise wird zur Definition des Grenzwertes einer Funktion genutzt: Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Punkt, bei dem in jeder Umgebung unendlich viele Elemente von X liegen[1]. Gibt es für *jedes* $\epsilon > 0$ ein δ, so dass für alle $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt $|g(x) - G| < \epsilon$, dann bezeichnen wir G als **Grenzwert** von $g(x)$ für x gegen x_0, oder $\lim_{x\to x_0} g(x) = G$. Der Unterschied zwischen dem Funktionswert $g(x)$ und dem Grenzwert wird also beliebig klein, wenn man x genügend nahe bei x_0 wählt. Dazu muss $g(x)$ bei x_0 nicht einmal definiert sein.

[1] Hier fehlt noch der Begriff der Umgebung eines Punktes. Für reelle Zahlen ist das einfach, gegeben ein $\epsilon > 0$ ist die ϵ-Umgebung von x_0 die Menge aller Punkte mit $|x - x_0| < \epsilon$.

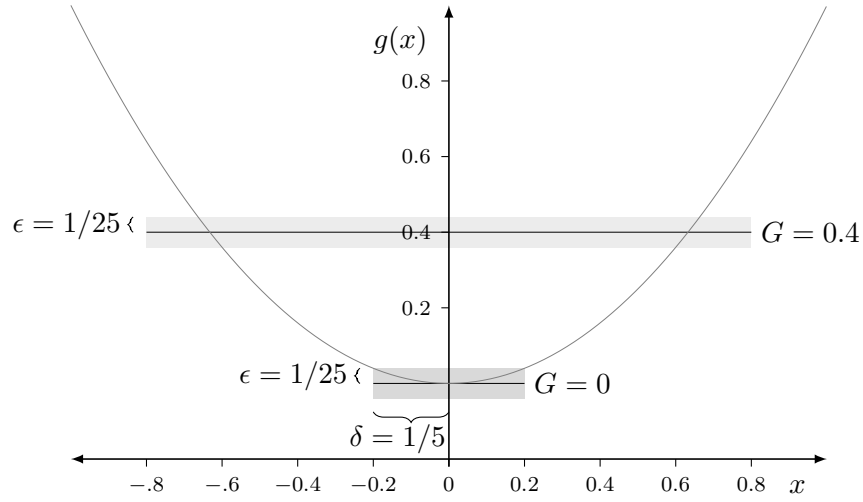


Figure 2.1: Grenzwert von $g(x) = x^2$ für $x \to 0$. Für $G = 0$ und $\epsilon = 1/25$ existiert ein δ, so dass für $-\delta < x < \delta$ gilt $|g(x) - G| < \epsilon$ (dunkelgraue Fläche). Ein solches δ lässt sich für jedes $\epsilon < 0$ finden. Für $G = 0.4$ allerdings lässt sich für $\epsilon = 1/25$ kein solches δ finden (hellgraue Fäche).

Beispiel

In unserem Beispiel $g(x) = (x - x_0)^2$ ist $g(x) - 0 < \epsilon$ für alle Werte von x mit $|x - x_0| < \delta = \sqrt{\epsilon}$. $g(x) - G < \epsilon$ für alle Werte von x im Intervall $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ lässt sich nur mit $G = 0$ für alle Werte von ϵ erfüllen. $G = 0$ ist daher als Grenzwert eindeutig bestimmt, siehe Abbildung.

Aus diesem Beispiel entnehmen wir, dass sich Grenzwerte nicht einfach "ausrechnen" lassen, wir haben zunächst G geraten und verifiziert. (Wir hätten aber auch nicht geraten, dass $(x - x_0)^2$ nahe bei x_0 andere Werte als solche nahe bei Null annimmt.)

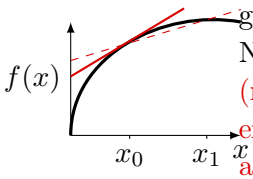
An Punkten, bei denen die Funktion einen Sprung hat, gibt es nach dieser Definition keinen Grenzwert. Ein Beispiel ist die Funktion $\mathrm{sgn}(x)$, die das Vorzeichen von x angibt und bei $x = 0$ von -1 nach 1 springt. Hier ist die Definition eines rechtseitigen und eines linksseitigen Grenzwertes sinnvoll. Wir ersetzten $0 < |x - x_0| < \delta$ durch $0 < x - x_0 < \delta$ zur Definition des rechtsseitigen Grenzwertes und durch $0 > x - x_0 > -\delta$ zur Definition des linksseitigen Grenzwertes. Geometrisch ist die damit einfach die "Kiste" mit Breite 2δ um x_0 herum ersetzt durch ihre rechte bezw. linke Hälfte. Damit hat $\mathrm{sgn}(x)$ bei $x = 0$ den rechtsseiteigen Grenzwert 1 aber den linksseitgen Grenzwert -1, wir schreiben $\lim_{x \to 0^+} \mathrm{sgn}(x) = 1$ und $\lim_{x \to 0^-} \mathrm{sgn}(x) = -1$.

2.4 Differentiation

2.4.1 Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen

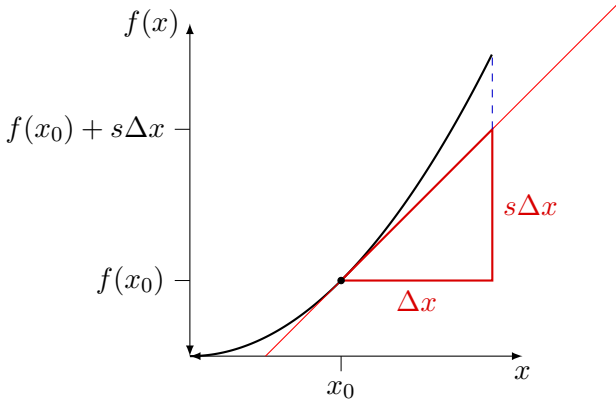
Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ beschreibt die Steigung $s = f'(x = x_0)$ von $f(x)$ am Punkt x_0. Diese Formulierung verdeckt allerdings, wie nützlich das Konzept der Ableitung in der Praxis ist: Für eine hinreichend "glatte" Funktion schmiegt sich $f(x)$ bei x_0 an die Gerade

durch den Punkt mit Koordinaten $(x_0, f(x_0))$ mit Steigung s, $f(x)$ kann also nahe x_0 durch diese Gerade approximiert werden.



Wie können wir diese Ableitung (Steigung der Tangente zu $f(x)$ an einem Punkt x_0) bestimmen? Eine Gerade durch die Punkte mit Koordinaten $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ (genannt **Sekante**) hat Steigung $S = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Je näher x_1 bei x_0 liegt, desto besser approximiert S die Steigung von $f(x)$ bei x_0. Setzt man aber einfach $x_1 = x_0$ ist allerdings der Nenner dieses Bruchs Null! Wir nutzen daher den Grenzwert: Der Grenzwert $f'(x) = \lim_{\delta x\to 0^+} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$ heißt (rechte) **Ableitung** einer Funktion $f(x)$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) am Punkt x (wenn der Grenzwert existiert). Analog definiert $\lim_{\delta x\to 0^-} \frac{f(x-\delta x)-f(x)}{\delta x}$ die linke Ableitung, die sich von der rechten aber nur unterscheidet wenn f bei x einen Knick hat. wir haben hier x_1 durch $x+\delta x$ ersetzt und x_0 durch x, equivalent hätten wir auch $f'(x_0) = \lim \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ schreiben können. Sie Schreiweise $s = f'(x)$ zeigt an, dass die Steigung der Funktion f vom Wert von x abhängt. Ebenso gebräuchlich ist die Notation $\frac{df}{dx} = f'(x)$. Damit ist allerdings kein Bruch gemeint, df und dx haben hier keine eigenständige Bedeutung. Um anzuzeigen, an welchem Punkt die Ableitung ausgewertet wird, schreibt man manchmal auch $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$ oder $f'(x_0) = \frac{df}{dx}|_{x_0}$.

Für kleine δx lässt sich $f(x+\delta x)$ nähern durch $f(x+\delta x) \approx f(x) + \delta x s$ mit $s = f'(x)$: Betrachten wir ein Dreieck mit Kantenlängen δx und $s\Delta x$ (siehe Abbildung rechts). Die gestrichelte blaue Linie gibt den Fehler an, den wir machen, wenn wir die Funktion bei x durch eine Gerade mit Steigung s nähern. Schreiben wir diesen Fehler als $\phi(\delta x, x)$ erhalten wir



$$f(x+\delta x) = f(x) + \delta x f'(x) + \phi(\delta x, x) \ , \qquad (2.4)$$

Das zweite Argument von $\phi(\delta x, x)$ werden wir im folgenden nicht immer mitschreiben.

Setzen wir in (2.4) $\delta x = 0$ ein erhalten wir $\phi(0) = 0$. Umstellen der einzelnen Terme führt auf $f'(x) = \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} - \frac{\phi(\delta x)}{\delta x}$. Im Grenzfall $\delta x \to 0$ ist der erste Term gleich der Definition der Ableitung, d.h. $\lim_{\delta x\to 0} \frac{\phi(\delta x)}{\delta x} = 0$. Der Fehler $\phi(\delta x)$ verschwindet also bei $\delta x = 0$ und er schrumpft dabei schneller als eine lineare Funtion $a\delta x$ ($a \neq 0$).

Beispiel

Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2$. Mit $(x+\delta x)^2 = x^2 + 2x\delta x + \delta x^2$ ist

$$f'(x) = \lim_{\delta x\to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0} \frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0} (2x + \delta x) = 2x \ . \qquad (2.5)$$

Die Ableitung höherer Polynome lässt sich analog herleiten. Bei der Ableitung von Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ erhalten wir

$$f'(x) = \lim_{\delta x\to 0} \frac{a^{x+\delta x} - a^x}{\delta x} = a^x \lim_{\delta x\to 0} \frac{a^{\delta x} - 1}{\delta x} \ . \qquad (2.6)$$

Ableitung der Exponentialfunktion ist also die Exponentialfunktion selbst, mal eine Konstante. $e = 2.7182818284590\ldots$ ist definiert als die einzige positive Zahl für die diese Konstante den Wert eins hat; $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$, damit ist die Exponentialfunktion e^x gleich ihrer Ableitung.

Für die Ableitung von Summen, Produkten und Quotienten gelten Regeln, die sie aus der Schule kennen, und sich mit (2.4) herleiten lassen. Als Beispiel leiten wir die sogenannte Kettenregel her.

Beispiel

Wir leiten die sogenannte Kettenregel für die Ableitung einer Verkettung von Funktionen $(g \circ f)x \equiv g(f(x))$ her. Analog zu (2.4) schreiben wir

$$g(y+\delta y) = g(y) + \delta y g'(y) + \psi(\delta y) \tag{2.7}$$

und setzen dann $y = f(x)$. Aus (2.4) erhalten wir $\delta y \equiv f(x+\delta x) - f(x) = \delta x f'(x) + \phi(\delta x)$, setzen dieses Ergebnis in die Gleichung für $g(y+\delta y)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} g(f(x+\delta x)) &= g(f(x)) \\ &\quad + [\delta x f'(x) + \phi(\delta x)]\, g'(f(x)) + \psi(\delta x f'(x) + \phi(\delta x)) \ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Aus der Differenz der linken Seite $g(f(x+\delta x))$ und dem ersten Term der rechten Seite $g(f(x))$ bilden wir die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g(f(x)) &\equiv \lim_{\delta x\to 0} \frac{g(f(x+\delta x)) - g(f(x))}{\delta x} \\ &= g'(f(x))f'(x) + \lim_{\delta x 0} \frac{1}{\delta x} \left[\phi(\delta x) g'(f(x)) + \psi(\delta x f'(x) + \phi(\delta x))\right] \\ &= g'(f(x))f'(x) \ . \end{aligned} \tag{2.9}$$

und erhalten die bekannte Kettenregel. Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass $\phi(0) = 0$, $\lim_{\delta x\to 0} \frac{\phi(\delta x)}{\delta x} = 0$, und analog für ψ.

$\mathcal{O}$- und o-Notation

Wir sagen ein Ausdruck $\phi(x)$ sei bei x_0 von der **Ordnung** $(x-x_0)^n$ wenn $\lim_{x\to x_0} |\phi(x)/(x-x_0)^n| < \infty$, d.h. das Verhältnis von $\phi(x)$ und $(x-x_0)^n$ ist in der Nähe von x_0 endlich[2] . Wir schreiben dann $\phi(x) = \mathcal{O}((x-x_0)^n)$.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = 3x^2 + 15x^3 + 17x^4$ ist für kleine x von der Ordnung x^2, denn $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}(3 + 15x + 17x^2) = 3$ liegt zwischen 0 und ∞, also ist $f(x) = \mathcal{O}(x^2)$ (für $x \to 0$). Analog ist auch $f(x) = 3x^2 + \mathcal{O}(x^3)$, womit wir anzeigen, dass wir bei kleinen Werten von x den Beitrag $15x^3 + 17x^4$ zu $f(x)$ gegenüber dem Beitrag von $3x^2$ vernachlässigen können.

[2] Genaugenommen handelt es sich um den limes superior, einer Verallgemeinerung des Grenzwertes, mit dem auch oszillierende Funktionen betrachtet werden können.

Info:

Die $\mathcal{O}$-Notation lässt sich auch auf Funktionen, die kleine Polynome sind, verallgemeinern. $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ wenn $\lim_{x\to x_0} |f(x)/g(x)| < \infty$. Der Wert von x_0 taucht in der Notation nicht auf, er muss aus dem Kontext folgen. Oft sind wir auch an der Asymptotik einer Funktion im Unendlichen interessiert, für $x \to \infty$ ist zum Beispiel $\sinh(x) \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathcal{O}(e^x)$.

Eine weitere Notation gibt an, wenn eine Funktion klein ist im Vergleich zu einer anderen: mit einem kleinen *o*. $\phi(x)$ ist bei x_0 gegenüber $(x - x_0)^n$ **asymptotisch vernachlässigbar**, wenn $\lim_{x\to x_0} \phi(x)/(x - x_0)^n = 0$. Wir schreiben dann $\phi(x) = o((x - x_0)^n)$.
In (2.4) haben wir herausgefunden, dass für den Fehler $\phi(x)$ gilt

$$\lim_{x\to x_0} \phi(x) = 0$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0 \tag{2.10}$$

und wir schreiben $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)$, oder $\delta f = \delta x f'(x_0) + o(x - x_0)$ [3]. Diese Notation lässt sich zu einer kurzen Herleitung der Kettenregel nutzen mit

$$g(f(x + \delta x)) = g\left(f(x) + \delta x f'(x) + o(\delta x)\right) = g(f(x)) + g'(f(x))\delta x f'(x) + o(\delta x) \tag{2.11}$$

woraus direkt die Kettenregel folgt.

Ableitung eines Vektors

Die Definition der Ableitung funktioniert ohne Modifikation auch für die Ableitung eines Vektors, der von einer Veränderlichen abhängt. Ein Beispiel ist die Bahnkurve, die die Bewegung eines Massepunktes beschreibt, siehe Abschnitt 1.2. Mathematisch beschreiben wir diese Bahnkurve durch die (vektorwertige) Funktion $\vec{r}(t)$. Der Vektor $\vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)$ (Differenz zweier Vektoren) gibt die Verschiebung des Massepunktes zwischen den Zeitpunkten t und $t + \delta t$ an. Teilen wir durch δt, erhalten wir im Grenzfall $\delta t \to 0$ die **Vektorgeschwindigkeit**

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)}{\delta t} \ . \tag{2.12}$$

Bei zeitlich konstanten Basisvektoren sind die Komponenten der Vektorgeschwindigkeit leicht zu bestimmen,

$$\vec{v}(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{dr_i}{dt}\vec{e}_i \ , \tag{2.13}$$

somit sind die Komponenten der Vektorgeschwindigkeit $v_i(t) = \frac{dr_i}{dt}$. Ihre Einheiten sind (wegen des Faktors δt) in (2.12) [Länge/Zeit], nicht wie bei dem Ortsvektor [Länge]. Trotzdem ist die Vektorgeschwindigkeit wiederum ein Vektor: Es handelt es sich um die Differenz zweier Ortsvektoren (Differenz zweier Vektoren ist ein Vektor), multipliziert mit $1/\delta t$, einer skalaren Größe. Würden wir also unsere Basis wechseln, so dass sich die Komponenten von $\vec{r}$ ändern, dann würden sich die Komponenten von $\vec{v}$ auf die gleiche Art und Weise ändern wie die von $\vec{r}$.

[3] Letzteres wird manchmal zu $df = dx f'(x)$ verk"urzt, gemeint ist obige Aussage.

Beispiel

Wir kehren zurück zu der Bahnkurve aus Abschnitt 1.2, die die gleichförmige Bewegung eines Massepunktes entlang eines Halbkreises beschreibt

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \quad . \tag{2.14}$$

Die Geschwindigkeit des Massepunktes ist dann

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} -(2\pi)\sin(2\pi t) \\ (2\pi)\cos(2\pi t) \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

und die Beschleunigung $\mathbf{a}(t) \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}$

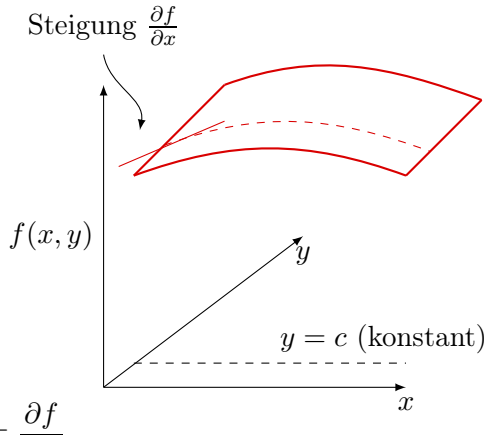
$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} -(2\pi)^2\cos(2\pi t) \\ -(2\pi)^2\sin(2\pi t) \end{pmatrix} \quad . \tag{2.16}$$

Damit stehen Geschwindigkeit und Ortsvektor bei der kreisförmigen Bewegung senkrecht zueinander, und die Beschleunigung ist parallel und in Gegenrichtung zum Ortsvektor.

Das zweite Newtonsche Gesetz, $\vec{F} = m\vec{a}$ ist also nicht nur eine Verknüpfung der Größen Kraft, Masse und Beschleunigung, sondern enthält auch implizit die Forderung, dass die Kraft ein Vektor ist. Bei einer Basisänderung müssen sich die Komponenten der Kraft also genauso ändern wie die Komponenten eines Ortsvektors.

2.4.2 Die partielle Ableitung

Auch für Funktionen mehrere Veränderlicher können Ableitungen definiert werden. Betrachten wir zunächst eine Funktion $f(x, y)$, die von zwei Variablen abhängt. Diese Funktion kann als gekrümmte Oberfläche über der x, y-Ebene visualisiert werden. Bei konstantem $y = c$ hängt $f(x, y = c) \equiv f_c(x)$ nur von x ab, so dass wir $f_c'(x)$ definieren können. Eine zweite Ableitung kann gebildet werden, wenn statt y die Variable $x = c$ konstant gehalten wird.



Ist $f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ eine Funktion auf einem (offenen) Quader $\subset \mathbb{R}^n$, heißt der Grenzwert

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \delta x, \dots) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)}{\delta x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{2.17}$$

partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ von f nach x_i (wenn der Grenzwert existiert).

Beispiel

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^3 + x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_2) = 3x_1^2 + x_2 x_3 + 2x_1 x_2$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\sin(x_1 x_2)) = x_1 \cos(x_1 x_2)$$

Die partiellen Ableitung gibt an, wie sich der Funktionswert von f unter einer kleinen Veränderung von x_i ändert; $f(\ldots, x_i + \delta x_i, \ldots) = f(\ldots, x_i, \ldots) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(\ldots, x_i, \ldots)\delta x_i + o(\delta x_i)$. Geometrisch gibt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ die Steigung der durch f definierten Oberfläche in Richtung der x_i-Koordinate an.
Auch wenn sich *zwei* Variablen x_i und x_j verändern ist die Änderung des Funktionswertes f in linearer Näherung durch die beiden partiellen Ableitungen definiert (da alle anderen Variablen konstant gehalten werden, schreiben wir sie im Folgenden gar nicht mit). Wir ändern erst x_i um δx_i (bei konstantem x_j), und dann x_j (bei konstantem $x_i + \delta x_i$). Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle, denn der Funktionswert hängt nur von den Variablen x_i, x_j ab, nicht davon wie wir von einem Punkt zu einem anderen gekommmen sind. Bei dem ersten Schritt ändert sich der Funktionswert um $\delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i, x_j) + o(\delta x_i)$, bei dem zweiten Schritt um $\delta x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i + \delta x_i, x_j) + o(\delta x_j) = \delta x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i, x_j) + o(\delta x_j) + \mathcal{O}(\delta x_i \delta x_j)$. Im letzten Schritt haben wir $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i + \delta x_i, x_j)$ wiederum durch eine lineare Näherung approximiert. Nehmen wir die Änderungen in den beiden Schritten zusammen erhalten wir

$$f(x_i + \delta x_i, x_j + \delta x_j) = f(x_i, x_j) + \delta x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i, x_j) + \delta x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i, x_j) + o(\delta x_{i/j}) \ . \qquad (2.18)$$

Auch dieses Ergebnis läßt sich geometrisch interpretieren, die Steigungen in den beiden Richtungen definieren eine Ebene, die am Punkt x_i, x_j tangential zu f ist, in erster Ordnung in δx_i und δx_j wird f durch diese Ebene beschrieben. Dieses Argument läßt sich leicht auf Änderungen in mehr als zwei Variablen verallgemeinern.
Ableitungen höherer Ordnung sind durch Hintereinander-Ausführung von $\frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial}{\partial x_j}$ definiert. Dabei gilt die **Schwarzsche Regel**

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \ , \qquad (2.19)$$

die sich wie folgt herleiten lässt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \lim_{\delta x_i \to 0} \frac{1}{\delta x_i}\left(\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_i + \delta x_i, \ldots x_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x_1 \ldots x_i \ldots x_j)}{\partial x_j}\right)$$
$$= \lim_{\delta x_i \to 0} \lim_{\delta x_j \to 0} \frac{1}{\delta x_i \delta x_j}\left(f(x_i + \delta x_i, x_j + \delta x_j) - f(x_i + \delta x_i, x_j) - f(x_i, x_j + \delta x_j) + f(x_i, x_j)\right)$$

wenn die Grenzwerte vertauschen:

$$= \lim_{\delta x_j \to 0} \lim_{\delta x_i \to 0} \frac{1}{\delta x_i \delta x_j}(\ldots) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$$

Einen Beweis (der nicht auf Vertauschung der Grenzwerte beruht) gibt Kerner und v. Wahl in 9.2.8. Dort wird gezeigt dass dieser Satz gilt, wenn die zweite Ableitung von f stetig ist.

2.5 Taylorreihe

Eines unserer Ziele bei der Einführung von Potenzreihen war es gewesen, möglichst allgemeine Funktionen als Potenzreihen darzustellen (innerhalb des Konvergenzradius). Wir betrachten eine Reihe aus den Potenzen von x,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{2.20}$$

Dazu sind zunächst die Koeffizienten der Potenzreihe a_0, a_1, a_2 zu bestimmen. Für $k = 0$ betrachten wir die linke und rechte Seite von (2.20) bei $x = 0$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$k = 0:$	$f(0) = a_0 + a_1 x\|_{x=0} + a_2 x^2\|_{x=0} + \dots = a_0$	$\curvearrowright a_0 = f(0)$
$k = 1:$	$f'(0) = a_1 + 2\,a_2\,x\|_{x=0} + 3\,a_3\,x^2\|_{x=0} + \dots = a_1$	$\curvearrowright a_1 = f'(0)$
$k = 2:$	$f^{(2)}(0) = 1 \times 2\,a_2 + 2 \times 3 a_3\,x\|_{x=0} + \dots = 2\,a_2$	$\curvearrowright a_2 = \frac{1}{2!} f^{(2)}(0)$
$k = 3:$	$f^{(3)}(0) = 1 \times 2 \times 3\,a_3 + 4 \times 3 \times 2 a_4\,x\|_{x=0} + \dots = 3!\,a_3$	$\curvearrowright a_2 = \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)$
allgemeines $k:$		$\curvearrowright a_k = \frac{1}{k!} f^{(n)}(0)$

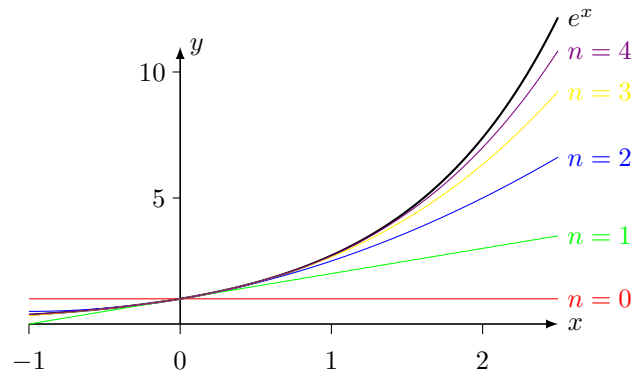
Analog können wir auch die Funktion $f(x)$ als Potenzreihe in $x - x_0$ schreiben, d.h. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$, mit neuen Koeffizienten $b_k = \frac{1}{k!} f^{(n)}(x_0)$. Die Potenzreihen in Potenzen von x und $x - x_0$ sind natürlich eng miteinander verknüpft: Die Terme der Potenzreihe $(x - x_0)^n$ lässt sich ausmultiplizieren und die Potenzreihe in Potenzen von x schreiben, wir erhalten dann wieder (2.20) mit den entsprechenden Koeffizienten.
Ist die Funktion $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$, heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

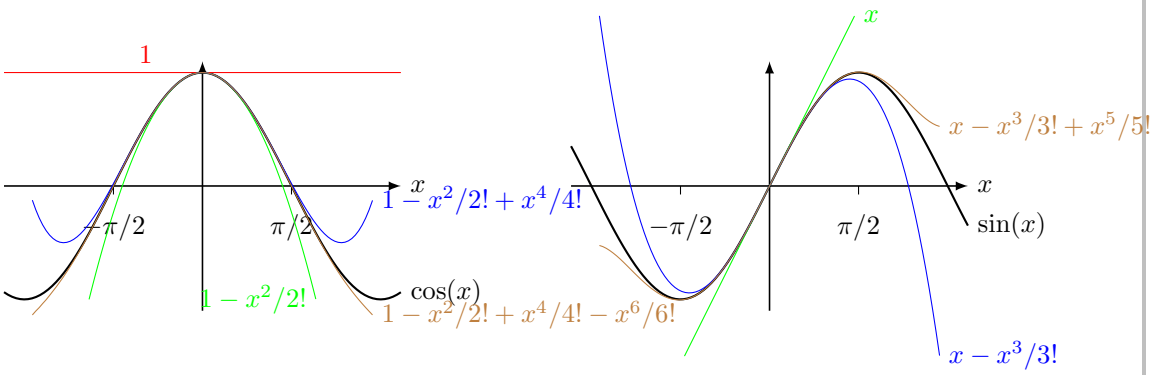
die **Taylorreihe** bei x_0, ihre Koeffizienten die **Taylorkoeffizienten**. Bricht man eine Taylorreihe nach n Termen ab, erhält man ein Polynom n-ter Ordnung. $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ heißt dann das **Restglied** der Reihe und ist $\mathcal{O}((x - x_0)^{n+1})$.

