Übungsaufgaben zur Vorlesung

Computerphysik

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2012

Blatt 9: Abgabetermin: Montag, der 18.06.2012, in der Vorlesung; [E-Mails an Tutoren bis 18.06.2012, 12:00]

Aufgabe 1: Relaxationsmethode

Betrachten Sie die zweidimensionale Poisson-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi(x,y) = -4\pi\rho(x,y) \tag{1}$$

für die Ladungsverteilung

$$\rho(x,y) = \begin{cases} e^{-(x-2)^2}e^{-y^2} - e^{-(x+2)^2}e^{-y^2} & : \quad -10 < x < 10 \text{ und } -10 < y < 10 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \Phi(-10,y) = \Phi(10,y) = 0 \quad &, \quad -10 < y < 10 \; , \\ \Phi(x,-10) = \Phi(x,10) = 0 \quad &, \quad -10 < x < 10 \; . \end{aligned}$$

Lösen Sie die Differentialgleichung (1) mit Hilfe der Relaxationsmethode. Als Startwert für das Potential können Sie $\Phi_{ij}^{(k=0)} = 0$ setzen.

a) Um die Konvergenz zu überprüfen, wird folgendes Maß für den Unterschied zwischen alter und neuer Lösung berechnet

$$f(k) = \sum_{ij} |\Phi_{ij}^{(k)} - \Phi_{ij}^{(k-1)}| \; .$$

Stellen Sie die Funktion $f(k)$ graphisch dar. Wie beeinflusst der Parameter p (siehe Vorlesungsskript) die Konvergenz?
[Abgabe: `relax.c` per E-Mail an Tutoren und Ausdruck des Diagramms]

b) Stellen Sie die konvergierte Lösung für das Potential als dreidimensionalen Plot dar.
[Abgabe: Ausdruck des Diagramms]

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Gauss-Elimination

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \ , \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \ , \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \ . \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Gleichungssystem numerisch mit Hilfe der Gauss-Elimination.

a) Transformieren Sie das Gleichungssystem zunächst auf die Form

$$A^{(2)}\vec{x} = \vec{b}^{(2)} \ ,$$

mit der oberen Dreiecksmatrix $A^{(2)}$. Wie lauten die Matrizen $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ und die Vektoren $\vec{b}^{(0)}$ $\vec{b}^{(1)}$, $\vec{b}^{(2)}$?

b) Bestimmen Sie durch iteratives Einsetzen in das Gleichungssystem $A^{(2)}\vec{x} = \vec{b}^{(2)}$ den gesuchten Vektor $\vec{x}$.

c) Setzen Sie schließlich zur Probe den Vektor $\vec{x}$ in das Gleichungssystem $A^{(0)}\vec{x} = \vec{b}^{(0)}$ ein.
[Abgabe: `lg-gauss.c` per E-Mail an Tutoren]

(6 Punkte)

Aufgabe 3: Determinanten

Gegeben sind die folgenden $n \times n$-Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \\ & & & & n-1 & 1 \\ 0 & & & & 1 & n \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & & \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & 3 & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & 2 \\ n & & & & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für $n = 5$ die folgenden Determinanten:

$$|A|, |B|, |AB| \ .$$

[Abgabe: `det.c` per E-Mail an Tutoren]

(4 Punkte)