Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2011

Blatt 2: Abgabetermin: Dienstag, der 19.04.2011, 10:00 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1: Newton'sche Bewegungsgleichung für N-Teilchen-System

Betrachten Sie ein System aus N Teilchen (Massenpunkten mit Massen m_i, $i = 1, \dots N$), die über die Gravitationskraft miteinander wechselwirken. Zusätzlich befinden sich die Teilchen in einem äußeren Kraftfeld $\vec{F}_e(\vec{r})$.

a) Wie lauten die Newton'schen Bewegungsgleichungen für die Koordinaten $\vec{r}_i$ der Teilchen?

b) Setzen Sie nun $\vec{F}_e(\vec{r}) = 0$. Zeigen Sie, dass innere Kräfte ein System aus Massenpunkten (das oben definierte N-Teilchen-System) nicht beschleunigen können. Betrachten Sie dazu die zweite zeitliche Ableitung der Schwerpunktskoordinate $\vec{R}$ mit

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \quad , \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Galilei-Transformation, Galilei-Invarianz

a) Zeigen Sie, dass das 2. Newton'sche Axiom bei Anwesenheit von Reibungskräften nicht invariant ist unter Galilei-Transformationen.

b) Die Galilei-Transformationen

$$\hat{G} : (\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r}\,', t') = (\hat{D}\vec{r} + \vec{r}_0 - \vec{\omega} t, t + t_0)$$

bilden eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung zweier Transformationen $\hat{G}_1$ und $\hat{G}_2$ ein Element der Galilei-Gruppe ist und geben Sie die definierenden Größen der resultierenden Transformation, d.h. $\hat{D}$, $\vec{r}_0$, $\vec{\omega}$ und t_0, an.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Drehimpuls

a) Die Bahn eines Körpers sei gegeben durch $\vec{r}(t)$, der Drehimpuls $\vec{l}(t)$ werde relativ zum Bezugspunkt $\vec{r}_0 = \vec{0}$ bestimmt. Zeigen Sie, dass die vom Vektor $\vec{r}$ überstrichene Fläche A mit der Zeit wie

$$\Delta A = \frac{|\vec{l}(t)|}{2m} \Delta t$$

zunimmt.

b) Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ eines N-Teilchen-Systems für $\vec{F}_\mathrm{e} = \vec{0}$ (keine äußeren Kräfte) eine Erhaltungsgröße ist.

c) Betrachten Sie ein System mit zwei Teilchen (Koordinaten $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$; Massen m_1, m_2). Schwerpunkts- und Relativkoordinate dieses Systems sind gegeben durch

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{2} m_i \vec{r}_i \quad , \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \ .$$

Geben Sie den Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ dieses Systems in den Koordinaten $\vec{R}$ und $\vec{r}$ (und deren Ableitungen) an.

(6 Punkte)

Aufgabe 4: Berechnung von Linienintegralen

Gegeben sei folgendes Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x+y \\ z-xy \\ z \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die von der Kraft $\vec{F}$ entlang der Wege C_i $(i = 1,2,3)$ geleistete Arbeit ΔA_i mit

$$\Delta A_i = \int_{\vec{a},C_i}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad , \quad \vec{a} = (0,0,0) \quad , \quad \vec{b} = (1,1,1) \ .$$

Dabei sind die Wege C_i gegeben durch:

$$\begin{aligned} C_1 &: \quad \vec{r}(t) = (t,t,t) \quad , \quad 0 < t < 1 \\ C_2 &: \quad \vec{r}(t) = (t^2, -t+2t^2, t) \quad , \quad 0 < t < 1 \\ C_3 &: \quad \vec{r}(t) = (t,t,a+b\exp(t)) \quad , \quad 0 < t < 1 \end{aligned}$$

Hinweis: für den Weg C_3 sind zunächst die Konstanten a und b zu bestimmen.

b) Warum hängen die ΔA_i vom Verlauf des Weges und nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt ab?

(7 Punkte)