Beispiel

Die Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen. Die Exponentialfunktion e^xhat eine besonders einfache Taylorreihe, da ihre erste Ableitung (sowie alle weiteren Ableitungen) e^x sind, damit ist die Taylorreihe bei $x = 0$ gleich $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$. Für kleine Werte von x gibt die Taylorreihe oft bereits nach einer kleinen Zahl von Termen eine brauchbare Näherung; $e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$ (Taylorreihe bis zur ersten Ordnung in x), $e^x = 1 + x + x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$ (Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung in x, etc).



Die Abbildung zeigt die Exponentialfunktion und ihre Taylorentwicklung bei $x = 0$ bis zur n-ten Potenz von x für $n = 0, 1, 2, 3, 4$.
Als weiteres Beispiel noch die Taylorreihen für die trigonometrischen Funktionen bei $x_0 = 0$. Mit $f(x) = \cos(x)$, $\frac{df}{dx} = -\sin(x)$, $\frac{d^2f}{dx^2} = -\cos(x)$ erhalten wir die Taylor-Reihe der Cosinus-Funktion $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$, und analog die Taylor-Reihe der Sinus-Funktion $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$.



Der Konvergenzradius der Taylorreihe der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen ist unendlich: Für jedes endliche x wächst $n!$ für hinreichend hohe n schneller mit n als x^n.

Info:

Wir haben nicht gefragt, welche Funktionen sich prinzipiell durch eine konvergente Taylorreihe (2.20) darstellen lassen. Funktionen die (lokal, d.h. innterhalb eines bestimmten Bereichs) gleich ihrer Taylorreihe sind heißen **analytisch** (in diesem Bereich). Die Frage, welche Funktionen analytisch sind, findet erst im Rahmen der Funktionentheorie (Theorie von Funktionen komplexer Veränderlicher) eine zufriedenstellende Antwort.

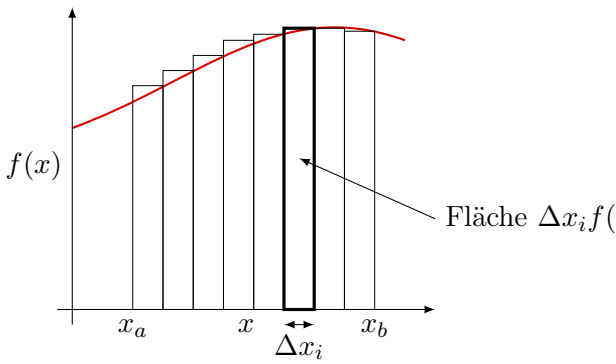
2.6 Integration

Die Idee der Zerlegung einer Größe in eine große Zahl (kleiner) Summanden tritt in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auf, und führt stets auf eine Art von Integral. Das Problem die Fläche unter einer Kurve zu bestimmen ist das prominenteste Beispiel. Dabei wird die Fläche unter einer Kurve in eine (große) Anzahl von Streifen zerlegt, die Fläche der

(kleinen, daher fast rechteckigen) Streifen berechnet, und die Fläche der Teilstücke aufaddiert. Diese Grundidee taucht in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auf.
Betrachten wir z.B. eine Ladung Q, die sich auf einem Draht befindet. Gegeben sei die Ladungsdichte $\rho(x)$ auf dem Draht pro Länge Draht. Ein kleines Teilstück des Drahtes der Länge Δx hat also Ladung $\rho(x)\Delta x$. Die Gesamtladung ist die Summe der Beiträge aller Teilstücke. Ist der Draht gerade, kommen wir auf ein Integral $\int \mathrm{d}x\rho(x)$ vom Typ "Fläche unter der Kurve", hier die Fläche unter der Funktion $\rho(x)$. Die Idee des Zerlegens und Aufsummierens kleiner Terme funktioniert aber auch für einen gebogenen Draht, oder eine zweidimensionale Oberfläche oder ein dreidimensionales Volumen. Solche Probleme werden wir in Kapitel 5 behandeln. Oberflächen- und Volumenintegrale führen auf Mehrfachintegrale, die wir hier diskutieren werden.

2.6.1 Integrale von Funktionen einer Veränderlichen

Wir beginne mit einem einfachen Fall, und greifen dazu auf die Idee der "Fläche unter einer Kurve" zurück. Zur physikalischen Motivation können wir uns die Funktion $f(x)$ als eine Dichte in einer Dimension denken. Die Masse oder Ladung eines kleinen Teilstücks der Länge Δx ist dann $f(x)\Delta x$, oder, geometrisch gedacht, die Fläche eines schmalen Rechtecks mit Breite Δx und Höhe $f(x)$. *Klein* bedeutet hier zunächst so klein, dass die Veränderung von $f(x)$ im Intervall Δx vernachlässigt werden kann. Letztendlich werden wir den Grenzfall $\Delta x \to 0$ betrachten.
Zur Berechnung der Fläche unter der Funktion $f(x)$ zwischen x_a und x_b betrachten die Zerlegung des Intervalls $[x_a, x_b]$ in eine große Anzahl von Teilstücken; $x_0 \equiv x_a$, $x_N \equiv x_b$ und $x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{N-1}$ liegen zwischen x_a und x_b. Das erste Teilstück liegt zwischen x_0 und x_1, das zweite zwischen x_1 und x_2, etc. $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ werden auch als **Stützstellen** bezeichnet. Die Stützstellen und die Werte der Funktion bei x_1, x_2, etc. bilden nun Rechtecke. Das erste hat die Fläche $(x_1 - x_0)f(x_1)$[4] und als Gesamtfläche erhalten wir



$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{i-1})f(x_i) \equiv \sum_{i=1}^{N}\Delta x_i f(x_i) \tag{2.21}$$

mit $\Delta x_i \equiv x_i - x_{i-1}$. Diese Summe wird als Riemann-Summe bezeichnet. Im nächsten Schritt machen wir die Längen der Teilstücke sehr klein; die Rechtecke der Abbildung approximieren die Fläche unter der Kurve also immer besser. Den Grenzfall in dem die Längen aller Teilstücke

[4] Hier kann man fragen, ob nicht $f(x_0)$ statt $f(x_1)$ der korrekte Ausdruck wäre. Kernpunkt des Beweises der Existenz des sogenannten Riemann-Integrals ist, dass der Unterschied zwischen diesen beiden Fällen im Grenzfall $N \to \infty$ verschwindet. Als Abschätzung: die von x und $x+\Delta x$ eingeschlossene Fläche liegt zwischen $\Delta x f(x)$ und $\Delta x[f(x) + \Delta x f'(x) + o(\Delta x)]$. Im Grenzfall $\Delta x \to 0$ ist der zweite Beitrag im Vergleich um ersten vernachlässigbar.

Δx_i gegen Null gehen, bezeichnen wir als das **Riemannintegral**

$$\boxed{\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i f(x_i)\ .} \tag{2.22}$$

In diesem Grenzfall geht natürlich auch die Zahl der Teilstücke gegen unendlich. Wie genau der Grenzfall $\Delta x_i \to 0$ für alle Δx_i durchzuführen ist, ist damit noch nicht gesagt. Es stellt sich als ausreichend heraus, die Länge des längsten Teilstückes $\max_i(\Delta x_i)$ gegen Null zu führen (siehe z.B. Kerner und von Wahl). Funktionen, für die das Integral (2.22) existiert, heißen Riemann-integrierbar. Nach dieser Definition ist das Integral einer Funktion mit nur negativen Funktionswerten negativ, sind die Funktionswerte genauso häufig positiv wie negativ ist das Integral null: Bei negativen Funktionswerten trägt die Fläche über der Kurve negativ zum Integral bei. Unter Vertauschung der Integrationsgrenzen ändert das Integral sein Vorzeichen, da die Δx_i alle ihr Vorzeichen ändern.

Das Integral und die Stammfunktion

Betrachen wir die Fläche unter der Kurve im Intervall $[0, x]$ als Funktion von x, und nennen diese Funktion $F(x)$. Vergrößern wir nun das Intervall durch Hinzufügen eines (beliebig kleinen) Teilstücks Δx, vergrößert sich die Fläche um $\Delta x f(x)$, also $F(x + \Delta x) = F(x) + \Delta x f(x) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$ und somit

$$\frac{dF}{dx} = f(x)\ . \tag{2.23}$$

Aus dieser Gleichung ist die sogenannte **Stammfunktion** $F(x)$ von $f(x)$ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Bei der Subtraktion von Stammfunktionen verschwindet diese Konstante allerdings. Für allgemeine Integralgrenzen gilt dann

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = F(b) - F(a) \equiv \big[F(x)\big]_a^b\ . \tag{2.24}$$

Diese Aussage wird als Fundamentalsatz der Analysis bezeichnet. Integration und Differentiation sind also inverse Operationen; um das Integral einer Funktion $f(x)$ zu bestimmen, suchen wir die Funktion $F(x)$, deren Ableitung nach x gleich $f(x)$ ist. Wir schreiben auch das sogannte **unbestimmte Integral** ohne die Integrationsgrenzen anzugeben als $\int \mathrm{d}x\, f(x) = F(x)$ (Gleichheit verstanden als "bis auf eine unbestimmte Konstante").

2.6.2 Techniken zur Berechnung von Integralen

Eine allgemeine Methode um systematisch zu einer beliebigen Funktion die Stammfunktion anzugeben gibt es nicht. Zur Berechnung von Integralen ist es nützlich einige Stammfunktionen und ihre Ableitungen zu kennen und Erfahrungen mit verschiedenen Integrationsmethoden zu machen.
Es gibt sogar Funktionen, deren Stammfunktionen nicht **elementar darstellbar** sind, die sich also nicht durch Potenzen, Exponentialfuntionen, trigonometrische Funktionen sowie ihre

Summen, Produkte, Brüche, Inverse und Verkettungen bilden lassen[5]. Ein wichtiges Beispiel ist die Gaussfunktion $\exp\{-x^2\}$.
Wir diskutieren im Folgenden einige Strategien zur Suche nach Stammfunktionen.

Partielle Integration

Partielle Integration ist eine nützliche Technik, wenn der Integrand $f(x)$ sich als Produkt zweier Funktionen schreiben lässt. Sei $f(x) = u'(x)v(x)$. Aus der Produktregel der Ableitung erhalten wir $\frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Umstellen der Terme und Integration auf beiden Seiten ergibt

$$\int_a^b \mathrm{d}x\, u'(x)v(x) = \int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right) - \int_a^b \mathrm{d}x\, u(x)v'(x) = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, u(x)v'(x)\ . \tag{2.25}$$

Bei geschickter Wahl von $u(x)$ und $v(x)$ ist das resultierende Integral oft einfach zu bestimmen.

Beispiel

Gesucht sei die Stammfunktion der Funktion $\cos^2(x)$. Wir wählen $u' = \cos(x)$ und $v = \cos(x)$ mit $u = \sin(x)$ und $v' = -\sin(x)$ und damit

$$\int \mathrm{d}x \cos^2(x) = \left[\sin(x)\cos(x)\right] + \int \mathrm{d}x \sin^2(x) = \left[\sin(x)\cos(x)\right] + \int \mathrm{d}x(1 - \cos^2(x))\ . \tag{2.26}$$

Wir addieren auf beiden Seiten $\int \mathrm{d}x \cos^2(x)$ und erhalten

$$2\int \mathrm{d}x \cos^2(x) = \left[\sin(x)\cos(x)\right] + [x] \tag{2.27}$$

Die eckigen Klammern sollen lediglich anzeigen, dass wir jederzeit Integralgrenzen einsetzen können. Oder wir lassen die Integralgrenzen unbestimmt: $\int \mathrm{d}x \cos^2(x) = \sin(x)\cos(x)/2 + x/2$ wird als **unbestimmtes Integral** bezeichnet, das Gleichheitszeichen gilt bis auf eine (beliebige) Konstante. Alternativ kann man zur Berechnung dieses Integrals auch die trigonometrische Formel $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$ nutzen.

Integration durch Substitution

Dieses Integrationsprinzip folgt aus der Kettenregel der Differentialrechnung. Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ mit Stammfunktion $F(x)$. Wir betrachten nun eine Funktion $x(y)$ mit Umkehrfunktion $y(x)$ und definieren eine weitere Stammfunktion $G(y) = F(x(y))$ mit Ableitung $g(y)$. Nach der Kettenregel ist $\frac{dG}{dy} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dy}$, bezw. $g(y) = f(x(y))\frac{dx}{dy}$. Integration über x ergibt

$$\int_{y(a)}^{y(b)} \mathrm{d}y\, \frac{dx}{dy} f(x(y)) = \int_{y(a)}^{y(b)} \mathrm{d}y\, g(y) = \left[G(y)\right]_{y(a)}^{y(b)} = \left[F(x(y))\right]_{y(a)}^{y(b)} = \left[F(x)\right]_a^b = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\ . \tag{2.28}$$

[5] Es gibt auch Funktionen, für die das Riemannintegral (2.22) nicht existiert. Funktionen die 'fast überall' stetig sind, stellen sich als Riemann-integrierbar heraus. Details liefert die Analysisvorlesung.

Ist $f(x)$ schwer zu integrieren, kann eine geschickt gewählte Substitution auf eine Funktion $\frac{dx}{dy} f(x(y))$ führen, die leichter zu integrieren ist. Oder umgekehrt führt manchmal ein Integral über $g(y) = f(x(y))\frac{dx}{dy}$ per Substitution auf ein Integral über $f(x)$ das leichter zu integrieren ist.

Beispiel

Gesucht sei das Integral der Funktion $\sqrt{1-x^2}$ über das Intervall $[0,1]$. Da $\sqrt{1-\sin(t)^2} = \cos(t)$ erwarten wir, dass eine trigonometrische Variablensubstitution nützlich könnte. Wir führen eine neue Variable $\sin(y) = x$, bezw. $y = \arcsin(x)$ ein und erhalten mit $\frac{dx}{dy} = \cos(y)$

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, \sqrt{1-x^2} = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \mathrm{d}y\, \frac{dx}{dy} \sqrt{1-\sin^2(y)} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}y\, \cos^2(y)\ . \tag{2.29}$$

Dieses Integral haben wir bereits mit partieller Integration berechnet.

Im obigen Beispiel und in (2.28) muss $x(y)$ bijektiv sein, damit wir die Integralgrenzen nach der Substitution $y(a)$ und (b) angeben können (durch Aufteilen in Intervalle auf denen $x(y)$ dann bijektiv ist lässt sich das leicht erreichen). Diese Umkehrbarkeit ist allerdings nicht bei jeder Variablensubstitution nötig. Wenn ein Integrand in der Form $\int_a^b \mathrm{d}x \frac{dy}{dx} f(y(x))$ geschrieben werden kann führt Variablensubstitution auf $\int_{y(a)}^{y(b)} \mathrm{d}y f(y)$ ohne dass eine Umkehrfunktion gebraucht wurde.
Die Variablensubstitution kann geometrisch interpretiert werden. $\int_a^b \mathrm{d}x f(x) \approx \sum_i \Delta x f(x_i)$ unterteilt das Integrationintervall $[a,b]$ in Teilintervalle konstanter Länge Δx mit Stützstellen bei $0, \Delta x, 2\Delta x, \ldots$. Mit einer Funktion $x(y)$ lässt sich dasselbe Intervall in neue Teilintervalle mit Stützstellen bei $x(0), x(\Delta y), x(2\Delta y), x(3\Delta y), \ldots$ unterteilen. Die Längen dieser neuen Teilintervalle sind nicht konstant (ausser wenn $x(y)$ linear ist) und sind durch $\Delta y \frac{dx}{dy}$ gegeben (plus asymptotisch vernachlässigbare Terme). Wir erhalten als Riemannsumme über die neuen Teilintervalle $\sum_i \Delta y \frac{dx}{dy} f(x(y_i))$. Im Limes $\Delta y \to 0$ erhalten wir die Substitutionsregel (2.28).
Die Variablensubstitution verändert also die Länge der Teilintervalle, in die das Intervall $[a,b]$ zerlegt wird, relativ zueinander. Der Faktor $\frac{dy}{dx}$ gibt an wie stark ein Teilintervall verzerrt wird (im Vergleich zu Intervallen konstanter Länge). Eine Merkregel für die Variablensubstitution (2.28) ist $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \frac{dy}{dx}$ (eine Aussage die hier nur unter dem Integral Sinn macht).

Differenzieren nach einem Parameter

Wenn der Integrand durch Ableitung nach einem Parameter aus einer Funktion hervorgeht, können wir das ausnutzen.

Beispiel

Gesucht sei das Integral $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, xe^{-x}$, das wir zunächst als $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, xe^{-\alpha x}$ mit $\alpha = 1$ schreiben.

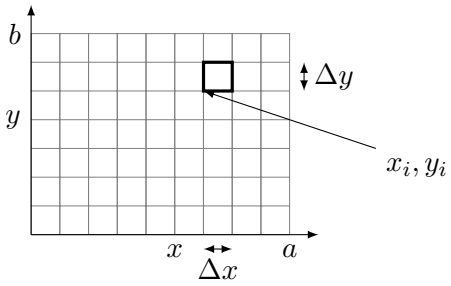
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, xe^{-\alpha x} &= \int_0^\infty \mathrm{d}x\, (-\frac{d}{d\alpha})e^{-\alpha x} = (-\frac{d}{d\alpha})\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-\alpha x} \\ &= -\frac{d}{d\alpha}[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}]_0^\infty = -\frac{d}{d\alpha}\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha^2} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Im zweiten Schritt haben wir Integration und Ableitung vertauscht. Für die endliche Riemannsumme (2.21) ist dies natürlich zulässig. Für das Riemannintegral ist es das mit Einschränkung auch (der Integrand muss stetig sein und seine Ableitung ebenso, siehe z.B. Kerner und von Wahl).

2.7 Mehrfachintegrale

Ziel ist es, das Integral als Riemannsumme über eine Variable zu verallgemeinern. Anstatt (kleine) Intervalle einer Geraden (x-Achse) aufzusummieren, können wir dann kleine Flächenelemente oder Volumenelemente addieren. Damit können wir dann auch über Oberflächen und Volumen integrieren.

Als erstes Beispiel betrachten wir eine rechteckige Fläche mit Kantenlänge a und b, auf der z.B. Masse verteilt ist mit einer Dichte $\rho(x, y)$ pro Fläche. Wir zerlegen die Fläche in eine große Anzahl kleiner Rechtecke mit Kantenlängen Δx und Δy, die **Flächenelemente**. Diese Flächenelemente haben ihre linke untere Ecke bei x_i, y_j. Ein einzelnes kleines Flächenelement trägt damit $\rho(x_i, y_j)\Delta x\Delta y$ zur Gesamtmasse bei (bis auf Fehler höherer Ordnung in Δx und Δy).



Die Gesamtmasse ist dann die Summe dieser Beiträge über alle Flächenelemente im Grenzfall $\Delta x, \Delta y \to 0$: eine Riemannsumme über kleine Flächenelemente. Dabei können wir die Summe über die Flächenelemente auf unterschiedliche Arten durchführen, die natürlich dasselbe Ergebnis ergeben müssen. Wir summieren entweder zunächst die Beiträge aller Flächenelemente bei festem i und erhalten die Masse eines vertikalen Streifens zwischen x_i und $x_i + \Delta x$ als

$$\lim_{\Delta y\to 0}\sum_{j=1}^{N_y}\rho(x_i, y_j)\Delta y\Delta x = \left(\int_0^b \mathrm{d}y\rho(x_i, y)\right)\Delta x \tag{2.31}$$

und addieren dann die Beiträge aller vertikaler Streifen im Grenzfall $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{N_x}\Delta x\left(\int_0^b \mathrm{d}y\rho(x_i, y)\right) = \int_0^a \mathrm{d}x\left(\int_0^b \mathrm{d}y\rho(x, y)\right) \tag{2.32}$$

Dabei wird zunächst das Integral über y ausgewertet, das Ergebnis ist eine Funktion, die von x abhängt und dann über x integriert wird.

Alternativ können wir zunächst die Beiträge aller Flächenelemente bei festem j zur Gesamtmasse berechnen und erhalten den Beitrag eines horizontalen Balkens zwischen y_j und $y_j+\Delta y$.

Danach summieren die Beiträge aller Balken im Grenzfall $\Delta y \to 0$ und erhalten analog

$$\int_0^b \mathrm{d}y \left(\int_0^a \mathrm{d}x \rho(x,y) \right) \ . \tag{2.33}$$

Dabei wird zunächst das Integral über x ausgewertet, das Ergebnis ist eine Funktion, die von y abhängt und dann über y integriert wird.
Für solche Summen mit unendlich vielen Termen ist die Gleichheit nicht selbstverständlich. Der **Satz von Fubini**

$$\int_{a_1}^{a_2} \mathrm{d}x \left(\int_{b_1}^{b_2} \mathrm{d}y \rho(x,y) \right) = \int_{b_1}^{b_2} \mathrm{d}y \left(\int_{a_1}^{a_2} \mathrm{d}x \rho(x,y) \right) \equiv \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \rho(x,y) \ . \tag{2.34}$$

(s. Kerner und von Wahl) gilt für stetige Funktionen $\rho(x,y)$ und besagt, dass es keine Rolle spielt, ob das Mehrfachintegral zunächst über die x-Variable oder über die y Variable ausgewertet wird.

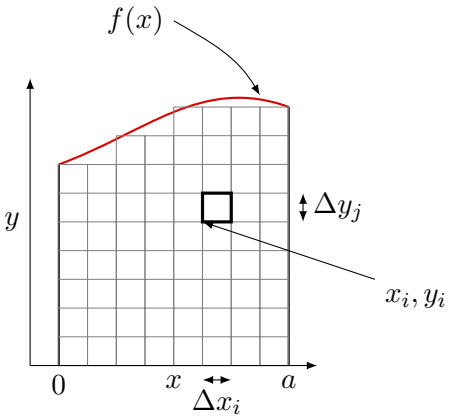
Beispiel

Wir berechnen die Masse einer rechteckigen Platte S mit Begrenzung durch die Linien $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$ mit Dichte pro Fläche $\rho(x,y) = xy$. Die Masse eines kleinen rechteckigen Teilstücks mit Kantenlängen $\Delta x, \Delta y$ ist $\approx xy\Delta x\Delta y$. Die Gesamtmasse ist damit

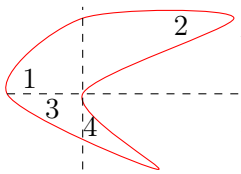
$$M = \int_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y(xy) = \int_0^3 \int_0^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y(xy) = \left(\int_0^3 \mathrm{d}x x \right) \left(\int_0^2 \mathrm{d}y y \right) = 9/2 \times 4/2 = 9. \tag{2.35}$$

$\int_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ bezeichnet das Mehrfachintegral über die Fläche S. Die übliche Notation benutzt nur ein einziges Integralzeichen, um anzuzeigen, dass es sich um eine einzelne Fläche S handelt.

Diese Vertauschbarkeit der Integrationen führt uns auf das Thema der Integrationsgrenzen, die bei Mehrfachintegralen komplizierter sein können als bei Integralen einer Veränderlichen. Das Integral über die Fläche S die von der Funktion $f(x)$ im Intervall $x \in [0,a]$ eingeschlossen wird ist



$$\int\int_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y\rho(x,y) = \int_0^a \mathrm{d}x \left(\int_0^{f(x)} \mathrm{d}y \rho(x,y) \right) \ . \tag{2.36}$$



Würde man in diesem Fall versuchen zunächst das Integral über x auswerten wären die Integralgrenzen komplizierter.

Einige Oberflächen zerlegt man sinnvollerweise in Teilstücke, die separat ausgewertet werden (s. links).

Das Volumenintegral

Die gleiche Denkweise wie beim Integral über eine Oberfläche lässt sich auch auf Volumina anwenden. Das Volumen eines Quaders mit Kantenlängen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ist $\Delta x\Delta y\Delta z$. Gibt

$\rho(x, y, z)$ zum Beispiel eine Dichte pro kleinem Volumen an, dann ist die in in einem Volumen V enthaltene Masse durch die Riemannsumme

$$\sum_{i,j,k} \Delta x \Delta y \Delta z \rho(x_i, y_j, z_k) \tag{2.37}$$

approximiert, wobei die Summe über die Indizes i, j, k alle (kleinen) Volumenelemente addiert. Im Grenzfall unendlich kleiner Volumenelemente $\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0}$ erhalten wir das Volumenintegral

$$\int_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\rho(x, y, z) = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}z\rho(x, y, z) \ . \tag{2.38}$$

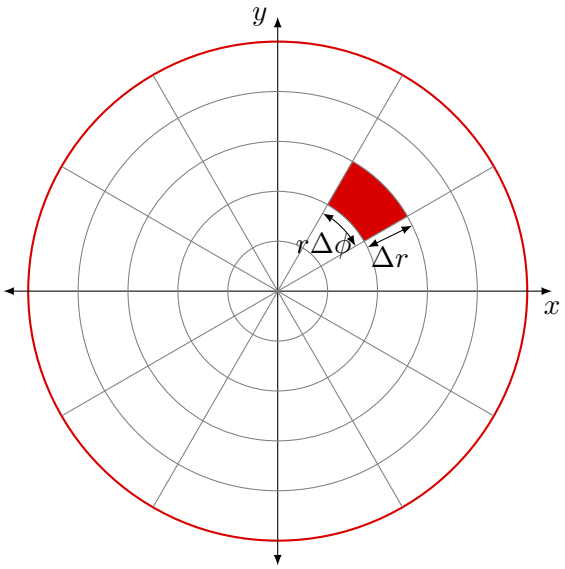
Wieder können die Integrationen in beliebiger Reihenfolge vorgenommen werden (unter milden Forderungen an den Integranden).

2.7.1 Substitution der Variablen in Mehrfachintegralen

Mehrfachintegrale sind also prinzipiell nicht schwieriger zu berechnen als Integrale von Funktionen einer Veränderlichen. Allerdings können die Integrationsgrenzen Schwierigkeiten machen. Geschickte Änderung der Integrationsvariablen kann hier helfen. Mit einer Variablensubstitution können auch Symmetrien eines Problems ausgenutzt werden, z.B. wenn Integrationsgrenzen oder der Integrand eine bestimmte Symmetrie aufweist. Als konkretes Beispiel betrachten wir die Variablentransformation von kartesischen Koordinaten (x, y) zu Polarkoordinaten (r, θ) in zwei Dimensionen.

Bei dem Flächenintegral über die Kreisfläche mit Radius 1

$$\int_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y\rho(x, y) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\rho(x, y) \tag{2.39}$$



ist vor allem der Fall interessant, bei dem auch der Integrand nur von der Entfernung r eines Punktes p von der Kreismitte abhängt, $\rho(x, y) = \rho(r)$. Dann können sowohl der Integrand als auch die Integrationsgrenzen durch eine einzelne Variable ausgedrückt werden. Wir definieren 2 neue Variablen, die sogenannten **Polarkoordinaten**. Die erste Koordinate ist die **Radialkoordinate** $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, die den Abstand vom Ursprung angibt. Die zweite Koordinate, die **Winkelkoordinate** ϕ, ist definiert durch den Winkel, den die Linie vom Ursprung zum Punkt p mit der positiven x-Achse einschliesst, $\tan\phi = y/x$. Mit der Umkehrfunktion des Tangens und Kenntnis in welchen der vier Quadranten p liegt kann die Winkelkoordinate leicht bestimmt werden.

