Übungsaufgaben zur Vorlesung

Computerphysik

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2012

Blatt 10: Abgabetermin: Montag, der 25.06.2012, in der Vorlesung; [E-Mails an Tutoren bis 25.06.2012, 12:00]

Aufgabe 1: Zufallszahlen

Der lineare Kongruenz-Generator erzeugt eine „pseudo-zufällige“ Zahlenfolge $\{u_i\}$ nach der Vorschrift

$$u_{i+1} = (au_i + c) \bmod m \ .$$

Die zu untersuchende Zahlenfolge $\{x_i\}$ mit $0 \leq x_i < 1$ ergibt sich dann aus

$$x_i = \frac{u_i}{m} \ .$$

Wählen Sie drei verschiedene Generatoren, d.h. drei verschiedene Parametersätze (a_k, c_k, m_k), $k = 1, 2, 3$, mit den Startwerten $u_{0,k}$ und

$$\begin{aligned} 0 < \quad & a_k & < m_k \ , \\ 0 \leq \quad & c_k & < m_k \ , \\ 0 \leq \quad & u_{0,k} & < m_k \ , \\ 10^2 < \quad & m_k & < 10^8 \ , \end{aligned}$$

und untersuchen Sie folgende Eigenschaften dieser drei Generatoren.

a) Die Periode p.

b) Die Verteilung $P_n(x)$ (Definition siehe Skript) für $M = 50$ (M: Zahl der Intervalle), und $N = 10^2$, 10^4, 10^6.
[Abgabe: `lcg-p.c` per E-Mail an Tutoren und Ausdruck des Diagramms]

c) Stellen Sie die Korrelationen zwischen aufeinanderfolgenden Zufallszahlen für $N = 1000$ graphisch dar, d.h. tragen Sie x_{i+1} gegen x_i auf.
[Abgabe: Ausdruck des Diagramms]

d) Untersuchen Sie für $10 < N < 10^6$ die N-Abhängigkeit der Korrelationsfunktionen $\chi_{[0,1]}$, $\chi_{[0,1,2]}$ und $\chi_{[0,1,3,4]}$ und beschreiben Sie das Verhalten für große N.
[Abgabe: `lcg-correl.c` per E-Mail an Tutoren und Ausdruck des Diagramms]

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Monte-Carlo-Integration I

Zu bestimmen ist das folgende Integral:

$$I = \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x \ ,$$

(siehe auch Aufgabe 2 von Blatt 2). Das Integral wird genähert durch

$$I = \frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \ ,$$

mit einer Folge von Zufallszahlen $\{x_i\}$, $i = 1, \ldots N$, die im Intervall $[0, \pi]$ gleichverteilt sind (Monte-Carlo-Integration, 'direct sampling').

a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals mit Hilfe der Monte-Carlo-Integration und untersuchen Sie die Abweichung vom exakten Ergebnis in Abhängigkeit von N. Hinweis: als Zufallszahlen-Generator können Sie die rand-Funktion in C verwenden. [Abgabe: `mci1.c` per E-Mail an Tutoren]

b) Vergleichen Sie die Konvergenz der Monte-Carlo-Integration mit der Konvergenz der Integration mit der Trapez-Regel.

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Monte-Carlo-Integration II

a) Betrachten Sie das folgende dreidimensionale Integral

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}z \sin\left(x(y+2z)\right) \ .$$

Verallgemeinern Sie die Monte-Carlo-Integration auf den mehrdimenionalen Fall und Berechnen Sie I. [Abgabe: `mci2.c` per E-Mail an Tutoren]

b) Berechnen Sie das Volumen der $2n$-dimensionalen Einheitskugel mit Hilfe der Monte-Carlo-Integration für $n = 1, 2, \ldots, 7$. Hinweis: das exakte Ergebnis lautet $V_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}$. [Abgabe: `mci3.c` per E-Mail an Tutoren]

(6 Punkte)