Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2011

Blatt 10: Abgabetermin: Dienstag, der 05.07.2011, 10:00 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1: Stokes'scher Satz

Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{b} \times \vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ über die Kreislinie in der x-z-Ebene mit Zentrum der Kreisfläche bei $(0,0,0)$ und Radius R, und zwar

a) durch explizite Berechnung des Linienintegrals und

b) unter Verwendung des Stokes'schen Satzes durch die Berechnung des entsprechenden Flächenintegrals.

(4 Punkte)

Aufgabe 2: elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders

Gegeben sei die Ladungsdichte eines (unendlich langen) homogen geladenen Zylinders (Radius R)

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & : \quad 0 \le r \le R \\ 0 & : \quad r > R \end{cases} \ .$$

In der Beschreibung mit Zylinderkoordinaten $r = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi, z$ hängt die Ladungsdichte also nur von r ab.

a) Das elektrostatische Potential Φ hängt damit ebenfalls nur von r ab. Zeigen Sie, dass daraus folgt

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r \ ,$$

mit $\vec{e}_r = \frac{1}{r}(x,y,0)$ dem Einheitsvektor in r-Richtung.

b) Berechnen Sie die Funktion $E(r)$ für $0 \le r < \infty$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes. Hinweis: Wählen Sie für die dabei auftretenden Integrale das Volumen bzw. die Oberfläche eines Zylinders der Länge L $(0 \le z \le L)$ und Radius r.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: elektrostatisches Randwertproblem

Das Volumen V eines Würfels ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq z \leq L$) sei vollständig umgeben von einer Metallfläche. Die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in diesem Volumen sei $\rho(\vec{r}) = 0$ und das Potential auf der Metallfläche sei $\phi_\mathrm{m} = 0$. Zeigen Sie durch Lösen der Poisson-Gleichung, dass unter den gegebenen Randbedingungen das Potential in ganz V verschwindet.

(3 Punkte)

Aufgabe 4: Bildladungsmethode für kontinuierliche Ladungsverteilung

In dieser Aufgabe wird die Punktladung (siehe das Beispiel in der Vorlesung) ersetzt durch eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in V$ und $V = \{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0\}$. Die Metalloberfläche sei weiterhin gegeben durch $F = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$ und die Randbedingung sei gegeben durch $\phi(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \in F$.

a) Konstruieren Sie eine Ladungsverteilung $\rho_0(\vec{r})$, die für $\vec{r} \in V$ mit $\rho(\vec{r})$ übereinstimmt, und die die Randbedingung für das Potential für $\vec{r} \in F$ erfüllt.

b) Berechnen Sie die Normalkomponente des elektrischen Feldes auf der Metalloberfläche und damit die Oberflächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$.

c) Überprüfen Sie das Ergebnis für $\sigma(\vec{r})$ für die in der Vorlesung untersuchte Ladungsverteilung, also für $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{a})$.

(6 Punkte)