Unser Ziel ist es, durch eine Variablensubstitution das Integral über die Kreisfläche als Integral über r und ϕ zu schreiben. Eine Vielzahl von Problemen weist eine Art von Symmetrie auf

(hier: Symmetrie des Integranden und der Integrationsgrenzen unter Rotation). Nutzt man neue Variablen erhält man oft einfacher zu lösende Integrale.
Jeder Punkt in der Ebene ist eindeutig durch ein Paar (x, y) und ein Paar $(r, \phi), \phi \in [0, 2\pi[$ beschrieben (bis auf einen einzelnen Punkt, den Ursprung, dort ist ϕ nicht eindeutig definiert). Die Abbildung von (x, y) auf (r, ϕ) ist also invertierbar. Die Linien mit konstanter Variable r bilden Ringe, Linien mit konstantem ϕ bilden radial nach außen laufende Geraden mit Steigung $\tan(\phi)$. Eine kleine Änderung der Koordinaten (x, y) zu $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ definiert ein kleines Rechteck der Fläche $\Delta x \Delta y$. Eine kleine Änderung der Koordinaten r, ϕ definiert eine Intersektion aus Ring und Kuchenstück, siehe Abbildung. Die Fläche dieses Objekts ist (für kleine Änderungen $\Delta r, \Delta\phi$, wenn dieses Objekt fast ein Recheck ist) $\Delta r(r\Delta\phi)$. Damit ist das Integral (2.39)

$$\int_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y\rho(x, y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi r\rho(r) = 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}r r\rho(r) \ . \tag{2.40}$$

Der zusätzliche Faktor r ergibt sich aus der Substitution der Variablen, man kann ihn als höherdimensionales Equivalent des Faktors $\frac{dx}{dy}$ in (2.28) auffassen. Weitere Variablentransformationen dieser Art werden in den Übungen diskutiert. Den Transformationssatz, der allgemeine Variablentransformationen behandelt, werden wir in Kapitel 5 kennenlernen.

Zusammenfassung:

- Zentrale Definition ist die des Grenzwertes oder Limes (einer Summe oder einer Funktion).
- Mithilfe des Grenzwertes lassen sich einigen unendlichen Summen (Reihen) endliche Werte zuweisen (Konvergenz).
- Die Ableitung einer Funktion einer Variablen weist jedem Punkt seine Steigung an diesem Punkt zu (Steigung der Tangente als Grenzwert der Steigung der Sekante).
- Die partielle Ableitungen einer Funktion mehrerer Variablen verallgemeinern dieses Konzept: Sie geben die Steigungen einer Funktion an, wenn unterschiedliche Variablen geändert werden.
- Die Taylorreihe stellt eine Funktion in der Umgebung eines Punktes durch eine Potenzreihe dar.
- Das Integral einer Funktion ist der Grenzwert $\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^N \Delta x_i f(x_i)$. Der Fundamentalsatz der Analysis verbindet diesen Grenzwert mit der Stammfunktion von $f(x)$.
- Mehrfachintegrale zerlegen Oberflächen oder Volumina in kleine Teilstücke, die mit einer (Dichte-)Funktion multipliziert und aufsummiert werden.

Drei

Komplexe Zahlen

Thema dieses Kapitels ist die Erweiterung der reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen.

Die natürlichen Zahlen bilden die Grundlage auf der weitere Zahlenkörper aufbauen. Zum Beispiel wurden ganze Zahlen $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ eingeführt um Gleichungen wie $x + 3 = 2$ lösen zu können. Analoge Erweiterungen der natürlichen Zahlen führten auf die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen. Nur Gleichungen wie $x^2 = -1$ blieben bislang ohne Lösung. Zur Lösung dieser Gleichungen führen wir einen Zahlenkörper mit einem neuen Element i ein, das die Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$ hat.

3.1 Komplexe Zahlen und $\mathbb{R}^2$

Wie betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} | a, b \ \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Addition von Vektoren und Multiplikation mit reellen Zahlen definiert durch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \ . \tag{3.2}$$

Zusätzlich definieren wir noch eine Multiplikation von zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,a' - b\,b' \\ a\,b' + b\,a' \end{pmatrix} \ . \tag{3.3}$$

Diese Multiplikation

ist kommutativ: $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'\,a - b'\,b \\ a'\,b + b'\,a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,a' - b\,b' \\ a\,b' + b\,a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$

hat ein Einselement: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

hat ein Inverses: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{-1} \equiv \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

und erlaubt eine Lösung von $x^2 = -1$

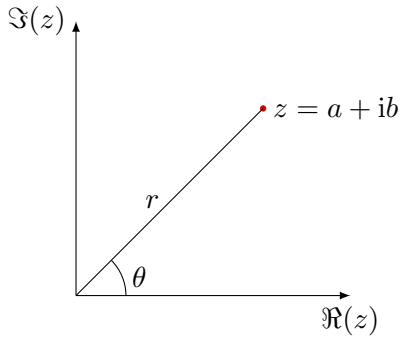
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als 1 und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als i mit $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$. Objekte der Form $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ gehorchen den Multiplikationsregeln für reelle Zahlen, wir assozieren sie also mit den reellen Zahlen. $z = a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ entspricht dann $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und wird als **komplexe Zahl** bezeichnet.

Jede polynome (algebraische) Gleichung n-ten Grades (mit komplexen Koeffizienten) hat n Lösungen in den komplexe Zahlen (Fundamentalsatz der Algebra). Mit der Erweiterung auf die komplexen Zahlen sind wir also am Endpunkt einer Entwicklung angekommen: alle algebraischen Gleichungen sind nun lösbar[1].

3.2 Realteil und Imaginärteil, Betrag und Argument komplexer Zahlen

a wird als **Realteil**, b als **Imaginärteil** einer komplexen Zahl $z = a + \mathrm{i}b$ bezeichnet. Wir schreiben $a = \Re(a + \mathrm{i}b)$ und $b = \Im(a + \mathrm{i}b)$. Es sind also zwei reelle Zahlen nötig um eine einzelne komplexe Zahl zu spezifizieren. Analog zur Zahlengeraden der reellen Zahlen, werden komplexe Zahlen graphisch in der Ebene dargestellt (**komplexe Ebene** oder **Gaußsche Ebene**). Reelle Zahlen liegen dabei auf der x-Achse, rein imaginäre Zahlen auf der y-Achse.



Eine komplexe Zahl $z = a + ib$ kann auch in Polarkoordinaten $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\theta = \frac{b}{a}$ dargestellt werden. $r = |z| \equiv \sqrt{a^2 + b^2}$ wird als **Betrag** einer komplexen Zahl z bezeichnet, θ als ihr Argument. $z^* = a - ib$ definiert die **komplex Konjugierte** von $z = a + ib$. Dann ist $z\,z^* = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - \mathrm{i}\,ab + i\,ba - (\mathrm{i})^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

Multiplikation von komplexen Zahlen kann einfach durch Ausmultiplizieren erfolgen

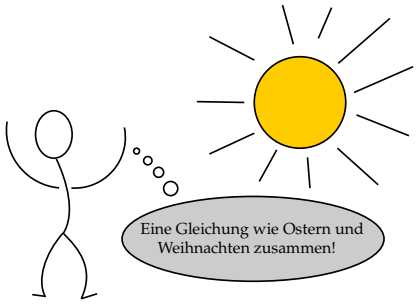
$$zz' = (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b') = aa' + \mathrm{i}ab' + \mathrm{i}ba' + (\mathrm{i}\cdot\mathrm{i})bb' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba') \;, \qquad (3.4)$$

das Ergebnis stimmt mit (3.3) überein. Für die Division gilt nutzen wir $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$.

[1] Das heißt natürlich nicht, dass nicht noch weitere Zahlenkörper mit interessanten oder nützlichen Eigenschaften definiert werden können.

3.3 Die Euler-Formel

Wir nutzen die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion, um die Exponentialfunktion auch für komplexe Zahlen zu definieren.



$$
\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}x} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} &= 1 + \mathrm{i}x - \frac{x^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos x + \mathrm{i}\sin x
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Die sogenannte **Eulerformel** verbindet trigonometrische Formeln mit der Exponentialfunktion. Eine komplexe Zahl z mit Betrag r und Argument θ ist damit $z = re^{\mathrm{i}\theta}$. Das Produkt zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 ist dann $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}\theta_1} e^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$, d.h. der Betrag des Produktes ist $r_1 r_2$, sein Argument ist $\theta_1 + \theta_2$. Multiplikation komplexer Zahlen wird also durch Drehungen in der komplexen Ebene beschrieben.
Diese Eigenschaft komplexer Zahlen führt auf ihre wichtigste praktische Anwendung: Bei Schwingungen und Oszillationen erlaubt die Eulerformel (komplizierte) trigonometrische Berechnungen mit der (einfachen) Exponentialfunktion zu führen.

Beispiel

Eine einfache Anwendung der Eulerschen Formel sind die trigonometrischen Additionstheoreme

$$
\begin{aligned}
\cos(x+y) + \mathrm{i}\,\sin(x+y) &= e^{\mathrm{i}(x+y)} = e^{\mathrm{i}x}\, e^{\mathrm{i}y} \\
&= (\cos x + \mathrm{i}\,\sin x)(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y) \\
&= \cos x \cos y - \sin x \sin y + \mathrm{i}(\sin x \cos y + \sin y \cos x)\ .
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Aus dem Realteil dieser Gleichung erhalten wir $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, aus dem Imaginärteil $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.

3.4 Wurzeln komplexer Zahlen und der komplexe Logarithmus

Die Eulerformel erlaubt auch Wurzeln und Logarithmen komplexer Zahlen zu definieren. Für die n-te Potenz einer komplexen Zahl $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ gibt die Eulerformel (3.5)

$$
z^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta}\ , \tag{3.7}
$$

ein Ergebnis das auch als **Formel von de Moivre** bezeichnet wird. Bei der Potenzierung einer komplexen Zahl mit n wird also ihr Argument mit n multipliziert. Diese Beziehung lässt sich nutzen, um auch die m-te Wurzel einer komplexen Zahlen zu definieren, indem wir $n = 1/m$ setzen. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass man auf der rechten Seite von (3.7) noch mit $1 = e^{2\pi k\mathrm{i}}$ mit $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ multiplizieren kann. Entsprechend ist die

Wurzel einer komplexen Zahl nicht eindeutig, sondern eine komplexe Zahl hat m komplexe m-te Wurzeln

$$z^{1/m} = r^{1/m} \exp\{\mathrm{i}\frac{\theta + 2k\pi}{m}\} \ . \tag{3.8}$$

Ab $k \geq m$ erhalten werden keine neuen Wurzeln mehr generiert, $k = m$ ergibt dieselbe Wurzel wie $k = 0$, $k = m + 1$ dieselbe wie $k = 1$, etc.

Aufgabe

Malen sie die 2-ten, 3-ten und 4-ten Wurzeln von 1 in der komplexen Ebene auf.

Eine komplexe Zahl w mit $e^w = z$ heißt der **komplexe Logarithmus** von z. Damit ist auch eine Zahl $w + 2k\pi\mathrm{i}$ mit ganzzahligem k ein Logarithmus von z, d.h. es gibt eine unendliche Zahl von komplexen Logarithmen. Für $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ erhalten wir

$$w = \ln r + \mathrm{i}\theta + 2\pi k\mathrm{i} \ , \tag{3.9}$$

d.h. Zahlen w mit $e^w = z$ bilden in der komplexen Ebene eine vertikale Kette von Punkten im Abstand 2π. Diese Mehrdeutigkeit spiegelt die Periodizität der komplexen Exponentialfunktion wider. Oft ist es sinnvoll, sich auf einen dieser Logarithmen zu beschänken. Konvention ist es, den Imaginärteil von w auf das Intervall $]-\pi, \pi]$ zu beschränken. Der so definierte Logarithmus heißt **Hauptwert** von w.
"Vergisst" man die Mehrdeutigkeit der komplexen Wurzel oder des Logarithmus, kann dies absurde Ergebnisse nach sich ziehen. Kurz: $1 = e^{2\pi k\mathrm{i}}$, aber daraus folgt nicht (etwa durch Bilden des Logarithmus auf beiden Seiten) $0 = 2\pi k\mathrm{i}\ \forall k \in \mathbb{Z}$ [2]

Info:

Die komplexen Zahlen erscheinen zunächst abstrakt und schwer zugänglich. Das galt für die irrationalen Zahlen oder die negativen Zahlen aber sicher auch einmal. In der Mathematik spielen die komplexen Zahlen wegen der sogenannten algebraischen Abgeschlossenheit eine wichtige Rolle: Jede algebraische Gleichung von Grad größer Null (Nullstelle eines Polynoms n-ter Ordnung mit $n > 0$) hat eine Lösung in den komplexen Zahlen. In der Physik ist der Zusammenhang zwischen Trigonometrie und der Exponentialfunktion zentral bei der Beschreibung von Schwingungen und Oszillationen. In Kapitel 4 werden wir davon extensiv Gebrauch machen. Und schließlich kann man auch einen Vektorraum über den komplexen Zahlen definieren, also einen Vektorraum dessen Elemente (statt mit reellen Zahlen) mit komplexen Zahlen multipliziert werden können. Ein solcher Vektorraum spielt die zentrale Rolle in der Quantenmechanik.

[2] Der Fehler liegt daran dass wir auf der linken Seite mit $\ln(1)$ den eindeutig definierten Logarithmus einer reellen Zahl verwendet haben, auf der rechten aber den komplexen Logarithmus. Korrekt wäre gewesen auch links den komplexen Logarithmus zu verwenden $\ln(1 + 0i) = 0 + 2\pi ki$.

Zusammenfassung:

- Die komplexen Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen, so daß die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar wird. Dazu führen wir die sogenannte imaginäre Zahl i mit $\mathrm{i}^2 = -1$ ein. $z = a + \mathrm{i}b$ wird als komplexe Zahl bezeichnet, a als ihr Realteil und b als ihr Imaginärteil. $z^* = a - \mathrm{i}b$ heißt die komplex Konjugierte von $z = a + \mathrm{i}b$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ der Betrag von z.

- Addition, Subtraktion komplexer Zahlen sind durch Addition und Subtraktion von Real- und Imaginärteil definiert. Die Multiplikation komplexer Zahlen erfolgt durch Ausmultiplizieren unter Verwendung von $\mathrm{i}^2 = -1$, die Division zweier komplexer Zahlen z_2 durch z_2 durch $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\,\frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$.

- Durch die Taylorreihe $e^z = 1 + z + z^2/2! + \ldots$ kann auch die Exponentialfunktion für komplexe Zahlen definiert werden. Der Vergleich mit der Taylorreihe der Sinus- und der Kosinusfunktion zeigt $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta$ (Eulerformel).

- Durch die Umkehrung der Exponentialfunktion ist auch der komplexe Logarithmus definiert. Ebenso wie die Wurzeln einer komplexen Zahl ist die komplexe Logarithmusfunktion nicht eindeutig sondern mehrdeutig (im Gegensatz zum Logarithmus einer reellen Zahl).

Vier

Differentialgleichungen

Physik ist in weiten Teilen Naturbeschreibung mit Differentialgleichungen: viele Naturgesetze können mit Gleichungen formuliert werden, die eine Funktion sowie Ableitungen dieser Funktion enthalten. Wir lernen unterschiedliche Arten von Differentialgleichungen kennen und entwickeln Strategien zur Lösung von Differentialgleichungen.

4.1 Differentialgleichungen in der Physik

Einzelne Messungen können durch Zahlen beschrieben werden, die ihnen zugrundeliegenden Prozesse sind jedoch (meist) durch Funktionen beschrieben, z.B. die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ eines Teilchens oder ein Potential $V(x, y, z)$.
Oft gehorchen diese Funktionen Differentialgleichungen

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t) \qquad \text{Newton II}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho(\vec{r})/\epsilon_0 \qquad \text{Maxwell I}$$

Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion, in der Ableitungen dieser Funktion auftreten. Die klassische Mechanik, Elektrodynamik, Quantenmechanik basieren alle auf Differentialgleichungen. Bevor wir unterschiedliche Arten von DGL zu klassifizieren und lösen lernen, diskutieren wir mehrere Beispiele.
Das zweite Newtonsche Gesetz in einer Dimension, beschrieben durch eine Koordinate y ist

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = ma(t) = F(y(t), t)\ ,$$

und verbindet die Beschleunigung einer Punktmasse mit der Kraft die auf die Punktmasse wirkt. Letztere kann sowohl von der Zeit, als auch vom Ort abhängen. Wir betrachten mehrere Spezialfälle.

1. Konstante Kraft $F = mg$. Diese Fall beschreibt die Bewegung eines Teilchens in einem konstanten Gravitationsfeld

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g \tag{4.1}$$

Diese DGL ist eine Gleichung für eine Funktion $y(t)$ der Zeit, d.h. rechte und linke Seite sind Funktionen der Zeit (die rechte Seite ist in diesem Beispiel eine konstante Funktion). Die gesuchte Lösung, eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung, muss für alle Zeiten t gleich der rechten Seite sein. Gesucht ist eine also Funktion $y(t)$, deren zweite Ableitung nach t für alle Zeiten gleich g ist.
$y(t) = \frac{1}{2}\ gt^2\ +\ bt\ +\ a$ löst diese Gleichung, da $\frac{d^2}{dt^2}(gt^2/2) = g$ und $\frac{d^2}{dt^2}(at+b) = 0$. Die Koeffizienten a und b sind aus den Anfangsbedingungen $y(t=0) = y_0$, $\frac{dy}{dt}(0) = v_0$ zu bestimmen: Einsetzen von $t = 0$ gibt $a = y_0$ und $b = v_0$.

2. Zeitabhängige Kraft $F = Am\ \cos(\Omega t)$. Dieser Fall beschreibt ein Teilchen, das einer oszillierenden Kraft unterworfen ist

$$\frac{d^2y}{dt^2} = A\cos(\Omega t) \tag{4.2}$$

$y(t) = -\frac{A}{\Omega^2}\cos(\Omega t) + at + b$ löst die Gleichung, da $\frac{d^2}{dt^2}\cos(\Omega t) = -\Omega^2\cos(\Omega t)$ und $\frac{d^2}{dt^2}(at+b) = 0$.

3. Ortsabhängige Kraft $F(y) = -ky$. Dieser Fall beschreibt eine Punktmasse an einer linearen Feder.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}\ y(t) \equiv -\omega_0^2 y(t)\ , \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \tag{4.3}$$

Diese DGL unterscheidet sich qualitativ von den ersten beiden Beispielen. Gesucht ist eine Funktion $y(t)$, deren zweite Ableitung nicht gleich einer bekannten Funktion ist, sondern proportional zur gesuchten Funktion selbst. Wir werden effektive Strategien zur Lösung solcher DGL kennenlernen, hier erraten wir eine Lösung. Wir erwarten eine Oszillation der Masse an der Feder mit zeitlich konstanter Amplitude; $y(t) = A\ \cos(\omega_0 t - \phi)$. Einsetzen in die DGL zeigt, dass dieser Ansatz tatsächlich die DGL löst, da zweifaches Ableiten einer Kosinus oder Sinusfunktion wieder eine Kosinus/Sinusfunktion ist.

4.2 Terminologie

Eine Gleichung für eine Funktion, die eine oder mehrere Ableitung enthält, heißt **Differentialgleichung**, die höchste Ordnung dieser Ableitungen heißt **Ordnung der DGL**. Die Variable, nach der abgeleitet wird, heißt **unabhängige Variable**, die Variable, die abgeleitet wird, heißt **abhängige Variable**. DGL, die nur Ableitungen nach einer einzelnen Variablen enthalten, heißen **gewöhnliche DGL**. DGL, die (partielle) Ableitungen nach mehreren Variablen enthalten, heißen **partielle DGL**.

4.3 Gewöhnliche DGL erster Ordnung

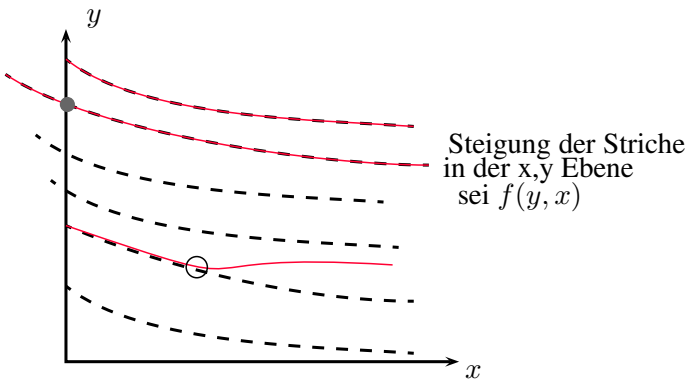
Beispiel

Radioaktiver Zerfall. Die Zahl der pro kleinem Zeitintervall zerfallenden Kerne ist proportional zur Zahl der vorhandenen Kerne y

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y(t) \tag{4.4}$$

Die Zahl radioaktiver Kerne nimmt exponentiell mit der Zeit ab: tatsächlich wird $\frac{dy}{dx} + \lambda y(t) = 0$ gelöst durch $y(t) = y_0\, e^{-\lambda t}$. Die Konstante y_0 kann aus der Anfangsbedingung $y(x = 0) = y_0 e^{-\lambda 0} = y_0$ bestimmt werden.

An dieser Stelle ist eine konzeptionelle Hürde zu überwinden: die DGL $\frac{dy}{dx} = -\lambda y(t)$ ist auf der rechten Seite eine Funktion von y (hier die Funktion y selbst): Die Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Kerne ist gegeben durch λy, proportional zur Zahl der Kerne y. Die DGL setzt sie gleich der negativen Ableitung von y nach der Zeit. Finden wir allerdings die Lösung $y(t) = Ae^{-\lambda t}$ und setzen sie in die DGL ein, steht auf der rechten Seite eine Funktion von t allein, nämlich $-\lambda A e^{-\lambda t}$. Dennoch ist die DGL selbst eine Gleichung, die explizit y und t enthalten kann, erst ihre Lösung etabliert eine Beziehung $y = y(t)$[1] . Die rechte Seite einer DGL wie (4.4) kann also sowohl von der unabhängigen Variablen abhängen, hier t, als auch von der abhängigen Variable, hier y.



Eine allgemeine DGL kann nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst werden (linke Seite), auf der rechten Seite stehen dann Terme, die von der abhängigen Variable y und vielleicht noch von der unabhängigen Variable x abhängen. In dem Beispiel des radioaktiven Zerfalls ist die DGL (4.4) bereits nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, auf der rechten Seite steht ein Term, der nur von y abhängt und als Funktion von y geschrieben werden kann $\frac{dy}{dx} = f(y(x))$ mit $f(y) = -\lambda y$. Den letzten Ausdruck können wir auch als $f(y(x)) = y(x)$ schreiben, $f(y) = y$ betont, dass wir die rechte Seite dieser DGL kennen wenn wir y kennen (wenn 1000 Atome vorhanden sind, werden pro kleiner Zeiteinheit 1000λ Atome zerfallen, dazu müssen wir nicht die Uhrzeit (abhängige Variable) wissen). Die

[1] Nicht anders ist es bei einer algebraischen Gleichung wie $x - 3 = 4$. Prinzipiell kann x jeden reellen Wert annehmen. Aber nur $x = 7$ löst die Gleichung. In dem obigen Beispiel kann die Zahl der Kerne $y(t)$ zum Zeitpunkt t jeden Wert annehmen, aber nur $y(t) = Ae^{-\lambda t}$ löst die DGL $\frac{dy}{dt} = -\lambda y(t)$.

DGL erster Ordnung zum Beispiel

$$(\frac{dy}{dx})^3 = \sin(y(x)) + x^3 \tag{4.5}$$

kann aufgelöst werden zu $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\sin(y(x)) + x^3}$. Die rechte Seite ist bekannt wenn y und x bekannt sind, $\frac{dy}{dx} = f((y(x)), x)$ mit $f(y, x) = \sqrt[3]{\sin(y) + x^3}$.
Allgemeine DGL erster Ordnung können also geschrieben werden als

$$\frac{dy}{dx} = f(y(x), x) \ , \tag{4.6}$$

indem man die DGL nach der Ableitung erster Ordnung auflöst. Im Beispiel des radioaktiven Zerfalls (4.4) ist $f(y, x) = -\lambda y$. Die Lösung dieser DGL lässt sich als eine Kurve $y(x)$ visualisieren, die überall die durch die Funktion $f(y, x)$ vorgegebene Steigung f hat. Eine solche Kurve kann man geometrisch konstruieren, indem man die xy-Ebene zunächst mit kleinen Strichen füllt, die jeweils die Steigung $f(y, x)$ haben. Gegeben eine Anfangsbedingung $y(x) = y_x$ bei einem gegebenen x, können wir uns vorstellen den "Strichen zu folgen". Die entstehende Kurve ist überall tangential zu den kleinen Strichen, hat also überall die Steigung $f(y(x), x)$ und löst damit die DGL.

Info:

Diese graphische Darstellung legt auch eine einfache numerische Methode nahe, um DGL mit Hilfe eines Computers zu lösen. Ausgehend von $y(0)$, das durch die Anfangsbedingung festgelegt sei, suchen wir nach Näherungen der Lösung auf einem diskreten Gitter $x = 0, \Delta x, 2\Delta x, \ldots$. Dazu machen wir diskrete Schritte entlang des Gitters. Aus $(y(\Delta x) - y(0))/\Delta x \approx dy/dx = f(y, x)$ am ersten Gitterpunkt folgt der Wert $y(\Delta x) \approx y(0) + f(y(0), x)\Delta x$. Dieser Schritt lässt sich nun wiederholen um iterativ $y(2\Delta x), y(3\Delta x), \ldots$ zu bestimmen. Die Schrittweite Δx bestimmt die Genauigkeit des Ergebnisses. Dieser Algorithmus ist als Euler-Verfahren bekannt, mehr dazu in der Computerphysikvorlesung!

4.3.1 Eindeutigkeit

Sei eine DGL $\frac{dy}{dx} = f(y(x), x)$ auf einem Rechteck $(a, b) \times (c, d)$ definiert, und ein endliches $L > 0$ existiert mit

$$|f(y_1, x) - f(y_2, x)| \leq |y_1 - y_2|L \qquad \forall\, x, y_1, y_2 \text{ auf dem Rechteck} \tag{4.7}$$

so sind zwei Lösungen, die bei einem $x_0 \in [a, b]$ denselben Wert haben, im gesamten Intervall $[a, b]$ gleich.
Betrachten wir $f(y, x)$ als Funktion $f_x(y)$ von y (bei festem x). Dann besagt die Bedingung (4.7), dass alle Sekanten von $f_x(y)$ eine endliche Steigung haben. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heißt **Lipschitz-stetig** (in y), die Bedingung (4.7) wird als **Lipschitz-Bedingung** bezeichnet.

Info:

Dieser Eindeutigkeit der Lösung kann recht leicht bewiesen werden: Integration auf beiden Seiten der DGL (4.6) ergibt die Integralgleichung $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' f(x', y(x'))$. Nehmen wir an, dass wir zwei Funktionen $y(x)$ und $Y(x)$ mit dieser Eigenschaft gefunden haben, die bei x_0 gleich sind. Wir betrachten nun ein x mit $x - x_0 < \frac{1}{2L}$ und bezeichnen den größten Unterschied zwischen $y(x)$ und $Y(x)$ im Intervall $[x, x_0]$ als S. Dann gilt

$$|Y(x) - y(x)| \leq \int \mathrm{d}x' |f(x', Y(x')) - f(x', y(x'))| \leq L \int \mathrm{d}x' |Y(x') - y(x')| \leq LS(x - x_0) \leq S/2 \,. \tag{4.8}$$

Durch Auswertung bei dem Maximum von $|Y(x) - y(x)|$ erhalten wir $S \leq S/2$, ein Widerspruch, der sich nur durch $S = 0$ auflösen lässt. Die beiden Funktionen sind also im Intervall $[x_0, x]$ gleich. Gleicheit auf dem gesamten Intervall $[a, b]$ folgt dann durch Iteration.
Die Existenz der Lösung wird mit dem Satz von Picard-Lindelöf bewiesen. Man beginnt mit $y_0(x) = y(x_0)$, d.h. einer konstanten Funktion, die die Anfangsbedingung erfüllt. Dann nutzt man die Iterationsvorschrift $y_{n+1}(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' f(x', y_n(x'))$ und zeigt, dass die Folge von Funktionen $y_n(x)$ konvergiert, der Grenzfall $n \to \infty$ löst damit die DGL (s. Kerner und von Wahl).

Die Lipschitz-Bedingung (4.7) ist in der Praxis fast immer erfüllt. Damit legt eine Anfangsbedingung die Lösung einer DGL erster Ordnung eindeutig fest. Von einer Gleichung, die die Natur zu beschreiben soll, erwarten wir diese Eindeutigkeit: Gegeben die Anfangsbedingung und ein Differentialgleichung zur Beschreibung des Systems, ist der Zustand des Systems für alle weiteren Zeiten eindeutig festgelegt. Gäbe es mehrere Lösungen wäre die DGL keine Beschreibung des Systems, oder zumindest keine vollständige Beschreibung.
Ein Nebeneffekt ist Arbeitsersparnis: Schaffen wir es - egal wie - eine Lösung der DGL zu finden, die die Anfangsbedingung erfüllt, sind wir am Ziel: weitere Lösungen gibt es nicht.

4.3.2 Gekoppelte Differentialgleichungen mehrerer Veränderlicher

Die graphische Konstruktion der Lösung einer DGL und die Eindeutigkeit der Lösung scheint zunächst auf DGL erster Ordnung beschränkt. Dieser Zugang lässt sich allerdings leicht auf DGL höherer Ordnung verallgemeinern. Dazu definieren wir DGL in mehreren Veränderlichen $y_1(x), y_2(x), \ldots$.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(y_1, y_2, y_3, x) \qquad\qquad \text{gekoppelte DGL erster Ordnung} \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(y_1, y_2, y_3, x) \\ \frac{dy_3}{dx} &= f_3(y_1, y_2, y_3, x) \end{aligned}$$

In Vektorschreibweise können wir dieses Gleichungssystem kompakt als $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, x)$ schreiben. Man bezeichnet diese Differentialgleichungen als **gekoppelt**, wenn sie sich nicht als mehrere DGL in nur jeweils einer einzelnen Variablen schreiben lassen, d.h. wenn in f_1 ausser y_1 noch z.B. y_2 etc. auftritt.

Beispiel

Wir betrachten das zweite Newtonsche Gesetz, eine gewöhnliche DGL zweiter Ordnung. Indem wir eine neue Variable $v(t) = \frac{dy}{dt}$ einführen erhalten wir zwei gekoppelte DGL erster Ordnung

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F(y,t) && \text{zwei gekoppelte DGL} \\ \frac{dy}{dt} &= v(t)\ . \end{aligned}$$

Die Lsung dieser DGL ist durch zwei Anfangsbedingungen festgelegt, die Geschwindigkeit $v(0)$ zum Zeitpunkt Null und die Position $y(0)$ zum Zeitpunkt Null. Equivalent kann man die Anfangsbedingung auch durch einen Vektor mit zwei Komponenten $v(0)$ und $y(0)$ festlegen.

Differentialgleichungen höherer Ordnung lassen sich als gekoppelte DGL erster Ordnung schreiben. Die Lösungen solcher Gleichungssysteme sind wieder eindeutig, wenn eine Verallgemeinerung der Lipschitz-Bedingung (4.7) erfüllt ist. Damit lassen sich Ergebnisse zu Existenz und Eindeutigkeit der Lösung direkt von DGL erster Ordnung auf DGL beliebiger Ordnung übertragen. Der einzige Unterschied ist die Zahl der Anfangbedingungen. Die Anfangsbedingung einer gewöhnlichen DGL n-ter Ordnung ist durch n Parameter festgelegt; gegeben diese Parameter ist die Lösung eindeutig.

4.3.3 Separation der Variablen

Eine einfache Lösungsmethode existiert für einen Spezialfall von DGL erster Ordnung, nämlich sogenannte **separable** Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = h(y)g(x)\ , \tag{4.9}$$

bei denen die rechte Seite ein Produkt von zwei (bekannten) Funktionen von x und von y ist.

Beispiel

$\frac{dy}{dx} = \sin(x)\cos(y)$ ist separabel, denn mit $h(y) = \cos(y)$ und $g(x) = \sin(x)$ lässt sich diese DGL in die Form (4.9) bringen. Dagegen ist $\frac{dy}{dx} = \sin(x) + \cos(y)$ nicht separabel.

Die gesuchte Lösung ist eine Funktion $y(x)$, die (4.9) erfüllt. Mit dieser (noch unbekannten) Funktion $y(x)$ können beide Seiten als Funktion von x verstanden werden. Umformung und Integration über ein Intervall $[x_0, x]$ ergibt dann

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' g(x') = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' \frac{dy(x')}{dx'} \frac{1}{h(y(x'))} = \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y' \frac{1}{h(y')}. \tag{4.10}$$

Im letzten Schritt wurde eine Variablensubstitution durchgeführt. Die Auswertung des Integrals ergibt links eine Funktion von x und x_0, rechts eine Funktion von y und y_0. Diese Gleichung lässt sich nach y auflösen. Wir erhalten damit y in Abhängigkeit von y_0, x_0 und x. Diese Funktion erfüllt (per Konstruktion) die DGL (4.9), x_0 und y_0 sind die Anfangsbedingungen.

Beispiel

Wir wenden die Methode der Separation der Variablen auf die Differentialgleichung (4.4) an, die den radioaktiven Zerfall beschreibt. Anfangsbedingung sei $y(t=0)=y_0$. Mit $f(y,t)=-\lambda y = h(y)g(t)$ schreiben wir $h(y)=y$ und $g(t)=-\lambda$. Aus (4.10) erhalten wir mit $t_0=0$

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' g(t') = -\lambda \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' = -\lambda [t']_{t_0}^{t} = -\lambda(t-t_0) \tag{4.11}$$
$$= \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y' \frac{1}{h(y')} = \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y' \frac{1}{y'} = [\ln(y')]_{y_0}^{y} = \ln(y) - \ln(y_0) = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) .$$

Auflösen nach $y(t)$ ergibt das erwartete Ergebnis $y(t) = y_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$.

4.3.4 Gewöhnliche lineare DGL erster Ordnung

Ein weiterer wichtiger Spezialfall sind lineare DGL. Eine gewöhnliche lineare DGL erster Ordnung ist von der Form[2]

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\, y(x) = f(x) \ . \tag{4.12}$$

Alle Terme, die die abhängige Variable enthalten, haben wir dabei auf der linken Seite gesammelt, Terme, die lediglich die unabhängige Variable enthalten, auf der rechten. Diese Gleichung wird als **lineare DGL** bezeichnet, weil jeder der additiven Terme auf der linken Seite y oder seine Ableitung in *erster* Potenz enthält, also $y(x)$ oder $\frac{dy}{dx}$. Terme wie $y^2(x)$, $y(x)\frac{dy}{dx}$, $\sin(y(x))$, etc. treten also nicht auf. Eine einfache Konsequenz, die sich noch als wichtig herausstellen wird, ist folgende: Betrachten wir statt einer Funktion $y(x)$ ein Vielfaches $ay(x)$, dann multipliziert sich die linke Seite einer linearen DGL mit a.
Der Term $f(x)$ auf der rechten Seite wird als **Inhomogenität** der DGL bezeichnet. Ist die rechte Seite gleich null spricht man von einer **homogenen** DGL.

Lösung der homogenen Gleichung

Wir suchen die Lösung von

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\, y(x) = 0 \ . \tag{4.13}$$

In Analogie mit der DGL $\frac{dy}{dx} + \lambda\, y(x) = 0$, die durch die Exponentialfunktion $y(x) = y(0)e^{-\lambda x}$ gelöst wird, versuchen wir zuerst den Ansatz $y(x) = y(0)\, e^{-a(x)x}$. Mit

$$\frac{dy}{dx} = -y(0)\, \frac{d}{dx}\, (a(x)\, x)\, e^{-a(x)\, x} \tag{4.14}$$

ergibt er allerdings keine Lösung der DGL. Der zweite Versuch mit $y(x) = y(0)\exp\left\{-\int_0^x dx'\, a(x')\right\} \equiv y(0)\, e^{-A(x)}$ ist allerdings erfolgreich

$$\frac{dy}{dx} = y(0)\, \frac{d}{dx} \left(-\int_0^x dx'\, a(x')\right) e^{-A(x)}$$
$$= -y(0)\, a(x)\, e^{-A(x)} = -a(x)\, y(x) \ . \tag{4.15}$$

[2] Der Term $\frac{dy}{dx}$ könnte natürlich noch einen Vorfaktor enthalten, die Gleichung wäre dann $b(x)\frac{dy}{dx} + a(x)\, y(x) = f(x)$. Teilen wir beide Seiten durch $b(x)$, so erhalten wir eine Gleichung der Form (4.12).

Lösung der inhomogenen Gleichung

Als Ansatz zur Lösung der inhomogenen DGL

$$\frac{dy}{dx} + a(x)\, y(x) = f(x) \tag{4.16}$$

wählen wir $y(x) = c(x)\, e^{-A(x)}$ mit einer noch zu bestimmenden Funktion $c(x)$. Bei der Ableitung dieses Ansatzes nach x erhalten wir nach der Produktregel 2 Terme: $\frac{dy}{dx} = -a(x)\, c(x)\, e^{-A(x)} + c'(x)\, e^{-A(x)}$. Der erste Term und $a(x)\, y(x)$ heben sich gegenseitig weg. Der zweite Term $c'(x)\, e^{-A(x)}$ muss dann gleich der rechten Seite von (4.16) sein:

$$\begin{aligned}
\curvearrowright \quad & \frac{dy}{dx} + a(x)\, y(x) = c'(x)\, e^{-A(x)} \overset{\text{DGL}}{=} f(x) \\
\curvearrowright \quad & c'(x) = e^{A(x)} f(x) \\
& c(x) = \int_0^x dx' e^{A(x')} f(x') \\
& y(x) = c(x) e^{-A(x)} = \int_0^x dx'\, e^{-A(x)+A(x')} f(x') \\
& \quad = \int_0^x dx' G(x,x') f(x') \qquad \text{mit } G(x,x') \equiv e^{-A(x)+A(x')}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$G(x, x')$ heißt die **Greensche Funktion** dieser DGL. Die Werte von $f(x')$ im Intervall $0 \leq x' \leq x$ bestimmen also $y(x)$ bei einem gegebenen Wert von x. Die Greenfunktion $G(x, x')$ gibt an, wie $y(x)$ von $f(x')$ abhängt. Ist x die Zeit t, dann beschreibt die Greensche Funktion $G(t, t')$ den Einfluss von $f(t')$ auf die Lösung zu einem späteren Zeitpunkt t.
Bei dieser Lösung fällt auf, dass es keinen freien Parameter zur Wahl einer Anfangsbedingung gibt, bei $x = 0$ ist $y = 0$. Addieren wir allerdings zur Lösung der inhomogenen DGL die Lösung der homogenen Gleichung, erhalten wir weitere Lösung der inhomogenen DGL: Ist $y_1(x)$ eine Lösung der inhomogenen DGL und $y_2(x)$ eine Lösung der homogenen DGL, dann ist auch $y(x) = y_1(x) + by_2(x)$ eine Lösung der inhomogenen DGL, da

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + a(x)\, y(x) &= \frac{d}{dx}(y_1(x) + by_2(x)) + a(x)(y_1(x) + by_2(x)) \\
&= [\frac{dy_1}{dx} + a(x)\, y_1(x)] + b[\frac{dy_2}{dx} + a(x)\, y_2(x)] = f(x)\ .
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenützt, dass y_1 die inhomogene Gleichung $\frac{dy_1}{dx} + a(x)\, y_1(x) = f(x)$ löst und y_2 die die homogene Gleichung $\frac{dy_2}{dx} + a(x)\, y_2(x) = 0$. Die Lösung mit der Anfangsbedingung $y(x = 0) = b$ ist dann

$$y(x) = \int_0^x dx'\, e^{-A(x)+A(x')} f(x') + b\, e^{-A(x)}\ . \tag{4.19}$$

Der zweite Term in diesem Ausdruck wird als **allgemeine Lösung** bezeichnet (da er nicht von der speziellen Form der Inhomogenität abhängt), der erste Term als **spezielle Lösung**. Bei $x = 0$ ist der erste Term gleich null und die Exponentialfuntion im zweiten Term gleich eins, $b = y(x = 0)$ ist damit gleich der frei gewählten Anfangsbedingung. Analog, wenn die

Anfangsbedingung nicht bei $x = 0$, sondern bei einem anderen Wert von $x = a$ vorliegt, wählen wir als untere Integralgrenzen den entsprechenden Wert von x und den Vorfaktor des zweiten Terms als $y(a)$.
Diese Methode zur Lösung von Differentialgleichungen wird als **Variation der Konstanten** bezeichnet[3]. Den Vorfaktor $c(x)$ der Exponentialfunktion, der in der homogenen Lösung eine Konstante ist, lässt man nun variieren, um eine Lösung einer inhomogenen Gleichung zu finden.

4.4 Gewöhnliche lineare DGL

Wir betrachten die gewöhnliche DGL n-ter Ordnung für $y(x)$ mit einer reellen Veränderlichen x

$$a_n(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y(x) = f(x)\ . \tag{4.20}$$

Diese DGL heißt **lineare DGL**, da $y(x)$ und seine Ableitungen in jedem Term in erster Potenz auftreten. Viele fundamentale Gleichungen der Physik sind lineare DGL (Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik, Schrödingergleichung der Quantenmechanik). Die rechte Seite $f(x)$ wird wieder als **Inhomogenität** der DGL bezeichnet. Die Gleichung lässt sich in der Form

$$\left[a_n(x)\,\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{d}{dx} + a_0(x)\right] y(x) = f(x) \tag{4.21}$$

schreiben, wobei wir den Term in eckigen Klammern als eine Abbildung $\mathcal{L} \equiv \left[a_n(x)\,\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{d}{dx} + a_0(x)\right]$ (einen sogenannten **Differentialoperator**) von Funktionen auf Funktionen auffassen, mit

$$y(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} a_n(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y(x)\ . \tag{4.22}$$

Der Differentialoperator $\mathcal{L}$ einer linearen DGL ist eine lineare Abbildung (im Raum der Funktionen), $\mathcal{L}(a\,y_1(x) + b\,y_2(x)) = a\,\mathcal{L}y_1(x) + b\,\mathcal{L}\,y_2(x)$.
Dieser Zugang erlaubt die kompakte Schreibweise von DGL $\mathcal{L}\ y = f$. Die Lösung y folgt dann aus der Inversen des Operators $\mathcal{L}$: Gesucht ist $y(t)$, so dass der Differentialoperator angewandt auf $y(t)$ die Funktion $f(t)$ ergibt.

Beispiel

Um die Abstraktion etwas zu mildern: Beginnen wir mit der DGL $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Die linke Seite ist die Ableitung von $y(x)$ nach x. Den Prozess des Ableitens denken wir uns als eine Abbildung (siehe 0.2.2) von der Funktion $y(x)$ auf $\frac{dy}{dx}$; diese Abbildung ist eine "Maschine", die eine Funktion $y(x)$ aufnimmt und $\frac{dy}{dx}$ ausspuckt. Wir geben dieser Abbildung den Namen $\mathcal{L} = \frac{d}{dx}$ und schreiben

$$y(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dy}{dx}\ . \tag{4.23}$$

Diese Abbildung $\mathcal{L}$ ist **linear**, da $\frac{d}{dx}(ay_1(x) + by_2(x)) = a\frac{dy_1}{dx} + b\frac{dy_2}{dx}$. (Die Steigung von $ay(x)$

[3] Leider ein reichlich widersinniger Name.

ist an jedem Punkt a mal die Steigung von $y(x)$ und die Steigung von $y_1(x) + y_2(x)$ ist die Summe der Steigungen.) Andere DGL sind durch andere Differentialoperatoren beschrieben, z.B. in der DGL $a(x)\frac{dy}{dx} = f(x)$ ist $\mathcal{L} = a(x)\frac{d}{dx}$. Für jede lineare DGL ist der entsprechende Differentialoperator $\mathcal{L}$ linear.

Aus der Linearität von $\mathcal{L}$ ergibt sich auch eine wichtige mathematische Eigenschaft, die alle homogenen ($f(t) = 0$) linearen DGL teilen. Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen einer linearen, homogenen DGL, d.h. $\mathcal{L}\, y_1 = 0, \quad \mathcal{L}\, y_2 = 0$. Dann ist sind auch die Linearkombination $a\, y_1 + b\, y_2$ Lösungen, denn

$$\mathcal{L}(a\, y_1 + b\, y_2) = a\, \mathcal{L}\, y_1 + b\, \mathcal{L}\, y_2 = 0\ . \tag{4.24}$$

Die Lösungen einer linearen homogenen DGL bilden also einen Vektorraum, man kann sie addieren und mit Zahlen multiplizieren und erhält wieder eine Lösung der DGL.

Info:

Dieses Ergebnis folgt aus der Linearität von $\mathcal{L}$: die Lösungen linearer homogener Gleichungen bilden einen Vektorraum. Diese Eigenschaft ist also nicht auf Differentialgleichungen beschränkt.

Beispiel

Als Beispiel betrachten wir die lineare DGL $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y(t) = 0$, $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$ ist der dazugehörige (lineare) Differentialoperator, mit ihm kann die Gleichung als $\mathcal{L}y = 0$ geschrieben werden. Diese homogene lineare gewöhnliche DGL beschreibt eine Punktmasse an einer linearen Feder, $m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$. Sowohl $y(t) = \cos(\omega_0 t)$ als auch $y(t) = \sin(\omega_0 t)$ lösen diese DGL. Auch $y(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$ ist eine Lösung für beliebige a, b, denn $\frac{d^2y}{dx^2} = -a\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - b\omega_0^2\sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2 y(t)$. Diese Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen gleicher Kreisfrequenz wiederum eine oszillierende Funktion mit Kreisfrequenz ω_0, da

$$A\cos(\omega_0 t - \phi) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) \tag{4.25}$$

mit $A\cos(\phi) \equiv a$ und $A\sin(\phi) \equiv b$ und damit $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan(\phi) = b/a$ (s. Additionstheorem (3.6)).

Für inhomogene Gleichungen gilt etwas ähnliches: Sei $y_1(x)$ eine Lösung einer inhomogenen Gleichung $\mathcal{L}\, y_1 = f$ und $y_2(x)$ eine Lösung der dazugehörigen *homogenen* Gleichung $\mathcal{L}\, y_2 = 0$, dann ist $y_1(x) + a\, y_2(x)$ eine weitere Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\mathcal{L}(y_1 + a\, y_2) = \mathcal{L}y_1 + a\, \mathcal{L}\, y_2 = f\ . \tag{4.26}$$

Beispiel

Diese Eigenschaft linearer DGL haben wir bereits bei den Beispielen (4.1) und (4.2) kennengelernt. Die Lösung der inhomogenen Gleichung $\frac{d^2y}{dt^2} = g$ ist $y(t) = gt^2/2$, Lösungen der dazugehörigen homogenen $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ Gleichung sind $y(t) = 1$ und $y(t) = t$, ihre Linearkombination $at + b$ löst ebenso die homogene Gleichung. Erst die Summe der Lösung der inhomogenen Gleichung

und die der homogenen Gleichung, $y(t) = gt^2/2 + at + b$, ist dann die vollständige Lösung der DGL. Die Koeffizienten a und b werden aus der Anfangsbedingung (Ort und Geschwindigkeit) bestimmt.

Komplexe Lösungen linearer DGL Für lineare DGL sind Realteil und Imaginärteil einer komplexen Lösung wiederum Lösungen der DGL. Diese Eigenschaft wird ihren enormen Wert zeigen, wenn wir in Abschnitt 4.4.1 die lineare Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators lösen.
Sei $\mathcal{L}$ ein reeller Operator (die Koeffizienten aller Ableitungen sind reellwertig), $z(x) = z_R(x) + \mathrm{i}\, z_I(x)$ aber eine komplexe Lösung der homogenen DGL. Aus $\mathcal{L}z = 0 = 0 + \mathrm{i}\,0$ und der Linearität des Differentialoperators $\mathcal{L}$ folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}(z_R + \mathrm{i}\, z_I) = \mathcal{L}z_R + \mathrm{i}\,\mathcal{L}z_I \\ &\curvearrowright \mathcal{L}\, z_R = 0\ ,\ \mathcal{L}\, z_I = 0\ . \end{aligned} \tag{4.27}$$

Beispiel

Als Beispiel betrachten wir wieder die lineare DGL $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y(t) = 0$. Sie wird gelöst durch die komplexe Funktion $z(t) = e^{\mathrm{i}\omega_0 t}$, da $\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega_0^2 e^{\mathrm{i}\omega_0 t} = -\omega_0^2 z(t)$. Real- und Imaginärteil von $z(t) = \cos(\omega_0 t) + \mathrm{i}\sin(\omega_0 t)$ sind ebenso Lösungen der DGL.

Für eine inhomogene Gleichung gilt wieder etwas analoges. Sei $\mathcal{L}z = f$ dann löst der Realteil von $z(x)$ die Differentialgleichung $\mathcal{L}y = \Re(f)$ und der Imaginärteil von $z(x)$ die Differentialgleichung $\mathcal{L}y = \Im(f)$.

4.4.1 Gewöhnliche lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gewöhnliche lineare DGL zweiter Ordnung können in die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y(x) = f(x) \tag{4.28}$$

gebracht werden (indem wir beide Seiten durch einen möglichen Koeffizienten $a_2(x)$ teilen). Wir beschränken uns hier auf konstante Koeffizienten (obwohl es, wie bei der DGL erster Ordnung, wieder Lösungen zu allgemeinen Koeffizienten gibt, die Greensche Funktion für diesen Fall ist aber komplizierter). DGL mit konstanten Koeffizienten sind sowohl von den physikalischen Anwendungen, als auch vom Lösungsansatz her interessant.

Beispiel

Eine Masse m an einer Feder mit Federstärke k bewege sich in einer Dimension durch eine viskose Flüssigkeit (Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit) und wird von einer externen Kraft $F_{\text{ext}}(t)$ angetrieben. Aus der Newtonschen Bewegungsgleichung $m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\,\frac{dx}{dt} + F_{\text{ext}}(t)$ erhalten wir mit $b = \gamma/m, c = k/m, f(t) = F_{\text{ext}}/m$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + c\,x = f(t)\ . \tag{4.29}$$

4.4.2 Gedämpfter hamonischer Oszillator (homogene Gleichung)

Wir beginnen mit der Analyse des Falles ohne externe Antriebskraft, $f(t) = 0$.

$$\frac{d^2x}{dt} + b\frac{dx}{dt} + c\,x(t) = 0\ . \tag{4.30}$$

Wir erwarten generell als Lösung eine sinusförmige Schwingung mit exponentiell abfallender Amplitude und wählen als Ansatz $x(t) = Ae^{-\xi t}\cos(\omega t - \phi)$. Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL (4.30) führt allerdings auf eine aufwändige trigonometrische Rechnung (ausprobieren!). Wir erinnern uns: bei linearen DGL sind Realteile und Imaginärteile von komplexen Lösungen ebenso Lösungen der DGL. Der komplexer Ansatz $x(t) = Ae^{\mathrm{i}\omega t}$ $A, \omega \in \mathbb{C}$ beschreibt sowohl die Oszillation, als auch den exponentiellen Abfall von x mit t. Mit der Zerlegung eines komplexen ω in Realteil und Imaginärteil $\omega = \omega_R + \mathrm{i}\omega_I$ $(\omega_R, \omega_I \in \mathbb{R})$ ist nämlich

$$e^{\mathrm{i}\omega t} = e^{\mathrm{i}\omega_R t}e^{-\omega_I t} = (\cos(\omega_R t) + \mathrm{i}\sin(\omega_R t))e^{-\omega_I t}\ , \tag{4.31}$$

der Realteil von $e^{\mathrm{i}\omega t}$ ist also eine exponentiell abfallende Kosinusfunktion. Auch eine Phasenverschiebung dieser Funktion lässt sich mit einer komplexen Amplitude $A = \tilde{A}e^{-\mathrm{i}\phi}$ $(\tilde{A}, \phi \in \mathbb{R})$ beschreiben, $Ae^{\mathrm{i}\omega_R t} = \tilde{A}e^{-\mathrm{i}\phi + i\omega_R t} = \tilde{A}[\cos(\omega_R t - \phi) + \mathrm{i}\sin(\omega_R t - \phi)]$ mit Realteil $\tilde{A}\cos(\omega_R t - \phi)$. Der komplexe Exponentialansatz ist die wichtigste Anwendung der Eulerformel (3.5) in der Physik. Die Ableitungen von $A\,e^{\mathrm{i}\omega t}$ nach t sind jetzt nämlich einfach

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\mathrm{i}\omega t} \\ \frac{dx}{dt} &= \mathrm{i}\omega Ae^{\mathrm{i}\omega t} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 Ae^{\mathrm{i}\omega t}\ . \end{aligned}$$

Für die DGL (4.30) ergibt der Ansatz $x(t) = A\,e^{\mathrm{i}\omega t}$ dann

$$\begin{aligned} &(-\omega^2 + \mathrm{i}b\omega + c)\,A\,e^{\mathrm{i}\omega t} = 0 \qquad\qquad \forall\, t \\ &A = 0 \quad \text{(triviale Lösung)} \\ &-\omega^2 + \mathrm{i}b\omega + c = 0 \end{aligned}$$

Die ersten Lösung A ist uninteressant und entspricht einem ruhenden Pendel. Die zweite Lösung führt auf eine quadratische Gleichung in ω mit den beiden Lösungen

$$\omega_{+/-} = \frac{-\mathrm{i}b \pm \sqrt{-b^2 + 4c}}{-2} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,b \pm \frac{1}{2}\sqrt{4c - b^2}\ . \tag{4.32}$$

Mithilfe des Exponentialansatzes $A\,e^{\mathrm{i}\omega t}$ ist es also gelungen, die lineare Differentialgleichung (4.30) auf eine algebraische Gleichung zu reduzieren. Die Lösung der homogenen DGL (4.30) ist der Realteil von $A_+e^{\mathrm{i}\omega_+ t} + A_-e^{\mathrm{i}\omega_- t}$. Dieser Ansatz löst lineare DGL mit konstanten Koeffizienten, unabhängig von der Ordnung der DGL.

Wir betrachten zunächst die Lösung des harmonischen Oszillators im Spezialfall ohne Reibung $b = 0$. Aus (4.32) erhalten wir die beiden Lösungen

$$\omega_{+/-} = \pm\omega_0 \equiv \pm\sqrt{c} = \pm\sqrt{k/m}\ .$$

Beide Lösungen $e^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ und $e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$ haben den gleichen Realteil $\cos(\omega_0 t)$ und (bis auf das Vorzeichen) auch den gleichen Imaginärteil, $\pm\sin(\omega_0 t)$. Diese beiden Lösungen können wir linear kombinieren und erhalten die allgemeine Lösung

$$a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)\ , \tag{4.33}$$

siehe (4.25). Diese Lösung hat zwei freie Parameter, die Amplitude A und Phasenverschiebung ϕ, die noch aus den Anfangsbedingungen (Position und Geschwindigkeit) zu bestimmen sind. Die Auslenkung des Oszillators zum Zeitpunkt $t = 0$ sei x_0, seine Geschwindigkeit sei v_0. Setzen wir in der Lösung $x(t)$ und ihrer Ableitung nach der Zeit diese Anfangsbedingungen ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} A\cos(-\phi) &= x_0 && (4.34)\\ -\omega_0 A\sin(-\phi) &= v_0\ . && (4.35) \end{aligned}$$

Teilen wir die zweite Gleichung durch ω_0 und nutzen $\cos^2(-\phi) + \sin^2(-\phi) = 1$ erhalten wir $A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}$. Teilen wir die zweite Gleichung durch die erste, erhalten wir $\tan(-\phi) = v_0/(x_0\omega_0)$, und damit die Phasenverschiebung ϕ.
Für $b > 0$ gibt es 3 qualitative unterschiedliche Fälle.

1. **Gedämpfte harmonische Schwingung** $4c - b^2 > 0$

   $$\begin{aligned} &\omega_{+/-} = \pm\omega_R + \mathrm{i}\omega_I \qquad\qquad \omega_R = \frac{1}{2}\sqrt{4c - b^2} \quad , \quad \omega_I = b/2\\ &z(t) = A_+ e^{\mathrm{i}\omega_+ t} + A_- e^{\mathrm{i}\omega_- t}\\ &\text{mit Realteil } Ae^{-\omega_I t}\cos(\omega_R t - \phi)\ , \end{aligned}$$

   die Kreisfrequenz $w_R = \frac{1}{2}\sqrt{4c - b^2}$ nimmt mit zunehmender Dämpfung b ab, die Abklingrate $\omega_I = b/2$ wächst mit b.

2. **Kritische Dämpfung** $4c - b^2 = 0$

   $$\begin{aligned} \omega_\pm &= \frac{\mathrm{i}}{2}b\\ \text{ergibt } x(t) &= A_\pm e^{\mathrm{i}\omega_\pm t} \end{aligned}$$

   Da ω rein imaginär ist fällt $x_R(t)$ ohne Oszillation exponentiell ab. Überraschend ist, dass der Exponentialansatz nur *eine* Lösung findet. Wir benötigen aber noch eine zweite Lösung, damit wir in der Linearkombination dieser Lösungen 2 freie Parameter haben, um alle Anfangsbedingungen umsetzen zu können. Die zweite Lösung findet sich durch Betrachtung des Grenzfalls $b \to b_c \equiv 2\sqrt{c}$. Wir betrachten eine Linearkombination der beiden Lösungen $e^{\mathrm{i}\omega_+ t}$ und $e^{\mathrm{i}\omega_- t}$ aus (4.32) und führen den den Grenzfall $\omega_+ \to \omega_-$ aus

   $$\begin{aligned} \lim_{\omega_+\to\omega_-} \frac{e^{\mathrm{i}\omega_+ t} - e^{\mathrm{i}\omega_- t}}{\mathrm{i}\omega_+ - \mathrm{i}\omega_-} &= \lim_{\omega_+\to\omega_-} e^{\mathrm{i}\omega_+ t}\frac{1 - e^{\mathrm{i}(\omega_- - \omega_+)t}}{\mathrm{i}\omega_+ - \mathrm{i}\omega_-}\\ &= \lim_{\omega_+\to\omega_-} e^{\mathrm{i}\omega_+ t}\frac{1 - (1 + (\mathrm{i}\omega_- - \mathrm{i}\omega_+)t)}{\mathrm{i}\omega_+ - \mathrm{i}\omega_-} = te^{\mathrm{i}\omega_- t} \end{aligned}$$

und erhalten eine weitere Lösung, die sich nicht einfach aus dem Exponentialansatz ergibt. Die allgemeine Lösung ist dann die Linearkombination der beiden Lösungen

$$x(t) = A\,e^{\mathrm{i}\omega t} + Bt\,e^{\mathrm{i}\omega t} \qquad\qquad \mathrm{i}\omega = -b/2$$

mit zwei freien Parametern (Realteile von A, B).

3. **Überdämpfter Oszillator** $4c - b^2 < 0$

$$\omega_{+/-} = \frac{\mathrm{i}}{2}b \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{|4c - b^2|} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(b \pm \sqrt{b^2 - 4c}\right)$$

Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch

$$x(t) = A_+ e^{\mathrm{i}\omega_+ t} + A_- e^{\mathrm{i}\omega_- t} = A_+ e^{-\omega_{+I} t} + A_- e^{-\omega_{-I} t}\ .$$

Wegen $\omega_+ > \omega_-$ entsprechen die beiden Terme einem (relativ) schnellen und einem langsamen Abklingprozess, beide ohne Oszillation. Für lange Zeiten ist diese Lösung durch den zweiten (langsamen) Term dominiert.

Zum Schluss vergleichen wir noch das Abklingverhalten unter überkritischer Dämpfung und kritischer Dämpfung. Wegen

$$w_{-I} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < \frac{b}{2} = \omega_{cI} \quad \text{(kritisches Abklingen)}$$

führt kritische Dämpfung mit $b = b_c$ zum schnellsten Abklingen, bei der nach einer Auslenkung des Oszillators $x(t)$ so schnell wie möglich zur Ruhelage $x = 0$ zurückkehrt.

4.4.3 Gedämpfter harmonischer Oszillator (inhomogene Gleichung)

$$\mathcal{L}x = f \qquad\qquad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + \omega_0^2$$

Physikalisch beschreibt die Inhomogenität $f(t)$ eine externe Kraft, die den Oszillator antreibt. Wir beschränken uns auf zwei Spezialfälle. Wie wir im Zusammenhang mit der Fourieranalyse sehen werden, ist deren Lösung bereits ausreichend, um die Lösung des harmonischen Oszillators unter einer beliebigen periodischen Antriebskraft zu berechnen.
Der erste Spezialfall ist eine konstante externe Kraft $f(t) = f$. Als Ansatz für die spezielle Lösung wählen wir $x(t) = A$, einsetzen in die DGL ergibt $A = f/\omega_0^2$.

4.4.4 Sinusförmige externe Kraft

Der zweite Spezialfall ist eine sinusförmige externe Kraft. Dieser Fall ist wichtig für eine Vielzahl von Anwendungen (regelmäßiges Anschubsen einer Schaukel, regelmäßige Windstöße gegen eine Brücke). Im nächsten Kapitel werden wir sehen, wie sich auch nicht-sinusförmige Kräfte aus Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz zusammensetzen lassen. Die Kreisfrequenz Ω und Antriebsamplitude F sind vorgegeben, sie hängen auch nicht von den Eigenschaften des Oszillators ab. Gesucht ist also die Lösung der DGL

$$\frac{d^2}{dt^2}\,x + b\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\,x(t) = F\,\cos\Omega t \tag{4.36}$$

Wir nutzen wieder die Linearität der DGL um eine komplexe Lösung zu finden. Hierbei lassen wir auch eine komplexe Inhomogenität zu und schreiben die Antriebskraft als $Fe^{\mathrm{i}\Omega t}$ (mit reellem Ω und F). Denn für einen reellen linearen Differentialoperator $\mathcal{L}$ und die DGL $\mathcal{L}z = f_z = f_R + \mathrm{i}\,f_I$ ist der Realteil einer Lösung von $\mathcal{L}z = f_z$ eine Lösung von $\mathcal{L}y = f_R$

$$f_R + \mathrm{i}\,f_I = \mathcal{L}(z_R + \mathrm{i}\,z_I) = \mathcal{L}z_R + \mathrm{i}\mathcal{L}z_I \quad \curvearrowright \mathcal{L}z_R = f_R\ . \tag{4.37}$$

Wir suchen also die Lösung von $\frac{d^2}{dt^2}\,x + b\,\frac{dx}{dt} + c\,x(t) = Fe^{\mathrm{i}\Omega t}$ und nutzen wieder einen komplexen Ansatz $z(t) = Ae^{\mathrm{i}\omega t}$. Wir erhalten die Gleichung

$$(-\omega^2 + \mathrm{i}\,b\,\omega + \omega_0^2)\,Ae^{\mathrm{i}\,\omega\,t} = F\,e^{\mathrm{i}\,\Omega\,t}\ , \tag{4.38}$$

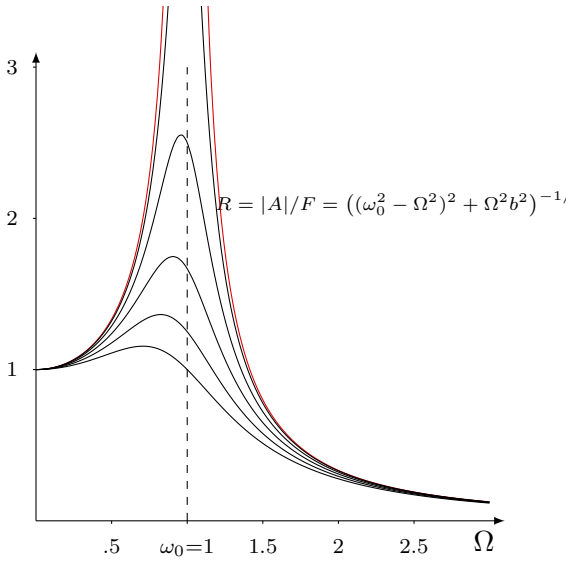
die für alle Zeiten t erfüllt sein muss. Dazu muss $\omega = \Omega$ gelten, d.h. der Oszillator folgt der Kreisfrequenz der externen Kraft. Für die (komplexe) Amplitude A erhalten wir

$$A = |A|e^{i\phi} = \frac{F}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \mathrm{i}\Omega b} \tag{4.39}$$

mit Betrag $|A| = F((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 b^2)^{-1/2}$ und Phase $\phi = \arctan(\frac{\Omega b}{\omega_0^2 - \Omega^2})$.
Der Realteil dieser komplexen Lösung

$$\Re(Ae^{\mathrm{i}\Omega t}) = \Re(|A|e^{\mathrm{i}\Omega t - \mathrm{i}\phi}) = |A|\cos(\Omega t - \phi) \tag{4.40}$$

ist die Lösung der inhomogenen Gleichung.
$R = |A|/F$ gibt das Verhältnis der Antriebsamplitude F und der Amplitude der inhomogenen Lösung an und hängt ab von der Kreisfrequenz der Antriebskraft Ω, der Kreisfrequenz des ungedämpften harmonischen Oszillators $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, und dem Dämpfungsparameter b. Bei kleinen Werten der Dämpfung kann R für $\Omega \approx \omega_0$ sehr groß werden. Dieses Phänomen wird als **Resonanz** bezeichnet. Die Abbildung zeigt R für $\omega_0 = 1$ und $b = 0$ (rot) und $b = 0.2, 0.4, \ldots$. Ist die Kreisfrequenz des Antriebs Ω gleich $\sqrt{\omega_0^2 - b^2/2}$ erreicht R sein Maximum (zur Suche des Maximums



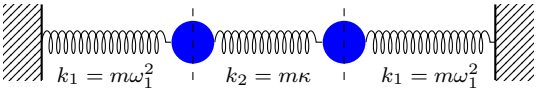
einfach die Ableitung der Amplitude A nach Ω gleich null setzen.) Ohne Dämpfung liegt dieses Maximum bei Unendlich. In einem realistischen System würde der Oszillator allerdings bei großen Auslenkungen Effekte der Nichtlinearität zeigen.)
Um die vollständige Lösung zu bestimmen, müssen wir zu dieser Lösung der inhomogenen Gleichung noch die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung addieren. Die beiden freien Koeffizienten der allgemeinen Lösung sind dann aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen. Für $b \neq 0$ fällt die Amplitude der allgemeinen Lösung allerdings exponentiell ab, für große Zeiten ist $x(t)$ also asymptotisch durch die Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben. Die Amplitude von von $x(t)$ ist dann konstant $|A|$, über eine ganze Periode ist die Energie die durch die externe Kraft dem Pendel zugeführt wird genau gleich der Energiedissipation durch Reibung.

4.4.5 Gekoppelte lineare DGL und Normalmoden

Wir betrachten als Beispiel ein ungedämpftes gekoppeltes Federpendel, bei dem zwei Punktmassen an linearen Federn noch durch eine weitere Feder gekoppelt sind. Die Auslenkungen der beiden Massen von der Ruheposition sind durch die beiden Variablen x_1 und x_2 beschrieben. Die Bewegungsgleichungen sind

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_1x_2 + k_2(x_1 - x_2)\ . \end{aligned} \tag{4.41}$$

Bei der Lösung einer solchen gekoppelten DGL mit mehreren abhängigen Variablen stehen wir vor der Schwierigkeit, dass wir die Lösung einer Variablen kennen müssten um die DGL in der anderen Variablen zu lösen.



In diesem Fall erhalten wir jedoch durch eine einfache Variablentransformation eine DGL ohne Kopplung zwischen den Variablen! Wir betrachen neue Variablen $y_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ und $y_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$. Durch Addition der Gleichungen (4.41) und durch Subtraktion der Gleichungen erhalten wir

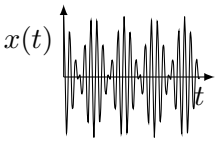
$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\omega_1^2 y_1 \tag{4.42}$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = -\omega_2^2 y_2 \tag{4.43}$$

mit $\omega_1^2 = k_1/m$ und $\omega_2^2 = k_1/m + \kappa$. Diese beiden Gleichungen sind entkoppelt und lassen sich unabhängig voneinander lösen. Wir erhalten $y_1 = Ae^{i\omega_1 t}$ und $y_2 = Be^{i\omega_2 t}$, wobei A und B aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen (siehe harmonischer Oszillator ohne

Reibung). Danach transformieren wir zurück zu den ursprünglichen Variablen $x_1 = (y_1 + y_2)/\sqrt{2}$ und $x_2 = (y_1 - y_2)/\sqrt{2}$. Wir spielen diese Vorgehensweise für drei unterschiedlichen Anfangsbedingungen durch:
1. $x_1(0) = x_2(0)$ und $\frac{dx_1}{dt}(0) = \frac{dx_2}{dt}(0)$; beide Massen haben zu Beginn die gleiche Auslenkung und Geschwindigkeit. Damit ist $y_2(0) = 0$ und $\frac{dy_2}{dt}(0)$ und somit $y_2(t)$ für alle Zeiten null. Wir erhalten $x_1(t) = x_2(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{\mathrm{i}\omega_1 t}$.
2. $x_1(0) = -x_2(0)$ und $\frac{dx_1}{dt}(0) = -\frac{dx_2}{dt}(0)$, beide Massen sind zu Beginn in unterschiedliche Richtungen gleich stark ausgelenkt und haben entgegengesetzte Geschwindigkeiten. Damit ist $y_1(0) = 0$ und $\frac{dy_1}{dt}(0)$, $y_1(t)$ für alle Zeiten null und $x_1(t) = -x_2(t) = \frac{B}{\sqrt{2}} e^{\mathrm{i}\omega_2 t}$.
3. $x_1(0) = a, x_2(0) = 0$ und $\frac{dx_1}{dt}(0) = \frac{dx_2}{dt}(0) = 0$. Wir erhalten $y_1(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{\mathrm{i}\omega_1 t}$ und $y_2(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{\mathrm{i}\omega_2 t}$ und damit

$$\begin{aligned} x_1(t) = (y_1(t) + y_2(t))/\sqrt{2} &= \frac{a}{2}(e^{\mathrm{i}\omega_1 t} + e^{\mathrm{i}\omega_2 t}) \\ &= \frac{a}{2} e^{\mathrm{i}\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t}(e^{\mathrm{i}\frac{\omega_-\omega_2}{2}t} + e^{-i\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t}) \\ &= a e^{\mathrm{i}\overline{\omega}t}\cos(\Delta\omega t) \end{aligned} \tag{4.44}$$



mit $\overline{\omega} \equiv \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ und $\Delta\omega \equiv \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$. Die Amplitude der Schwingung $e^{\mathrm{i}\overline{\omega}t}$ oszilliert durch den Term $\cos(\Delta\omega t)$ mit Kreisfrequenz $\Delta\omega$ [4]. Im ersten Beispiel bewegen sich beide Massen mit Kreisfrequenz ω_1 und mit gleicher Phase, im zweiten Beispiel mit Kreisfrequenz ω_2 und mit einer Phasenverschiebung von π (Gegenphase). Solche Bewegungsmuster, bei der alle Komponenten eines Systems mit gleicher Frequenz schwingen, mit konstanter Amplitude und konstanter relativer Phase, bezeichnet man als **Normalmoden** des Systems. Mit den Anfangsbedingungen 1. und 2. wurden also jeweils zwei unterschiedliche Normalmoden angeregt. Die Anfangsbedingung 3. regt eine Kombination der beiden Normalmoden an, entsprechend ist die Dynamik durch eine Überlagerung von zwei Frequenzen beschrieben.
Normalmoden finden sich in der Dynamik von Systemen mit 2 oder mehr linear gekoppelten Komponenten. Anwendungen liegen in der Moleküldynamik, komplexen technischen Systemen, und der Quantenmechanik. Später werden wir Techniken der linearen Algebra nutzen, um die Normalmoden von allgemeinen System zu finden.

4.5 Partielle DGL (PDG)

DGL mit Ableitungen nach unterschiedlichen Variablen (partielle Ableitungen) werden als **partielle DGL (PDG)** bezeichnet. Die Klassifizierung nach Ordnung der DGL, linear/nichtlinear ist analog zu gewöhnlichen DGL. PDG treten bei der räumlichen oder raumzeitlichen Beschreibung von Feldern auf. Beispiele sind die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \ , \tag{4.45}$$

[4] Das akustische Gegenstück zu dieser Bewegung wird als Schwebung bezeichnet, gut beobachten kann man es bei zwei Tönen sehr ähnlicher Frequenz, wie sie beim Stimmen von Instrumenten auftreten. Ein Beispiel ist hier https://www.youtube.com/watch?v=5hxQDAmdNWE.

die Laplacegleichung der Elektrostatik

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0\ , \tag{4.46}$$

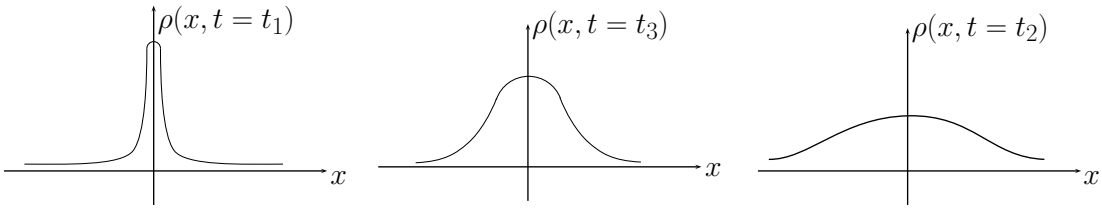
die das elektrische Potential $\phi(x,y,z)$ im leeren Raum (ohne Ladungen) beschreibt, die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi\ , \tag{4.47}$$

die zum Beispiel die Auslenkung einer Saite $\phi(x,t)$ beschreibt, oder Schrödingergleichung der Quantenmechanik

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\psi(x,t)+V(x)\,\psi(x,t) \tag{4.48}$$

für Wellenfunktion $\psi(x,t)$ eines Teilchens im Potential $V(x)$.



PDG sind generell viel schwerer zu lösen als gewöhnliche Differentialgleichungen, außerdem ist die Theorie zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sehr viel komplexer als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Info:

Die Diffusionsgleichung lässt sich wie folgt herleiten. Wir betrachten Teilchen in einer Dimension, der Strom $j(x)$ gibt an, wieviele Teilchen pro Zeiteinheit den Punkt x überqueren. Wir vergleichen nun den Strom über den Punkt x mit dem Strom über einen benachbarten Punkt $x+\Delta x$. Kommen von links mehr Teilchen in das Intervall $[x,x+\Delta x]$ hinein als rechts hinausgehen (der Strom fällt im Intervall), steigt die Zahl der Teilchen im Intervall. Für kleines Δx ist Teilchenzahl im Intervall $\Delta x\rho(x)$ und der Stromunterschied $\Delta x\frac{dj}{dx}$. Die **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\ , \tag{4.49}$$

besagt, dass Teilchen weder verschwinden, noch neu geschaffen werden: Was in das Intervall hineinfliesst, muss auch wieder hinaus, oder die Teilchendichte im Intervall erhöht sich. Für Teilchenströme, die durch Diffussion enstehen, gilt $j(x)=-D\frac{\partial\rho}{\partial x}$: diffusive Teilchenströme entstehen durch Gradienten in der Teilchendichte. Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung (4.49) ergibt die Diffusionsgleichung (4.45). (D wird als Diffusionskonstante bezeichnet.)
Die Wellengleichung werden Sie in einer Übung herleiten. Die Laplace-Gleichung folgt aus den Maxwellschen Gesetzen, die Schrödingergleichung ist die grundlegende Gleichung der Quantenmechanik.

4.5.1 Randbedingungen

Zusätzlich zu den Anfangsbedingungen schränken bei PDF oft Randbedingungen die Lösung ein. Als Beispiel betrachten wir die Wellengleichung in einer Dimension $\frac{\partial^2\phi}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$. Sie beschreibt zum Beispiel die (kleine) Auslenkung eines Gummibandes, das zwischen zwei Punkten aufgespannt ist. An diesen Punkten, z.B. $x = 0$ und $x = L$ ist dann $\phi(x = 0, t) = 0, \phi(x = L, t) = 0$ für alle Zeiten t. Analog in 2D: Eine über eine Öffnung gespannte Membran (Trommel) mit Auslenkung $\phi(x, y, t)$ gehorcht der Wellengleichung $\frac{\partial^2\phi}{dx^2} + \frac{\partial^2\phi}{dy^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$. Dann ist auf der Öffnung (auf der wir die Membran festgezurrt haben) $\phi = 0$ für alle Zeiten t.
Unsere Strategie zur Lösung von linearen homogenen PDG (wie die obigen Beispiele) ist analog zu gewöhnlichen DGL. Wir suchen zunächst unterschiedliche Lösungen (ggf. mit Einschränkungen durch Randbedingungen), und suchen dann die Linearkombination dieser Lösungen, die die Anfangsbedingungen erfüllt.

4.5.2 Separationsansatz

Der Separationsansatz erlaubt eine Vielzahl (aber bei weitem nicht alle) PDG auf gewöhnliche DGL zurückzuführen, die dann verhältnismäßig leicht gelöst werden können. Sämtliche oben aufgeführte PDG lassen sich durch diesen Ansatz lösen. Vor allem in der Quantenmechanik stellt sich der Separationsansatz als sehr mächtig heraus.
Als konkretes Beispiel betrachten wir die Wellengleichung in 1D

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{4.50}$$

mit Randbedingung $\phi(x = 0, t) = \phi(x = L, t) = 0\ \forall t$. Ein physikalisches System, das durch diese Gelichung und Randbedingung beschrieben ist, ist ein Seil, das zwischen zwei Punkten $x = 0$ und $x = L$ aufgespannt ist, mit kleiner Auslenkung $\phi(x, t)$ in einer Richtung rechtwinklig zur x-Achse.
Als Ansatz für die Lösung nutzen wir das Produkt einer (noch zu bestimmenden) Funktion von x und einer (ebenso noch zu bestimmenden) Funktion von t; $\phi(x, t) = f(x)\, g(t)$. Diesen Ansatz setzen wir in die Wellengleichung ein und teilen auf beiden Seiten durch $f(x)\, g(t)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f(x)\, g(t)\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(f(x)\, g(t)\right) \\
&g(t)\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{1}{c^2} f(x)\frac{d^2}{dt^2} g(t) && \text{(Linearität der PDG)} \\
&\underbrace{\frac{1}{f(x)}\frac{d^2}{dx^2} f(x)}_{\text{Funktion von } x} = \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{d^2}{dt^2} g(t)}_{\text{Funktion von } t} && \text{(durch } \phi(x,t) \text{ geteilt)}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung muss für alle x, t gelten. Die linke Seite ist eine Funktion von x, die rechte Seite eine Funktion von t. x und t sind unabhängige Variablen. Die einzige Möglichkeit ist,

dass beide Seiten konstante Funktionen sind

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \alpha \qquad \curvearrowright \qquad \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \alpha\, f(x)$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{g(t)}\frac{d^2}{dt^2}g(t) = \alpha \qquad \curvearrowright \qquad \frac{d^2}{dt^2}g(t) = c^2\alpha\, g(t)$$

Die Konstante α ist noch zu bestimmen. Aus der PDF in zwei Variablen hat der Separationsansatz zwei *gewöhnliche* DGL gemacht, die jetzt noch zu lösen sind:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 f}{dx^2} = \alpha\, f(x) && f(x) = A\,\sin kx && kL = \pi n \quad , \quad n \in \mathbb{N}\\
&\frac{d^2 g}{dt^2} = c^2\,\alpha\, g(t) && g(t) = B\, e^{\mathrm{i}kct} && \\
& && = B\, e^{\mathrm{i}\omega t} && \\
& && \text{mit } \omega = kc && \curvearrowright\ \alpha = -k^2\ .
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Jedes $k = \frac{\pi n}{L}$ mit $n \in \mathbb{N}$ löst die DGL mit der obigen Randbedingung und ergibt eine Lösung

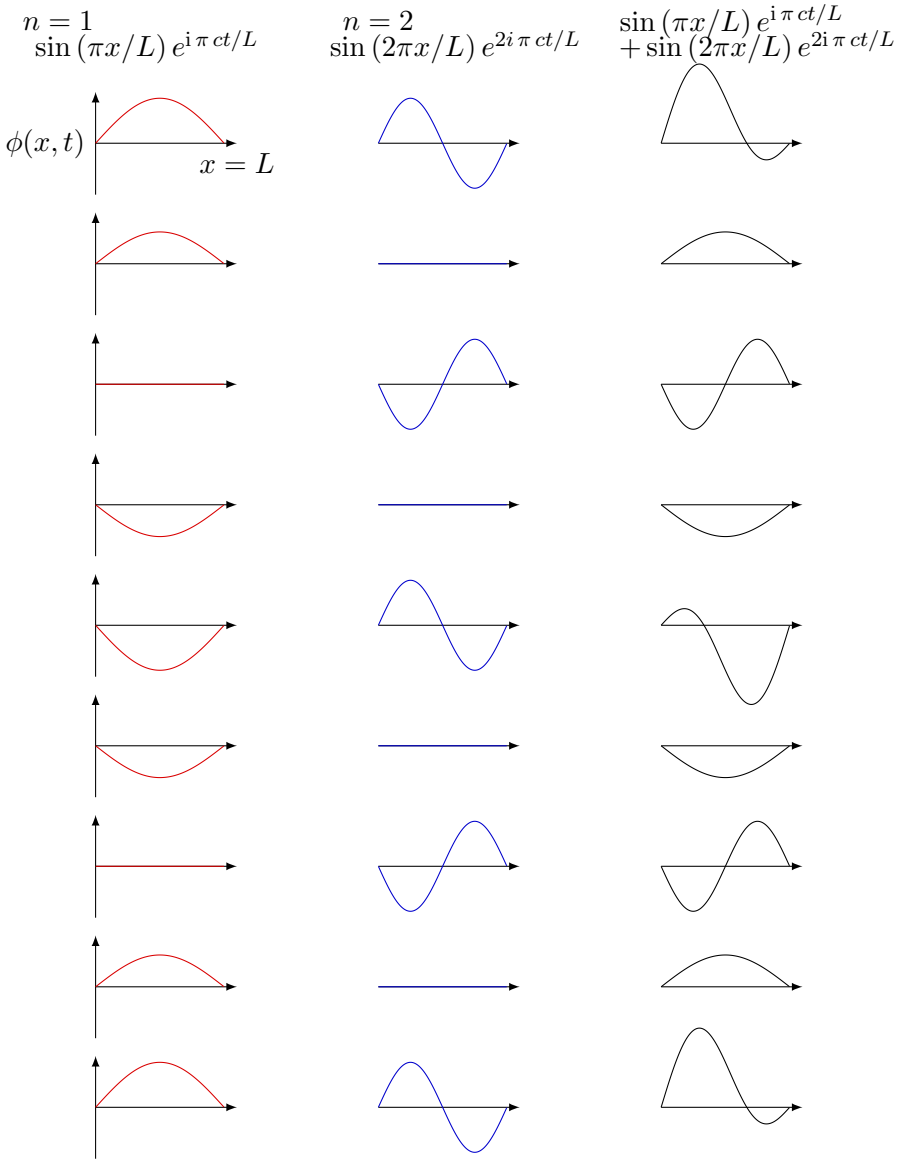
$$\phi(x,t) = C_n\,\sin\left(\frac{\pi x n}{L}\right) e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi n}{L}\,ct}\ . \tag{4.52}$$

Die Konstante α in (4.51) ist dann durch $\alpha = -k^2$ gegeben. Prinzipiell könnte α auch positiv sein, dann wäre $f(x)$ aber eine Exponentialfunktion $e^{\pm kx}$ und die Randbedingung $f(0) = 0, f(L) = 0$ ließe sich nicht realisieren.
$k = \pi n/L = 2\pi/\lambda$ wird als **Kreiswellenzahl** der Lösung bezeichnet. n gibt also an, wieviele halbe Perioden in das Intervall $[0, L]$ passen. Lösungen zu hohen Werten von n haben eine kürzere Wellenlänge λ. Die Kreisfrequenz $\omega = ck$ hängt ebenso von n ab, $e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi n}{L}\,ct} = e^{\mathrm{i}\omega t}$ mit $\omega = \pi c n/L$. Eine Lösung der Form (4.52) zeichnet sich dadurch aus, dass $\phi(x,t)$ für alle Punkte x mit der gleichen Frequenz oszillieren, bei konstanter Amplitude und relativer Phase zueinander. Eine solche Bewegung ist also wieder eine Normalmode des Systems.
Da die Wellengleichung (4.50) eine lineare homogene Gleichung ist, lösen auch Linearkombinationen von Lösungen mit unterschiedlichem n die Wellengleichung. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung ist also

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\sin\left(\frac{\pi x n}{L}\right) e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi n}{L}\,ct} \tag{4.53}$$

Diese allgemeine Lösung ist nicht mehr von der Form $f(x)\,g(t)$, unterliegt also nicht der Einschränkung des Separationsansatzes. Die einzelnen Terme in (4.53) sind die Normalmoden der Wellengleichung. Die Koeffizienten $C_n \equiv |C_n|e^{-\mathrm{i}\phi}$ geben die Amplitude und Phase der Normalmoden an.
Als Beispiel zeigt die Abbildung unten eine Periode der ersten Mode (Zeit läuft von oben nach unten), $n = 1$, mit $C_1 = 1$ und $C_n = 0$ sonst. Die Kreiswellenzahl k ist gleich π/L, so dass genau eine halbe Sinusfunktion in das Intervall $[0, L]$ passt. Die Kreisfrequenz $\omega = ck$ ist $\pi c/L$: bis zur letzten Zeile hat die erste Mode genau eine Periode durchlaufen, dort ist also $\pi ct/L = 2\pi$ oder $t = 2L/c$. Die zweite Mode mit doppelt so hoher Kreiswellenzahl und

Kreisfrequenz (Mitte) hat $C_2 = 1$ und $C_n = 0$ sonst, sie durchläuft in der gleichen Zeit zwei Perioden. Eine sogenannte **Überlagerung** oder **Superposition** dieser beiden ersten Moden mit $C_1 = C_2 = 1$ und $C_n = 0$ sonst ist rechts gezeigt. Die Anfangsbedingung ist nicht mehr durch eine sinusförmige Kurve gegeben, sondern die Überlagerung von zwei Sinusfunktionen mit unterschiedlicher Periode. Damit lassen sich auch andere Anfangsbedingungen als eine Sinusfunktion realisieren.
Diese Anfangsbedingungen legen die Koeffizienten C_n der Normalmoden fest. In unserem Beispiel der Wellengleichung ist dies die Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$, $\phi(x, t = 0) \equiv \phi_0(x)$, und die Geschwindigkeit jedes Punktes des Gummibandes zum Zeitpunkt $t = 0$, $\frac{\partial \phi}{\partial} t(x, t =$



$0) = v_0(x)$. Die Koeffizienten C_n müssen also so gewählt werden, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi x n}{L}\right) = \phi_0(x) \ . \tag{4.54}$$

Eine zweite Gleichung erhalten wir, wenn wir die Ableitung von (4.53) nach der Zeit gleich der Geschwindigkeit $v_0(x)$ setzen. Aber läßt sich überhaupt jede Funktion $\phi_0(x)$, die die Randbedingung $\phi_0(0) = \phi_0(L) = 0$ erfüllt, als eine Summe von (prinzipiell unendliche vielen) Sinustermen schreiben? Dieser Frage wird uns später auf das Thema der Fourieranalyse führen.

Zusammenfassung:

- Viele Naturgesetze lassen sich als Differentialgleichungen (DGL) formulieren. DGL sind Gleichungen für eine Funktion einer oder mehrerer Veränderlicher und enthalten Ableitungen dieser Funktion. Wie bei Integralen gibt es keine allgemeine Lösungsmethoden für DGL.
- Unter milden Forderungen an die DGL und gegeben Anfangsbedingungen sind die Lösungen von DGL eindeutig.
- Lineare DGL zeigen enge Verbindungen zur linearen Algebra: Die Lösungen linearer homogener DGL bilden einen Vektorraum, d.h. sie lassen sich addieren und mit Zahlen multiplizieren und man erhält wieder eine Lösung. (Homogene DGL enthalten nur Terme, die von der abhängigen Variable abhängen.)
- Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten lassen sich durch den Exponentialansatz lösen.
- Partielle DGL enthalten Ableitungen nach mehreren Variablen und sind im Allgemeinen schwer zu lösen. Der Separationsansatz kann lineare partielle DGL lösen.

Fünf

Vektoranalysis

Wir führen Vektorfelder ein, die jedem Punkt im Raum einen Vektor zuordnen. Anwendungen sind Kraftfelder, wie z.B. das elektrische oder magnetische Feld. Wir diskutieren die Integration von solchen Feldern über Linien, Oberflächen und Volumina. Zur Beschreibung dieser Felder verallgemeinern wir das Konzept der Ableitung einer Funktion und führen eine Reihe von Differentialoperatoren ein.

Bisher haben wir uns mit den Elementen von Vektorräumen beschäftigt, um Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen eines Massepunktes zu beschreiben. Mehrere Massepunkte könnten dann durch mehrere Vektoren beschrieben werden. Viele physikalische Situationen benötigen eine Erweiterung, die über den Vektorraum hinausgeht: ein Vektorfeld ordnet *jedem Punkt* im Raum einen Vektor zu.

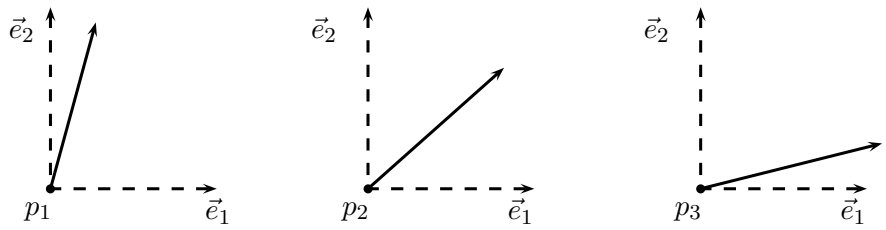
Beispiel

- Zur Beschreibung eines strömenden Gases müssen wir berücksichtigen, dass Richtung und Geschwindigkeit der Gasteilchen vom Ort abhängen. Jedem Punkt im Raum ist also ein Vektor zugeordnet, der angibt in welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit sich Teilchen des Gases an diesem Punkt bewegen. Die Geschwindigkeitsvektoren an benachbarten Punkten sind nicht unabhängig (wenn z.B. Gasteilchen erhalten bleiben).
- Das elektrische Feld $\vec{E} = \vec{F}/q$ hat an unterschiedlichen Punkten im Raum unterschiedliche Richtungen und Stärken. Die Vektoren $\vec{E}$ an unterschiedlichen Punkten sind nicht unabhängig, sie gehorchen den Maxwellgleichungen. Der Begriff des Vektorfeldes is zentral für den Elektromagnetismus. Analoges gilt für das magnetische Feld und für das Gravitationsfeld.

Sei M ein (affiner) Raum (s. 1.3), dann ist ein **Vektorfeld** $\vec{v}(p)$ auf M eine Abbildung

$$\vec{v} : M \longrightarrow V, p \longmapsto \vec{v}(p) \ , \tag{5.1}$$

die jedem Punkt in M ein Element $\vec{v}$ eines Vektorraumes V zuordnet. Die Wahl eines Vektors für jeden Raumpunkt definiert ein konkretes Vektorfeld. Häufig haben der Raum M und der Raum V die gleiche Dimension. Ein Vektorfeld lässt sich in einer Basis darstellen, indem man für jeden Punkt im Raum eine Basis wählt.



Hier ist exemplarisch für alle Punkte p des Raumes M an drei Punkten p_1, p_2, p_3 eine kartesische Basis definiert. Zusätzlich haben diese Basisvektoren jeweils dieselbe Orientierung relativ zu einem kartesischen Koordinatensystem. Man spricht daher auch von einer **raumfesten Basis**.
Mit einer Basis an jedem Punkt p kann nun der Vektor $\vec{v}$ an jedem Punkt dargestellt werden durch

$$\mathbf{v}(p) = \begin{pmatrix} v_1(p) \\ v_2(p) \end{pmatrix} \qquad \text{für } \vec{v}(p) = v_1(p)\vec{e}_1(p) + v_2(p)\vec{e}_2(p) \tag{5.2}$$

und analog in höherdimensionalen Räumen.
Wählen wir für den affinen Raum M einen Ursprung p_0 und schreiben $p = p_0 + \vec{r}$, dann ist ein (zweidimensionales) Vektorfeld in zwei Dimensionen charakterisiert durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{r}) \\ v_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} \ , \tag{5.3}$$

in drei Dimensionen entsprechend

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix} \ .$$

In zwei Dimensionen ist ein (zweidimensionales) Vektorfeld also durch zwei Funktionen von zwei Variablen charakterisiert, in drei Dimensionen ist ein dreidimensionales Vektorfeld durch drei Funktionen von drei Variablen definiert.
Analog zum Vektorfeld definieren wir ein **skalares Feld**, das jedem Punkt im Raum eine skalare Größe zuordnet, d.h. eine Abbildung

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}, p \longmapsto f(p) \ . \tag{5.4}$$

Ein skalares Feld ist durch eine Funktion der Koordinaten charakterisiert, z.B. in 3D

$$f(\mathbf{r}) = f(x,y,z) \ . \tag{5.5}$$

Ein Beispiel für ein skalares Feld ist die Dichte eines Gases, dessen Konzentration an unterschiedlichen Stellen unterschiedlich hoch sein mag, oder die Temperatur, die im Raum variiert.

5.1 Integration von skalaren und vektoriellen Feldern

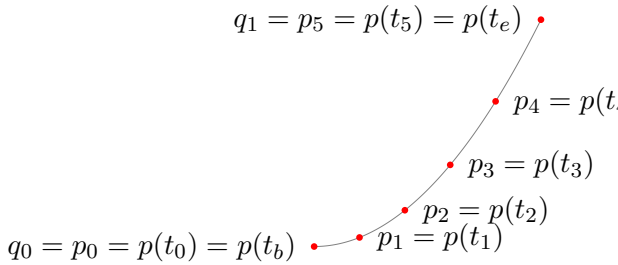
Das Integral $\int_{x_a}^{x_b} \mathrm{d}x f(x)$ gibt z.B. das Gewicht eines geraden Stabes, wenn dessen lineare Dichte $f(x)$ ist. x beschreibt die Position entlang des Stabes, $f(x)\Delta x$ ist dann das Gewicht eines kleinen Teilstücks der Länge Δx des Stabes bei x, und das Integral ergibt sich aus dem Limes bei dem die Länge aller Teilstücke gegen null geht. Wie könnte man nun sein Gewicht berechnen, wenn der Stab gebogen wäre? Die Zerlegung des Stabes in eine große Zahl kleiner Teilstücke führt auf das sogenannte Linienintegral. Eine wichtige Anwendung dieses Integrals liegt in der Berechnung der Arbeit, die ein Kraftfeld entlang einer gegebenen Bahnkurve verrichtet. Die Verallgemeinerung auf Integrale von Feldern über Oberflächen und Volumina führt auf Flächen- und Volumenintegrale. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Elektrodynamik, wo z.B. elektrische Felder über Oberflächen oder Ladungsdichten über Volumina integriert werden. Diese Integrale werden wir in Abschnitt 5.3 und 5.4 definieren.

5.2 Linienintegrale

Bleiben wir zunächst beim Beispiel des eindimensionalen gebogenen Drahtes mit räumlich veränderlicher Dichte. Der Draht bilde eine Kurve C im Raum. Die Dichte f pro Länge eines kurzen Teilstücks hängt nun vom Ort p ab, an dem sich das Teilstück befindet. Wir zerlegen die Kurve C in kleine Intervalle zwischen den Raumpunkten $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_N$ auf der Kurve C. $\Delta\vec{r}_i \equiv p_i - p_{i-1}$ gibt die Verschiebung von p_{i-1} nach p_i an. Die Masse des i-ten Teilstücks ist dann die Länge des Teilstücks mal die Dichte, $|\Delta\vec{r}_i| f(p_i)$. Die Gesamtmasse als Riemannsumme (vgl. die Riemannsumme (2.21)) ist damit

$$\sum_{i=1}^{N} |(p_i - p_{i-1})| f(p_i) = \sum_{i=1}^{N} |\Delta\vec{r}_i| f(p_i) \ . \tag{5.6}$$

Zur Auswertung dieser Riemann-Summe im Grenzfall bei dem die einzelnen Schritte klein werden, $|\Delta\vec{r}_i| \to 0$, definieren wir zunächst eine Parametrisierung der Kurve C. Eine Parametrisierung einer Raumkurve C ist eine Funktion $p(t)$, die jedem $t \in [t_b, t_e]$ einen Punkt auf C zuordnet (b für Beginn, e für Ende). Etwas formaler ist eine **Parametrisierung** $p(t)$ einer Kurve C (als Punktmenge) eine differenzierbare Abbildung mit $p([t_b, t_e]) = C$, $p(t_b) = q_0$ (Anfangspunkt), $p(t_e) = q_1$ (Endpunkt) und $|\frac{dp}{dt}| \neq 0 \quad \forall \quad t \in [t_b, t_e]$.



Bei gegebenem Ursprung p_u, mit $p = p_u + \vec{r}$ nutzen wir auch $\vec{r}(t)$ als Parametrisierung der Kurve und schreiben den Integranden dann als $f(\vec{r}(t))$

Eine Parametrisierung einer Raumkurve können sie durch Ameise visualisieren, die im Zeitintervall $[t_b, t_e]$ die Raumkurve C (gebogener Draht) entlang krabbelt. Im kleinem Zeitintervall $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ legt sie die Strecke $\approx \Delta t_i \frac{d\vec{r}(t_i)}{dt}$ zurück, dieses Teilstück trägt dann $\approx \Delta t_i |\frac{d\vec{r}(t_i)}{dt}| f(p(t_i))$ zur Gesamtmasse des Drahtes bei. Dabei haben wir kleine Teilstücke durch Geraden approximiert (lineare Approximation), $p(t_{i+1}) - p(t_i) = \vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i) = \Delta t_i \frac{d\vec{r}(t_i)}{dt} + o(\Delta t_i)$.

Im Grenzfall $\Delta t_i \to 0\,\forall i$ geht die Zahl dieser Teilstücke gegen unendlich und ihre Länge jeweils gegen Null. Wir definieren das **Linienintegral** als

$$\int_C \mathrm{d}r f(\vec{r}) \equiv \lim_{|\Delta\vec{r}_i|\to 0} \sum_{i=1}^{N} |\Delta\vec{r}_i| f(p_i) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i |\frac{d\vec{r}(t_i)}{dt}| f(p(t_i)) = \int_{t_b}^{t_e} \mathrm{d}t |\frac{d\vec{r}(t)}{dt}| f(p(t)) \tag{5.7}$$

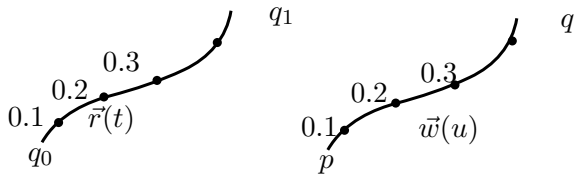
Bei der Notation $\int_C \mathrm{d}r f(\vec{r})$ kann man sich $\mathrm{d}r$ als die Länge eines sehr kurzen Teilstücks denken.

Beispiel

Wir setzen $f(p) = 1$ um die Bogenlänge L des Halbkreises mit Radius 1 zu berechnen, $L = \int_C \mathrm{d}r$ (s. Beispiel in 1.2)

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cos(2\pi t)\vec{e}_1 + \sin(2\pi t)\vec{e}_2 \\
\mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \\
\int_c \mathrm{d}r 1 &= \int_0^{1/2} \mathrm{d}t |\frac{d\vec{r}}{dt}| 1 \\
\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= 2\pi \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \end{pmatrix} \quad , \quad |\frac{d\mathbf{r}}{dt}| = \sqrt{(2\pi\sin(2\pi t))^2 + (2\pi\cos(2\pi t))^2} = 2\pi \\
&= \int_0^{1/2} \mathrm{d}t |\frac{d\mathbf{r}}{dt}| = 2\pi \int_0^{1/2} \mathrm{d}t = \pi
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Die Parametrisierung der Raumkurve C erlaubt also die Auswertung eines Linienintegrals als (Riemann-) Integral über eine Variable, den Parameter der Raumkurve. Eine wichtige Frage ist allerdings, ob die Definition des Linienintegrals (5.7) von der Wahl der Parametrisierung $\vec{r}(t)$ abhängt. Wir betrachten dazu eine zweite Parametrisierung einer Kurve C, $\vec{w}(u)$.



Dann existiert eine differenzierbare Funktion $t(u)$, die jedem u ein t zuordnet, so dass $\vec{w}(u) = \vec{r}(t(u))$. Jeder Schritt $\Delta t > 0$ führt $\vec{r}(t)$ weiter auf der Kurve C von q_0 nach q_1, und ebenso jeder Schritt Δu. Daher ist $dt/du > 0$ entlang der Raumkurve und mit der Kettenregel $\frac{d\vec{w}}{du} = \frac{d}{du}\vec{r}(t(u)) = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{du}$ erhalten wir

$$\int_{u_b}^{u_e} du |\frac{d\vec{w}}{du}| f(\vec{w}(u)) = \int_{u_b}^{u_e} du |\frac{d\vec{r}}{dt}| \frac{dt}{du} f(\vec{r}(t(u))) = \int_{t_b}^{t_e} \mathrm{d}t |\frac{d\vec{r}}{dt}| f(\vec{r}(t)) \tag{5.9}$$

Ein Wechsel der Parametrisierung läßt sich also als Variablensubstitution der Parametrisierungsvariablen interpretieren.

Das Linienintegral eines Vektorfeldes

Gesucht sei zum Beispiel die Arbeit, die ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ an einer Punktmasse verrichtet, die sich entlang einer Raumkurve C bewegt. Bei der Parametrisierung der Raumkurve können Sie wieder an eine Ameise denken, die im Zeitintervall Δt_i die Strecke $\Delta\vec{r}_i \approx \Delta t_i \frac{d\vec{r}(t_i)}{dt}$ zurücklegt. Dabei verrichtet das Kraftfeld die Arbeit $\approx \Delta\vec{r}_i \cdot \vec{F}(\vec{r}(t_i)) \approx \Delta t_i \frac{d\vec{r}(t_i)}{dt} \cdot \vec{F}(\vec{r}(t_i))$.

Wir definieren das Linienintegral eines Vektorfeldes

$$\int_C \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \int_{t_b}^{t_e} \mathrm{d}t \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \tag{5.10}$$
$$\overset{\text{kart. Basis}}{=} \int_{t_b}^{t_e} \mathrm{d}t \frac{dx}{dt} F_x(\mathbf{r}(t)) + \int_{t_b}^{t_e} \mathrm{d}t \frac{dy}{dt} F_y(\mathbf{r}(t)) + \int_{t_b}^{t_e} \mathrm{d}t \frac{dz}{dt} F_z(\mathbf{r}(t))$$

Bei der Notation $\int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ können sie sich $d\mathbf{r}$ als kleinen Vektor entlang eines Teilstücks der Kurve C denken.

Beispiel

Wir betrachten ein Kraftfeld in 2 Dimensionen, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} xy \\ -y^2 \end{pmatrix}$. Ein Massepunkt bewegt sich entlang einer Parabel $C : y = x^2$ vom Punkt $(0,0)$ zu $(1,1)$. Wir berechnen die am Massepunkt verrichtete Arbeit W mit der Parametrisierung $x(t) = t, y(t) = t^2$ und damit $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} W &= \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^4 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}t (t^3 - 2t^5) = [\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{6}t^6]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} \,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Aus dem Spezialfall eines Feldes mit nur einer Komponente $F_x(\vec{r}) = f(\vec{r})$ lässt sich das Linienintegral über eine ausgezeichnete Koordinate definieren

$$\int_c \mathrm{d}x f(\vec{r}) \equiv \int_{t_b}^{t_e} \mathrm{d}t \frac{dx}{dt} f(\vec{r}(t)) \,. \tag{5.12}$$

Hierbei werden bei der Zerlegung der Raumkurve C die Änderungen der x-Komponente entlang der Teilstücke aufsummiert.

Beispiel

$$\int_c \mathrm{d}x = \int_{t_b}^{t_e} \mathrm{d}t \frac{dx(t)}{dt} = \int_{x_b}^{x_e} \mathrm{d}x = [x]_{x_b}^{x_e} = x_e - x_b \tag{5.13}$$

Im zweiten Schritt wurde das Integral durch die Substitution $x = x(t)$ ausgewertet.

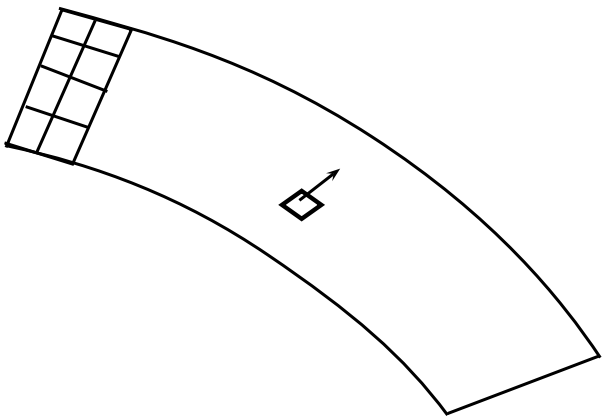
Und schließlich lässt sich analog zum Linienintegral mit dem Skalarprodukt auch ein Integral mit Kreuzprodukt definieren.

$$\int_c \mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \int_{t_b}^{t_e} \mathrm{d}t \frac{d\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \tag{5.14}$$

Dieses Integral tritt zum Beispiel bei der Berechnung des magnetischen Feldes eines stromdurchflossenen Drahtes auf.

5.3 Das Oberflächenintegral

Das Oberflächenintegral erlaubt Vektor- und Skalarfelder auf Oberflächen zu integrieren. Wir benötigen dazu das Konzept der Mehrfachintegrale aus Abschnitt 2.7. Ein Beispiel ist die Berechnung der Gesamtladung auf einer gekrümmten Oberfläche mit gegebener Dichte pro kleiner Fläche. Weitere wichtige Anwendungen in der Elektrostatik sind Oberflächenintegrale des elektrischen Feldes im Zusammenhang mit dem Gaußschen Integralsatz, den wir in Sektion 5.8 diskutieren werden.



Wir zerlegen wieder eine Oberfläche in kleine Teilflächen, über die wir dann summieren werden. Bei einer einzelnen kleinen Teilfläche nutzen wir, dass ihr Beitrag zum Integral lediglich von ihrem Flächeninhalt und von ihrer Orientierung im Raum abhängt: ist die Teilfläche hinreichend klein, dann ist der Integrand (z.B. eine Dichte oder ein Vektorfeld) konstant über die Teilfläche. Die genaue Form der Teilfläche (dreieckig, rund, elliptisch, ...) ist dann irrelevant. Zur Charakterisierung des Flächeninhalts und der Orientierung einer Teilfläche ΔS definieren wir einen Vektor $\Delta\vec{S}$, der senkrecht zur Teilfläche ΔS steht, und dessen Länge $|\Delta\vec{S}|$ gleich ihrem Flächeninhalt ist. Dieser Vektor wird als **vektorielles Oberflächenelement** oder **Oberflächenelement** bezeichnet. Die Orientierung von $\Delta\vec{S}$ wird von Fall zu Fall unterschiedlich gewählt[1] . Bei geschlossenen Oberflächen wählt man die Richtung von $\Delta\vec{S}$ meist so, dass die Oberflächenelemente nach außen zeigen.

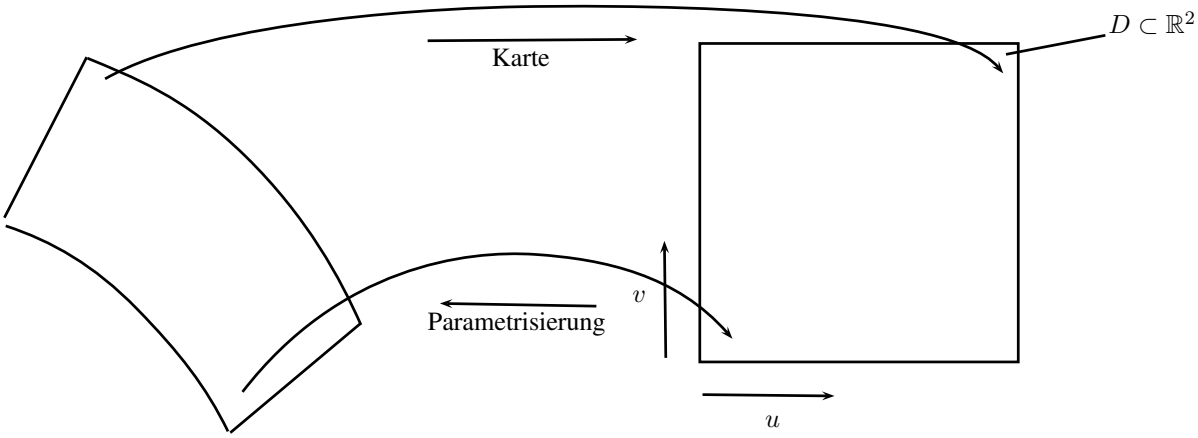
[1] Es gibt auch Oberflächen, für die keine solche Orientierung möglich ist, wir also nicht eine Seite als 'außen' und die andere als 'innen' bezeichnen können, genausowenig wie man eine Seite blau und die andere rot malen könnte. Der berühmte Möbiusstreifen ist ein Beispiel. Für solche Oberflächen können wir kein Oberflächenintegral definieren.

Die Summe über N solcher kleinen Flächenelemente führt uns im Grenzfall $N \to \infty$ auf die Flächenintegrale

$$\int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{\text{Teilflächen } i} \Delta\vec{S}_i \cdot \vec{F}(\vec{r}_i) \qquad \text{eines Vektorfeldes } \vec{F}(\vec{r}) \tag{5.15}$$

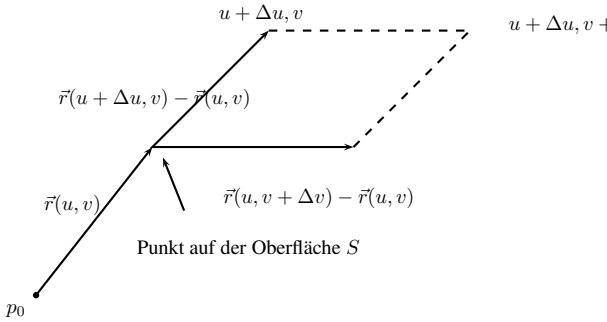
$$\int_S \mathrm{d}S f(\vec{r}) \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{\text{Teilflächen } i} |\Delta\vec{S}_i| f(\vec{r}_i) \qquad \text{eines skalaren Feldes } f(\vec{r}) \tag{5.16}$$

Bei einer Flüssigkeit konstanter Dichte mit Fließgeschwindigkeit $\vec{F}(\vec{r})$ gibt das Flächenintegral über $\vec{F}(\vec{r})$ den Gesamtfluss pro Zeit über S an. Bei einer Dichte pro kleiner Fläche eines dünnen Bleches, gibt das Flächenintegral über $f(\vec{r})$ die Masse eines Bleches mit Oberfläche S an.
Zur konkreten Definition und Berechnung solcher Integrale benötigen wir wieder eine Parametrisierung. Zweidimensionale Oberflächen benötigen zwei Variablen (u, v) um einen Punkt $p = p_0 + \vec{r}$ auf der Oberfläche eindeutig festzulegen. Eine **Parametrisierung** einer Oberfläche S (als Punktmenge) ist eine bijektive Abbildung von $D \subset \mathbb{R}^2$ auf S, $(u, v) \in D \mapsto \vec{r}(u, v) : p_0 + \vec{r}(u, v) \in S$, die stetig differenzierbar ist und deren Inverses ebenso stetig differenzierbar ist.



Wir zerlegen nun D in kleine rechteckige Teilstücke mit Kantenlängen $\Delta u_i, \Delta v_i$, wie bei der Definition des Mehrfachintegrals in 2.7. Diese Zerlegung von D definiert auch eine Zerlegung der Oberfläche S in kleine Teilstücke. Jedes dieser Teilstücke entspricht einem kleinen Flächenelement von S. Näherungsweise (kleine $\Delta u_i, \Delta v_i$) handelt es sich dabei um ein Parallelogramm mit Kanten $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\Delta u$ und $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\Delta v$.
Zur Berechnung des Vektors des entsprechenden Flächenelementes $\Delta\vec{S}$ nutzen wir das Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{S} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \Delta u \quad \Delta v \end{aligned} \tag{5.17}$$



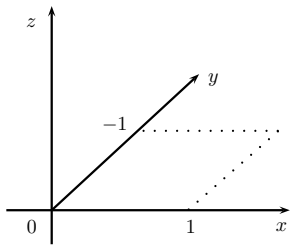
Gegeben eine Parametrisierung $\mathbf{r}(u,v)$ erhalten wir damit für die Oberflächenintegrale (5.15)

$$\int_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \int_D \mathrm{d}u\mathrm{d}v \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))$$
$$\int_S \mathrm{d}S f(\mathbf{r}) \equiv \int_D \mathrm{d}u\mathrm{d}v \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| f(\mathbf{r}(u,v)) \tag{5.18}$$

Beispiel

Wir betrachten das Integral der Funktion $f(\mathbf{r})=1$ über eine ebene quadratische Oberfläche in der z-Ebene. $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|0\le x\le 1, 0\le y\le 1, z=0\}$. Die einfachste Parametrisierung dieser Oberfläche ist $x(u,v)=u, y(u,v)=v, z(u,v)=0$, also $\mathbf{r}(u,v)=\begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix}$.

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\int_S dS=\int_D \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^1 \mathrm{d}v=1$$



Beispiel

Ein etwas weniger einfaches Beispiel ist die Oberfläche einer Kugel mit Radius R. Zur Parametrisierung nutzen wir die **sphärischen Koordinaten** oder **Kugelkoodinaten** in 3D. Die beiden Winkelparameter θ, ϕ (statt u, v) sind so definiert, dass der Ortsvektor $\mathbf{r}$ mit der z-Achse den **Polarwinkel** θ einschließt, und seine Projektion auf die xy-Ebene mit der x-Achse den **Azimutwinkel** ϕ einschließt.

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x(\theta,\phi) \\ y(\theta,\phi) \\ z(\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\phi \\ R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

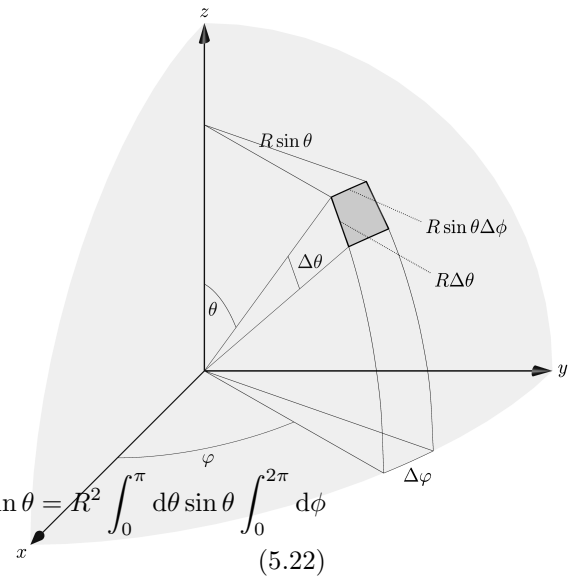
Die Werte des Polarwinkels θ liegen zwischen 0 (Nordpol) und π (Südpol), die des Azimutwinkels ϕ zwischen 0 und 2π. Die Ableitung des Ortsvektors nach diesen Parametern ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta} = R\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\phi} = R\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

und damit das Kreuzprodukt

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\phi} = \begin{pmatrix} R^2\sin^2\theta\cos\phi \\ R^2\sin^2\theta\sin\phi \\ R^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi) \end{pmatrix} = R^2\sin\theta\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{5.21}$$

Das Resultat läßt sich auch in der Form $R\sin\theta\mathbf{r}(\theta,\phi)$ schreiben (s. Definition der Kugelkoordinaten oben). Das vektorielle Oberflächenelement $\mathbf{\Delta S} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\phi}\right)\Delta\theta\Delta\phi$ zeigt also radial nach außen, wie auf einer Kugel zu erwarten. Auch sein Flächeninhalt $R^2\sin\theta\Delta\theta\Delta\phi$ läßt sich geometrisch verstehen. Ein Kreis mit konstantem Polarwinkel θ hat Radius $R\sin\theta$. Das kleine Rechteck, dass durch kleine Änderungen $\Delta\theta$ und $\Delta\phi$ definiert ist hat also Seitenlängen $R\sin\theta\Delta\phi$ und $R\Delta\theta$ und damit den Flächeninhalt $R^2\sin\theta\Delta\theta\Delta\phi$. Mit diesem Ergebnis können wir das Flächenintegral leicht berechnen und erhalten



$$\begin{aligned} \int_S \mathrm{d}S &= \int_D \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\phi}\right| = \int_D \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi R^2\sin\theta = R^2\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \\ &= R^2[-\cos\theta]_0^\pi[\phi]_0^{2\pi} = 4\pi R^2 . \end{aligned} \tag{5.22}$$

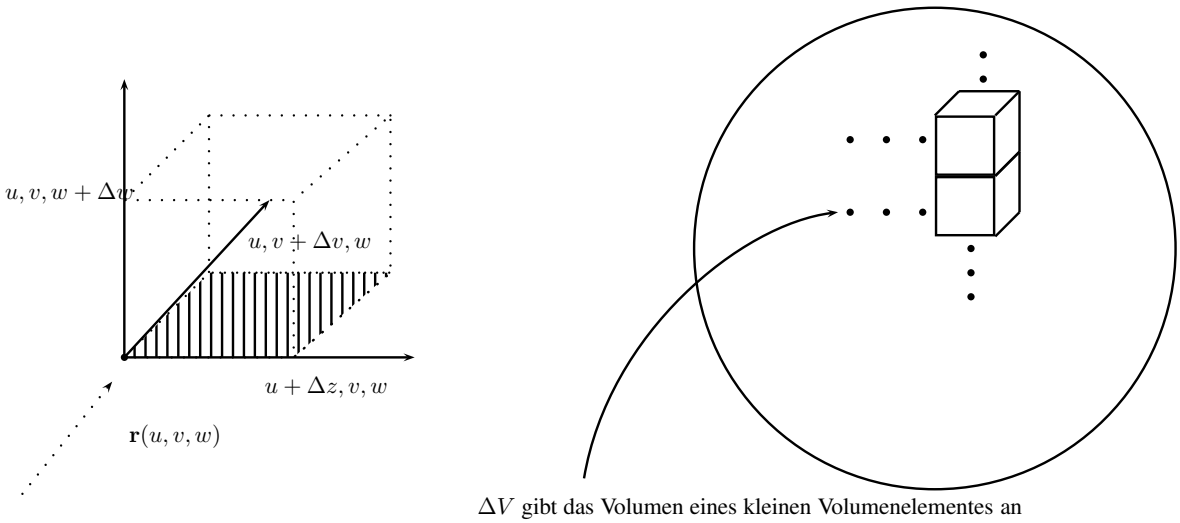
5.4 Das Volumenintegral

Das Volumenintegral ermöglicht ein Skalarfeld $\phi(\mathbf{r})$ oder ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ über ein Volumen zu integrieren. Ein Beispiel ist das Integral einer Ladungsdichte über ein Volumen. Zur Definition des Volumenintegrals gehen wir vor wie bei der Definition des Linien- und

Oberflächenintegrals und unterteilen das Volumen in eine große Zahl kleiner Volumenelemente mit Volumen ΔV. Innerhalb eines Volumenelements ist der Integrand $\phi(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ näherungsweise konstant, so dass wir von jedem Volumenelement ΔV mit dem Integrand multiplizieren, und diese Beiträge aller Volumenelemente aufsummieren. Im Grenzfall bei dem ΔV aller Volumenelemente gegen null gehen erhalten wir das Volumenintegral.
Die Parametrisierung eines Volumens erfordert drei Variablen (u, v, w), ein Raumpunkt ist also durch eine Funktion $\vec{r}(u, v, w)$ festgelegt mit $(u, v, w) \in D \subset \mathbb{R}^3$. Die Kurven $\vec{r}(u, v, w)$ bei denen jeweils alle Parameter bis auf einen festgehalten werden kann man sich (näherungsweise) als Netz aus lauter kleinen Parallelepipeden visualisieren. Diese Parallelepipede nutzen wir als Volumenelemente.
Das Volumen eines kleinen Parallelepipeds, das durch die Vektoren $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\Delta u$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\Delta v$ und $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\Delta w$ aufgespannt wird ist

$$\Delta V = |\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right)| \Delta u \; \Delta v \; \Delta w \; . \tag{5.23}$$

Das Spatprodukt hat eine Orientierung (ist positiv für einen rechtshändigen Spat, negativ für einen linkshändigen, s. 1.6); daher ist das Volumen des von 3 Vektoren aufgespannten Parallelepipeds der Betrag des Spatproduktes.



ΔV gibt das Volumen eines kleinen Volumenelementes an

Führen wir nun die Zahl der Volumenelemente gegen unendlich und die $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ für jedes einzelne Element gegen null, erhalten wir als Definition des **Volumenintegrals**

$$\int_V \mathrm{d}V \phi(\mathbf{r}) \equiv \int_D \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v \; \mathrm{d}w \; |\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right)| \; \phi(\mathbf{r}(u, v, w)) \tag{5.24}$$

$$\int_V \mathrm{d}V \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \int_D \mathrm{d}u \; \mathrm{d}v \; \mathrm{d}w \; |\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right)| \; \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v, w)) \tag{5.25}$$

Für kartesische Koordinaten ist das Spatprodukt eins, $\int_V \mathrm{d}V \phi(\mathbf{r}) = \int_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\phi(x, y, z)$. Eine Änderung der Parametrisierung, z.B. von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten, kann auch wieder als Variablensubstitution der Parametrisierungsvariablen verstanden werden.

Beispiel

Als Beispiel berechnen wir noch das Volumen einer Kugel mit Radius R. Zur Parametrisierung bieten sich wieder Kugelkoordinaten an

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x(r,\theta,\phi) \\ y(r,\theta,\phi) \\ z(r,\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

mit einer **Radialkoordinate** $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, die den Abstand eines Punktes vom Ursprung im Kugelmittelpunkt angibt. Durch Ableitung nach der Radialkoordinate erhalten wir $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, und zusammen mit dem Ergebnis aus dem Beispiel zum Flächenintegral

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r^2 \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

erhalten wir das Spatprodukt

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right) = r^2 \sin\theta \ . \tag{5.28}$$

Das Volumenelement in Kugelkoordinaten ist also $r^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\phi$. Auch dieses Ergebnis lässt sich aus geometrischen Überlegungen herleiten; die Kanten des kleinen Quaders, der durch Koordinatenänderungen $\Delta r, \Delta\theta$ und $\Delta\phi$ generiert wird sind $\Delta r, r\Delta\theta$ und $r\sin\theta\Delta\phi$. Das Volumen der Kugel ist dann

$$\begin{aligned} \int_V dV &= \int_D \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right) \right| \\ &= \int_D \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi r^2 \sin\theta = \int_0^R \mathrm{d}r r^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = \frac{4}{3}\pi R^3 \ . \end{aligned} \tag{5.29}$$

5.5 Differentialoperatoren I: Der Gradient

Wie verändert sich die Komponenten $\mathbf{v}$ eines Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ unter einer (kleinen) Änderung von $\mathbf{r}$? Wie ändert sich der Wert eines skalaren Feldes $f(\mathbf{r})$ unter einer solchen kleinen Änderung? Vektorfelder in drei Dimensionen werden durch drei Funktionen die von drei Veränderlichen abhängen beschrieben, und analog wird ein skalares Feld von einer Funktion von drei Veränderlichen beschrieben. Entsprechen ist das Konzept der Ableitung von Feldern mathematisch reicher als das der Ableitung einer einzelnen Funktion einer Variablen.
Wir werden drei sogenannte Differentialoperatoren auf Feldern diskutieren, die jeweils unterschiedliche Aspekte von Feldern charakterisieren; den Gradienten eines skalaren Feldes (ergibt ein Vektorfeld), die Rotation eines Vektorfeldes (ergibt ein Vektorfeld, siehe 5.6), und die Divergenz eines Vektorfeldes (ergibt ein skalares Feld, siehe 5.7).
Für eine Funktion einer Veränderlichen hatten wir in Abschnitt 2.4.1 die Ableitung als lineare Näherung einer Funktion $f(x)$ an einem Punkt verstanden, $f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}\Delta x + o(\Delta x)$.

Der Gradient verallgemeinert die Ableitung und gibt an, wie sich ein skalares Feld $f(\mathbf{r})$ unter einer (kleinen) Änderung $\Delta\mathbf{r}$ ändert.

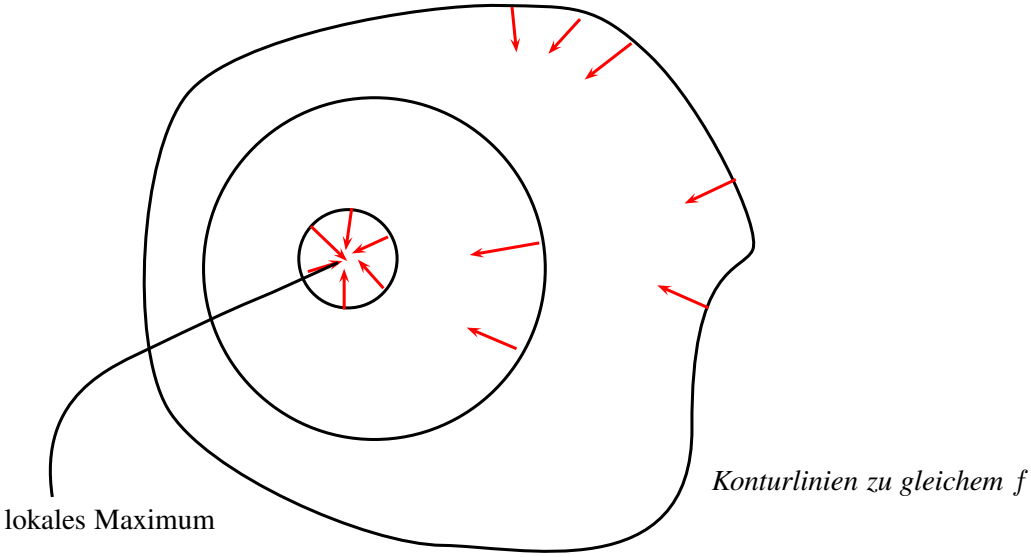
Sei $f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto f(\mathbf{r})$, und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kartesische Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ des Punktes $p_0 + \mathbf{r}$, dann heißt der Spaltenvektor

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ \partial f/\partial x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

der **Gradient** der Funktion $f(x_1, x_2, x_3, \ldots) \equiv f(\mathbf{x})$ am Punkt $p = p_0 + \mathbf{r}$.
Betrachten wir die Funktion am Punkt p und an einem zweiten Punkt $p + \Delta\mathbf{r}$. Das Skalarprodukt von ∇f mit einem Verschiebungsvektor $\Delta\mathbf{r}$ gibt die Änderung von $f(\mathbf{r})$ zu $f(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ in linearer Näherung an

$$\Delta f \equiv f(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \overset{(2.18)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + o(|\Delta\mathbf{r}|) = \nabla f \cdot \Delta\mathbf{r} + o(|\Delta\mathbf{r}|) \ . \tag{5.31}$$

Der Gradient einer Funktion mehrerer Veränderlicher $f(x_1, x_2, \ldots)$, bzw. $f(\mathbf{r})$ kann also als Verallgemeinerung der Ableitung einer Funktion einer Variablen betrachtet werden. Zur Visualisierung des Gradienten stellen wir eine Funktion $f(p)$ durch Konturlinien dar, die wie Höhenlinien einer Landkarte Punkte mit gleichem Wert der Funktion f verbinden.



Dann steht der Vektor ∇f senkrecht auf den Konturlinien, denn für ein $\Delta\mathbf{r}$ entlang einer Kontour ist $\nabla f \cdot \Delta\mathbf{r} = 0$. Betrachten wir alle $\Delta\mathbf{r}$ mit konstanter (kleiner) Norm. Da das

Skalarprodukt zweier Vektoren konstanter Länge dann maximal ist, wenn beide Vektoren in dieselbe Richtung zeigen, zeigt ∇f in die Richtung maximaler Veränderung von f (in linearer Näherung, also für kleine $|\Delta\mathbf{r}|$). Der Gradient zeigt damit in die Richtung der größten Veränderung von f.

Beispiel

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Hier bilden die Punkte mit gleichem Wert der Funktion f kugelförmige Schalen, entsprechend zeigt ∇f radial nach außen. In zwei Dimensionen ist auch noch eine alternative Visualisierung möglich: Betrachtet man $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ als Höhenprofil über der xy-Ebene erhält man einen Trichter mit Mittelpunkt beim Ursprung.

5.5.1 Gradientenfelder

Ein Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ heißt **Gradientenfeld**, wenn eine Funktion $f(\mathbf{r})$ existiert, so dass

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}) \tag{5.32}$$

Dieses Konzept ist in der Physik im Rahmen der Potentialtheorie wichtig: sei $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ein Kraftfeld, dann wäre $-f(\mathbf{r})$ das dazugehörige Potential.
Ein allgemeines Vektorfeld aus d-dimensionalen Vektoren wird durch d Funktionen beschrieben, ein Gradientenfeld ist also ein sehr spezielles Vektorfeld, denn es ist durch die *eine* Funktion $f(\mathbf{r})$ vollständig beschrieben. Jedes Gradientenfeld weist eine Beziehung zwischen den partiellen Ableitungen seiner Komponenten auf: Sei $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla f$ ein Gradientenfeld. Aus der Schwarzschen Regel für partielle Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ gilt für die Komponenten $v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ und $v_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ auch $\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.
Ein Gradientenfeld im $\mathbb{R}^3$ hat damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} &= 0\ . \end{aligned} \tag{5.33}$$

In einfach zusammenhängenden Räumen (kurz: jede geschlossene Kurve lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen) stellt sich heraus, dass diese Bedingung auch hinreichend für ein Gradientenfeld ist. Zwei skalare Funktionen $f(\mathbf{r})$ und $f(\mathbf{r}) + C$ generieren dasselbe Gradientenfeld.

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ein Gradientenfeld, d.h. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$. Dann gilt für sein Linienintegral entlang einer Linie C

$$\int_C \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{t_b}^{t_e} \mathrm{d}t \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \qquad \frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t))) = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$
$$= \int_{t_b}^{t_e} \mathrm{d}t \frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t))) = [f(\mathbf{r}(t))]_{t_b}^{t_e}$$

Damit ist das Linienintegral eines Gradientenfeldes wegunabhängig, es hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab. Das Gravitationsfeld ist ein Gradientenfeld, ebenso das von statischen Ladungen erzeugte elektrische Feld. Die von einem Gradientenfeld verrichtete Arbeit um eine Punktmasse von Punkt q_0 zu q_q zu bringen ist also unabhängig vom konkret gewählten Weg. Die skalare Funktion f wird in diesem Zusammenhang als Potential bezeichnet.

Beispiel

Ein Beispiel für ein Gradientenfeld ist das Kraftfeld der Schwerkraft. Im Zusammenhang von Kraftfeldern spricht man auch von einem konservativen Feld. Erstes Beispiel ist ein homogenes Kraftfeld in Richtung der z-Achse, $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$. Dieses Vektorfeld ist ein Gradientenfeld, da $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$ mit $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z) = mgz$. V wird in diesem Zusammenhang als Gravitationspotential bezeichnet. Die Arbeit, die das Kraftfeld an einer Punktmasse verrichtet, die entlang einer Kurve C mit Anfangspunkt p und Endpunkt q bewegt wird ist $W = \int_C \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -mg(z_q - z_p)$. Der Wert des Graviationspotentials an einem Punkt wird auch als potentielle Energie bezeichnet. Ist die an der Punktmasse verrichtete Arbeit positiv (z.B. wenn die Masse im Gravitationspotential fällt), wird potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Ist die Arbeit negativ, wird kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt – die Masse wird abgebremst.
Ein zweites Beispiel ist das Kraftfeld einer zweiten Punktmasse mit Masse M am Ursprung, $\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$. Die Vektoren dieses Feldes zeigen radial nach innen, ihre Norm wird mir zunehmendem Abstand vom Ursprung immer kleiner. Das entsprechende Potential ist $V(\mathbf{r}) = mMG/|\mathbf{r}|$.

5.6 Differentialoperatoren II: Die Rotation (engl. "curl")

In 3 Dimensionen und kartesischen Koordinaten lässt sich für ein Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ein Feld von Spaltenvektoren definieren, die sogenannte **Rotation** von $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, mit Komponenten

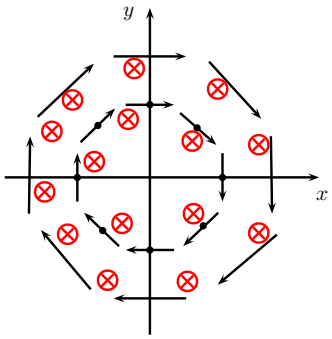
$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

$\nabla\times$ soll an das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ erinnern. Die Komponenten der Rotation sind uns bereits begegnet, aus (5.33) hat ein Gradientenfeld damit die Rotation Null, $\nabla \times \nabla f = 0\ \forall f(\mathbf{r})$, oder kurz $\nabla \times \nabla = 0$. Ein Vektorfeld, dessen Rotation nicht verschwindet, kann also kein Gradientenfeld sein, Linienintegrale über ein solches Vektorfeld sind also vom Weg abhängig.

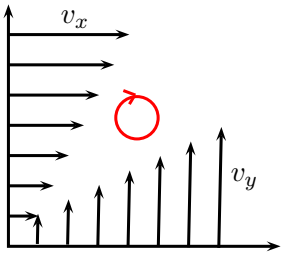
Beispiel

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

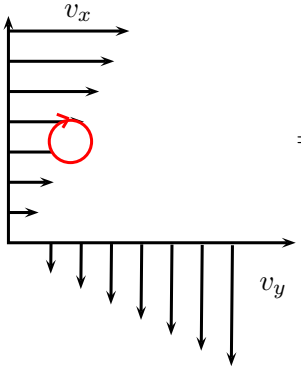
$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}(-x) \\ \frac{\partial}{\partial z} y - \frac{\partial}{\partial x} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Die Rotation gibt an ob und wo "Wirbel" im Vektorfeld auftreten. Wirbel wie in dem obigen Beispiel führen dazu, dass Linienintegrale über ein Vektorfeld wegabhängig sind. In dem Beispiel oben ist das Linienintegral entlang C von einem Punkt zurück zu sich selbst abhängig davon, wie oft und in welcher Richtung C den Ursprung umläuft. Die Rotation eines Vektorfeldes lässt sich visualisieren;$\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sei das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit. $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})$ beschreibt, wie ein kleiner Ball mit festem Mittelpunkt $\mathbf{r}$ rotiert. $|\nabla \times \mathbf{v}|$ ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit, die Richtung von $\nabla \times \mathbf{v}$ gibt die Drehachse an.



$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$



$\frac{\partial v_y}{\partial x}$ und $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ haben unterschiedliche Vorzeichen:

$$\Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0$$

Die Rotation spielt eine wichtige Rolle in der Magnetostatik, eines der Maxwell-Gesetze verbindet die Rotation des Magnetfeldes mit der Flussdichte des elektrischen Stroms.

5.7 Differentialoperatoren III: Die Divergenz

ist eine Abbildung von einem Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ auf ein skalares Feld, definiert in kartesischen Koordinaten als

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{5.35}$$

(und analog in n Dimensionen). Die Notation $\nabla\cdot$ soll an das Skalarprodukt erinnern:

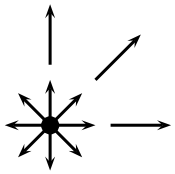
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

Wie die Rotation spielt auch die Divergenz eine wichtige Rolle im Elektromagnetismus. Eine der Maxwellgleichungen verbindet die Divergenz des elektrischen Feldes mit der elektrischen Ladungsdichte.

Beispiel

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$



Damit ist die Divergenz des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ konstant.

Auch die Divergenz hat eine intuitive Interpretation: $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ beschreibe die Bewegung einer Flüssigkeit oder eines Gases: die Zahl der Teilchen, die eine kleine Fläche pro Zeit und Flächeninhalt durchströmt sei $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{S}$ (wobei das vektorielle Flächenelement $\Delta\mathbf{S}$ senkrecht zur Oberfläche steht). $\nabla \cdot \mathbf{v}$ gibt an, wieviele Teilchen netto aus einem kleinen Volumen hinausfließen (pro Volumen). Dieses Bild werden wir beim Gaußschen Integralsatz weiter ausbauen.

5.8 Integraltheoreme

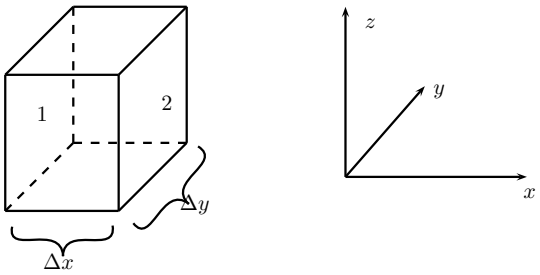
Für Oberflächen- und Volumenintegrale existieren Integraltheoreme, die wichtige Anwendungen in der Feldtheorie haben; bei der Beschreibung von Gravitationsfeldern, und in der Elektro- und Magnetostatik. Wir beginnen mit dem sogenannten Gaußschen Integralsatz, der die Divergenz eines Vektorfeldes über ein Volumen integriert.

5.8.1 Der Gaußsche Integralsatz

Wir betrachten ein Vektorfeld in 3 Dimensionen in kartesischer Basis und kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{5.37}$$

$\mathbf{v}(\mathbf{r})$ könnte zum Beispiel ein Strömungsfeld sein, wobei $\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{S}$ angibt, wie viele Teilchen pro Zeit durch ein kleines Flächenelement $\Delta\mathbf{S}$ strömen. Wir betrachten nun einen (kleinen) Quader mit Kantenlänge $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.



Der Netto-Fluss in x-Richtung aus dem Quader heraus ist

$$(v_x|_2 - v_x|_1)\Delta y\, \Delta z \quad \simeq \quad \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

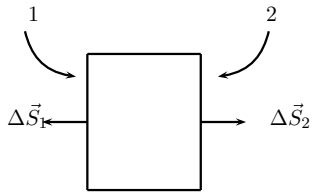
In y- und z-Richtung ist der Netto-Fluss:

$\frac{\partial v_y}{\partial y}\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$	durch die hintere und vordere Wand
$\frac{\partial v_z}{\partial z}\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$	durch obere und untere Wand

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z = \nabla \cdot \mathbf{v}\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \tag{5.38}$$

ist der gesamte Netto-Fluss aus dem Quader heraus. Dieser Netto-Fluss lässt sich auch als Oberflächenintegral schreiben.

Frontalansicht:

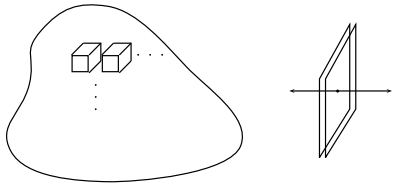


1. $-\Delta\vec{S}_1 \cdot \vec{v}|_1$ (Fluss hinein)
2. $\Delta\vec{S}_2 \cdot \vec{v}|_2$ Fluss hinaus

Der Netto Fluss in x-Richtung aus dem Quader hinaus ist also $\Delta\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{v}|_1 + \Delta\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{v}|_2$. Summiert man die Beiträge von den 6 Seiten des kleinen Quaders erhält man den Netto Fluss aus dem Quader hinaus $\int \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$ und damit

$$\nabla \cdot \mathbf{v}\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \qquad \text{für kleine Quader} \tag{5.39}$$

Für ein Volumen V, das sich in viele (kleine) Quader zerlegen lässt, summieren wir dieses Ergebnis über die vielen Teilquader. Im Inneren des Volumens heben sich die Oberflächenintegrale auf der rechten Seite gegenseitig weg und so erhalten wir den **Gaußschen Integralsatz**



$$\boxed{\int_V \mathrm{d}V \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}}\,, \tag{5.40}$$

wobei $S = \partial V$ die Oberfläche beschreibt, die das Volumen V begrenzt.

Dieser Satz lässt hat eine einfache geometrische Interpretation. Das Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ beschreibe die Flussdichte einer (inkompressiblen) Flüssigkeit: Die Flussdichte gibt an, wieviel Teilchen der Flüssigkeit pro Zeitinterval durch eine (kleine) Oberfläche $\Delta\mathbf{S}$ fließen, nämlich $\Delta\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}$. Diese Flüssigkeit habe sogenannte "Quellen"; Punkte aus denen die Flüssigkeit herausströmt. Liegt eine solche Quelle innerhalb des Volumens V, dann führt diese Quelle zu einem Netto-Fluss aus dem Volumen heraus. Liegen mehrere Quellen innerhalb des Volumens, addieren sich ihre Beiträge zum Netto-Fluss. Liegt eine Quelle aber außerhalb von V, führt der Teilchenfluss nach V hinein und wieder hinaus, trägt also nicht zum Nettofluss bei. An jedem Punkt im Raum gibt $\nabla \cdot \mathbf{v}$ an, wie "quellenartig" das Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ am Punkt $\mathbf{r}$ ist, also wieviel der Flüssigkeit aus pro kleinem Volumen aus diesem Volumen herausquillt. Verschwindet die Flüssigkeit, spricht man statt von einer Quelle von einer "Senke".

Der Gaußsche Integralsatz (5.40) hat noch eine interessante Beziehung zum Fundamentalsatz der Analysis. Seine linke Seite hängt vom Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ innerhalb des Volumens V ab, die rechte Seite nur von $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ auf seinem Rand! Der Fundamentalsatz der Analysis

$$\int_a^b \mathrm{d}x \left(\frac{d}{dx} F(x)\right) = F(b) - F(a) \tag{5.41}$$

hat eine analoge Eigenschaft; er verbindet die Werte von $F(x)$ an den Rändern des Intervalls $[a, b]$ mit dem Integral von $\frac{dF}{dx}$ über das Intervall $[a, b]$ (s. 2.6.1). Der Gaußsche Integralsatz kann also als eine Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes auf höhere Dimensionen interpretiert werden. Es existieren noch weitere Verallgemeinerungen, die wir in den Abschnitten 5.8.3 und 5.8.4 herleiten werden.

5.8.2 Anwendung des Gaußschen Integralsatz: Graviationfelder

Der Gaußsche Integralsatz findet wichtige Anwendungen in der klassischen Feldtheorie, zum Beispiel in der Elektrostatik und in der Graviationstheorie. Positive elektrische Ladungen

sind dabei Quellen und negative Ladungen sind Senken des elektrischen Feldes. (Betrachten Sie das Feld einer posititiven oder negativen Punktladung.) Das Gravitationsfeld $\mathbf{g}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r})/m$ hingegen hat keine Quellen, sondern nur Senken, die durch Massen entstehen: $\nabla \cdot \mathbf{g}$ ist proportional zur Massendichte $\rho(\mathbf{r})$, konkret $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho(\mathbf{r})$ wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante ist.

Info:

Zur Herleitung beginnen wir mit einem Massepunkt M im Ursprung und einem beliebigen Volumen V. Das entsprechende Oberflächenintegral

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -GM \int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}/r^2 \tag{5.42}$$

erscheint viel schwieriger zu berechnen als im Fall einer Kugeloberfläche, da das Feld $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ nicht mehr auf der Oberfläche ∂V konstant ist. Außerdem zeigen die vektoriellen Flächenelemente $\mathbf{\Delta S}$ nicht mehr radial nach außen. Doch auch dieses Integral lässt sich leicht berechnen. Wir nutzten Kugelkoordinaten: die Oberfläche ∂V ist dann durch eine Funktion $r(\theta, \phi)$ beschrieben, die angibt, wie weit Punkte auf der Oberfläche in einer bestimmten Richtung vom Ursprung entfernt sind. Bei gegebenen Koordinaten θ, ϕ beschreiben dann $\Delta\theta$ und $\Delta\phi$ ein Flächenelement, dessen Projektion in radialer Richtung $\mathbf{\Delta S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ gleich dem Flächeninhalt $r^2 \sin(\theta)\Delta\theta\Delta\phi$ ist. Integration über θ und ϕ gibt für das Oberflächenintegral (5.42) $-GM \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \frac{r^2 \sin(\theta)}{r^2} = -4\pi GM$. Fügen wir dem Volumen weitere Punktmassen hinzu, trägt jede Punktmasse $-4\pi GM$ zu dem Oberflächenintegral (5.42)bei: da das Volumen beliebig gewählt war, muss die Masse auch nicht im Ursprung liegen und wir erhalten

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi G \sum_i M_i \tag{5.43}$$

Für eine kontinuierlich Massedichte $\rho(\mathbf{r})$ ist der Beitrag eines kleinen Volumens ΔV_i zur Gesamtmasse $M_i = \Delta V_i \rho(\mathbf{r})$. Im Grenzfall kleiner Volumen erhalten wir also $\int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi G \int_V \mathrm{d}V \rho(\mathbf{r})$. Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt $\int_V \mathrm{d}V \nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \int_V \mathrm{d}V \rho(\mathbf{r})$, da dieses Ergebnis für beliebige Volumina gilt müssen die Integranden gleich sein,

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) \ . \tag{5.44}$$

(Aufgabe: Volumina, bei denen die Oberfläche ∂V nicht durch eine einzelne Funktion $r(\theta, \phi)$ beschrieben ist, weil eine radiale Linie vom Ursprung die Oberfläche an mehreren Punkten durchstößt, erscheinen zunächst noch schwieriger. Überzeugen Sie sich, dass dies nicht so ist.)

Dieses Ergebnis erlaubt einen neuen Blickwinkel auf das Gravitationsfeld $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, das von einer Massedichte $\rho(\mathbf{r})$ erzeugt wird. Statt die Beiträge unterschiedlicher Punktmassen zum Gravitationsfeld zu addieren, suchen wir ein Feld $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, so daß (5.44) gilt: eine partielle DGL für das Gravitationsfeld[2].

Diese Methode stellt sich als sehr mächtig heraus, wenn die den Feldern zugrundeliegende Masseverteilung eine Symmetrie aufweist. Als Beispiel betrachten wir eine kugelsymmetrische Masseverteilung $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$. Wir erwarten also ein kugelsymmetrisches Feld mit $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = g(r)\hat{\mathbf{r}}$.

[2] Diese DGL benötigt noch eine Randbedingung, z.B. können wir verlangen, dass das Feld weit entfernt von der Masseverteilung gegen null geht.

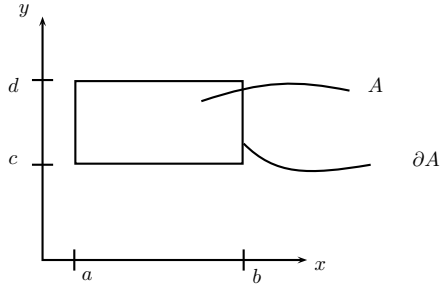
Um den Gaußschen Integralsatz nutzen zu können ein betrachten wir kugelförmiges Volumen V mit Radius r um den Ursprung und berechnen das Volumenintegral über die Massendichte

$$M_V = \int_V \mathrm{d}V\rho(r) = -\frac{1}{4\pi G}\int_V \mathrm{d}V\nabla\cdot\mathbf{g} = -\frac{1}{4\pi G}\int_{\partial V}\mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi G}4\pi g(r)r^2 \quad (5.45)$$

Im zweiten Schritt haben wir (5.44) genutzt, im dritten den Gaußschen Integralsatz, im vierten die Kugelsymmetrie des Gravitationsfeldes. Durch Auflösen nach $g(r)$ erhalten wir $g(r) = -GM_V/r^2$, wobei M_V die von V eingeschlossene Masse ist. Das Graviationsfeld $g(r)$ einer kugelsymmetrischen Masseverteilung ist also gleich dem Feld einer Punktmasse, die so groß ist wie die innerhalb einer Kugel mit Radius r eingeschlossene Masse. Die Masse außerhalb r trägt dahingegen nicht zum Graviationsfeld bei. Wenn wir das Graviationsfeld einer Kugel berechnen, können wir also die Kugel als Punktmasse behandeln ohne einen Fehler zu machen, selbst wenn der Abstand von der Kugeloberfläche nicht groß ist (im Vergleich zum Radius der Kugel).
Damit lässt sich auch das Graviatationsfeld *im Inneren* einer massiven Kugel mit Radius R und konstanter Dichte berechnen. Wir betrachten nun ein Volumen V mit Radius $r < R$ und erhalten $M_V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und mit (5.45) $g(r) = -\frac{4}{3}\pi G r$: das Feld steigt also innerhalb der Kugel linear an. Auch das Graviationsfeld einer Hohlkugel lässt sich auf diese Weise schnell bestimmen: eine Volumen V im Inneren der Hohlkugel schließt keine Masse ein, das Feld ist also null.
Diese Methode findet auch in der Elektrostatik breite Anwendung; die erste Maxwellgleichung $\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho_E(r)/\epsilon_0$ besagt, dass elektrische Ladungen Quellen für das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sind. Diese Gleichung ist von derselben Form wie Gaußsche Gravitationsgesetz.
Bei Ladungsverteilungen oder Masseverteilungen, die einer bestimmten Symmetrie unterliegen, lassen sich oft Volumina/Oberflächen finden, so dass sich das Feld durch den Gaußschen Integralsatz leicht berechnen lässt. Man bezeichnet diese Oberflächen als **Gaußsche Volumina/Oberflächen**.
Beschreibt man das Gravitationsfeld durch ein Potential, $\mathbf{g} = -\nabla\phi$, so erhält man aus Gleichung (5.44) für das Graviationsfeld die sogenannte **Poissongleichung** $\nabla^2\phi\Delta\phi \equiv \nabla\cdot\nabla\phi = 4\pi G\rho$ für das Potential. (Dazu muss das Graviationsfeld natürlich ein Gradientenfeld sein, mehr dazu in den nächsten Abschnitten.) Dabei haben wir aus den beiden Differentialoperatoren ∇ und $\nabla\cdot$ einen neuen Differentialoperator definiert. Der sogenannte **Laplace-Operator** $\nabla^2\phi \equiv \Delta \equiv \nabla\cdot\nabla$ bildet ein skalares Feld auf ein skalares Feld ab, in dem er zunächst den Gradienten eines skalaren Feldes generiert und dann die Divergenz dieses Gradientenfeldes bildet. In kartesischen Koordinaten und drei Dimensionen ist $\Delta\phi = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\phi(x,y,z)$. Der Laplace-Operator tritt in der klassischen Feldtheorie auf, aber auch als Diffusionsoperator in der Wärmeleitung. Er spielt außerdem eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik.

5.8.3 Das Greensche Theorem in der Ebene

Wir beschränken uns zunächst auf 2 Dimensionen, um einen einfachen Integralsatz herzuleiten, der Oberflächenintegrale mit Linienintegralen um den Rand der Ober-



fläche verbindet. Wir betrachten zwei Funktionen von x und y, $P(x,y)$ und $Q(x,y)$, mit kontinuierlichen partiellen Ableitungen. Diese Funktionen sind frei gewählt und ändern ihren Wert als Funktion von x, y. Auf einer besonders einfachen Fläche, einem Rechteck A, werden wir nun ein konkretes Oberflächenintegral über A mit einem konkreten Linienintegral über den Rand dieses Rechtecks ∂A vergleichen.
Oberflächenintegral:

$$\iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_a^b dx \int_c^d dy \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_c^d dy\,[Q(b,y) - Q(a,y)] \tag{5.46}$$

Wegintegral[3]:

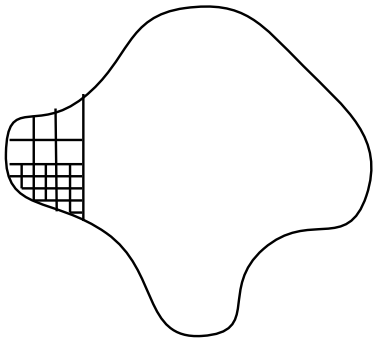
$$\int_{\partial A} \mathrm{d}y\; Q(x,y) = \int_c^d \mathrm{d}y Q(b,y) + \int_d^c dy Q(a,y) = \int_c^d \mathrm{d}y[Q(b,y) - Q(a,y)]$$

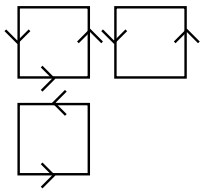
$$\curvearrowright \iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \frac{\partial Q}{\partial x} = \int_{\partial A} dy Q(x,y) \qquad \text{für das gewählte Rechteck} \tag{5.47}$$

$$\text{Analog}: \; -\iint_A dx\,\mathrm{d}y \frac{\partial P}{\partial y} = \int_{\partial A} \mathrm{d}x P(x,y) \tag{5.48}$$

$$\curvearrowright \iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \int_{\partial A} (\mathrm{d}x P(x,y) + \mathrm{d}y Q(x,y)) \tag{5.49}$$

Dieses Ergebnis gilt natürlich zunächst nur für rechteckige Flächen. Betrachten wir aber eine ebene Fläche A beliebiger Form (ohne Löcher), die in eine Menge (beliebig kleiner) Rechtecke zerlegt werden kann. Summieren wir (5.47) über all diese Rechtecke, so heben sich Beiträge der Linienintegrale *aus dem Inneren* von A gegenseitig weg. Die Summe von (1) über alle Rechtecke, in die A zerlegt wurde ergibt dann auf der linken Seite ein Oberflächenintegral, auf der rechten Seite erhalten wir ein Linienintegral über den Rand von A. Unter milden Bedingungen (die Kurve, die den Rande von A beschreibt, darf sich nicht schneiden) erhalten wir





$$\boxed{\int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \int_{\partial A} (\mathrm{d}x\; P(x,y) + \mathrm{d}y\; Q(x,y))} \tag{5.50}$$

Dieses Ergebnis heißt Greensches Theorem in der Ebene.

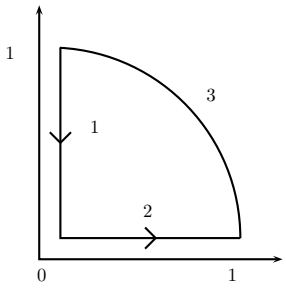
[3] Das Integral über eine geschlossene Kurve ∂A wird manchmal auch als $\oint_{\partial A}$ geschrieben.

Beispiel

Betrachten wir als konkretes Beispiel die Funktionen $Q(x,y) = x$ und $P(x,y) = 0$.

$$\int_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\int_{\partial A} (\mathrm{d}x\,P(x,y) + \mathrm{d}y\,Q(x,y)) = \int_{\partial A} \mathrm{d}y\,x$$

Dieses Ergebnis kann genutzt werden, um die Berechnung des Flächeninhaltes von A zu ersetzen durch durch die Berechnung eines Linienintegrals. Auf diesem Prinzip basieren historische mechanische Apparate zur Bestimmung von Flächeninhalten[a] . Als Beispiel berechnen wir das entsprechende Linienintegral um den Viertelskreis mit Radius eins.

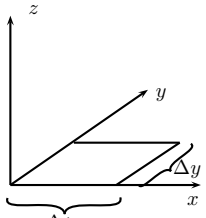


- Teilstück 1: $x = 0 \curvearrowright$ kein Beitrag zum Integral
- Teilstück 2: $\frac{dy}{dt} = 0 \curvearrowright$ kein Beitrag zum Integral
- Teilstück 3: $y(\theta) = \sin\theta$, $x(\theta) = \cos\theta$
  $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \frac{dy(\theta)}{d\theta} x(\theta) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \cos^2\theta = \pi/4$

[a] http://de.wikipedia.org/wiki/Planimeter

5.8.4 Satz von Stokes

Betrachten wir wieder ein rechteckiges Flächenelement und legen die z-Achse senkrecht zu seiner Oberfläche. Wir betrachten ein Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und nutzen das Greensche Theorem mit $Q(x,y) = v_y(x,y,z=0)$ und $P(x,y) = v_x(x,y,z=0)$. ($z = 0$ ist konstant auf dem Rechteck.)



$$\iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \int_A \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \tag{5.51}$$

z-Komponente von $\nabla \times \mathbf{v}$.

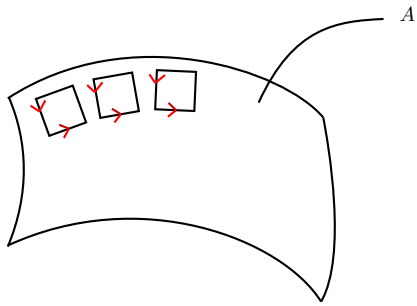
Für das Linienintegral über den Rand von A erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} (dx\,P(x,y) + dy\,Q(x,y)) &= \int_{\partial A} \mathrm{d}x\,v_x(x,y,z) + \mathrm{d}y\,v_y(x,y,z) + \mathrm{d}z\,v_z(x,y,z) \\ &= \int_{\partial A} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \ . \end{aligned} \tag{5.52}$$

Der letzte Schritt folgt aus $dz/dt = 0$ für jede Parametrisierung des Rechtecks. Aus dem Greenschen Theorem folgt für dieses Rechteck

$$\int_A \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \int_{\partial A} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \ . \tag{5.53}$$

Als Beziehung zwischen Vektoren gilt dieser Ausdruck unabhängig von der Wahl der kartesischen Basis (auch wenn wir zur Herleitung eine konkrete Basis genutzt haben, in der das Rechteck in der xy-Ebene liegt).
Für eine Oberfläche, die man in (viele) kleine Rechtecke zerlegen kann, heben sich die Beiträge kleiner Rechtecke im Inneren von A gegenseitig weg. Aus der Summe von (5.53) über diese Rechtecke erhalten wir damit den **Satz von Stokes** (math.: Stokes-Kelvin-Theorem)



$$\boxed{\int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \int_{\partial S} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \ .} \tag{5.54}$$

Info:

Mit dem Satz von Stokes können wir auch den Zusammenhang zwischen Vektorfeldern $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ mit Rotation $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ und Gradientenfeldern zeigen. Für ein Vektorfeld mit verschwindender Rotation sind nach (5.54) Linienintegrale um eine geschlossenen Kurve null. Damit sind auch Linienintegrale vom Weg unabhängig: Wir teilen eine geschlossene Kurve C in ein Teilstück C_1 von Punkt p_1 zu p_2 und ein Teilstück C_2 von p_2 zu p_1 und schreiben das Linienintegral von $\mathbf{v}$ entlang einer Linie C als I_C. Aus $I_{C_1} + I_{C_2} = I_C = 0$ folgt dann $I_{C_1} = -I_{C_2}$. Drehen wir nun die Integrationsrichtung in einem der Teilstücke um, erhalten wir aus zwei unterschiedlichen Integrationswegen von p_1 nach p_2 dasselbe Ergebnis, Linienintegrale sind also wegunabhängig. Mit diesem Ergebnis lässt sich auch $f(\mathbf{r})$ konstruieren, so dass $\mathbf{v} = \nabla f$: $f(\mathbf{r}) = \int_{C(p_0, p_0+\mathbf{r})} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Dabei beschreibt $C(p_0, p_0 + \mathbf{r})$ eine beliebige Kurve vom Ursprung zum Punkt $p_0 + \mathbf{r}$. Nach dem obigen Ergebnis hängt das so definierte skalare Feld nur vom Anfangs- und Endpunkt dieser Kurve ab. $f(\mathbf{r})$ ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt, die durch die Wahl des Ursprungs festgelegt wird.
Randnotiz: Dass Vektorfelder mit Rotation null Gradientenfelder sind gilt für **einfach zusammenhängenden Räume** (vereinfacht: Räume ohne Löcher wie z.B. $\mathbb{R}^3$; genauer Räume in denen für alle Punktpaare ein Kurve existiert der sie verbindet, und jede geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammengezogen werden kann). In nicht einfach zusammenhängenden Räumen kann nämlich noch im Inneren einer berandeten Oberfläche ein weiterer Rand existieren, auf dem das Linienintegral ggf. nicht verschwindet.

Anwendungen des Satz von Stokes liegen in der Magnetostatik: gesucht ist das magnetische Feld, das durch eine gegebene Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ verursacht wird. Die Stromdichte gibt an, wieviel elektrische Ladung pro Zeitinterval durch eine (kleine) Oberfläche $\Delta\mathbf{S}$ fließt, nämlich $\Delta\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}$. Die Maxwellgleichungen der Magnetostatik sind $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ [4]. Das Magnetfeld hat also keine Quellen und Senken. Statt dessen führt eine endliche Stromdichte zu einer endlichen Rotation des Feldes.
Analog zum Gaußschen Integralsatz lässt sich mit dem Satz von Stokes das magnetische Feld leicht berechnen, wenn die Stromdichte eine Symmetrie aufweist. Kernpunkt ist dann eine

[4] Wenn sich das elektrische und magnetische Feld in der Zeit verändert, kommen noch weitere Terme und Gleichungen hinzu, die Sie im nächsten Semester kennenlernen werden.

geschickte Wahl der Oberfläche S. Als Beispiel betrachten wir einen stromdurchflossenen, geraden, unendlich langen, zylindrischen elektrischen Leiter (kurz, einen Draht). Der elektrische Strom I fließt also parallel zum Draht; innerhalb des Drahts ist die Stromdichte konstant, außerhalb des Drahts ist sie null.
Die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes $\mathbf{B}$ und die Symmetrie der Stromdichte führen zu einem magnetischen Feld das konzentrische Kreise mit konstanter Feldstärke um den Draht bildet, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r)\hat{\mathbf{t}}$, wobei $\hat{\mathbf{t}}$ ein Einheitsvektor tangential zu einem Kreis mit Radius r um den Draht ist.
Als Gaußsche Oberfläche S wählen wir eine Kreisscheibe mit Radius r senkrecht zum Draht. Den Strom durch S kann als Oberflächenintegral der Stromdichte geschrieben werden

$$I = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial S} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial S} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) B(r) = \frac{2\pi r B(r)}{\mu_0} \tag{5.55}$$

und wir erhalten $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Im zweiten Schritt haben wir die Maxwellgleichung $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ verwendet, im dritten Schritt den Satz von Stokes, im vierten die Symmetrie des magnetischen Feldes, im letzten Schritt haben wir das Linienintegral ausgewertet.
Dabei muss der Durchmesser des Drahtes nicht klein sein, auch die Verteilung der Stromdichte innerhalb des Drahtes spielt keine Rolle (solange sie zylindersymmetrisch ist). Analog zum Gravitationsfeld einer Kugel ist also das Magnetfeld eines langen Drahtes endlicher Dicke gleich dem Feld eines beliebig dünnen Drahtes, der vom gleichen Strom durchflossen wird.