Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2011

Blatt 4: Abgabetermin: Dienstag, der 03.05.2011, 10:00 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1: Kugelkoordinaten

Der Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten (x, y, z) und Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ist gegeben durch

$$\vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = r \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad .$$

a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$ ein lokales Dreibein bilden, d.h. jeweils orthogonal aufeinander stehen.

c) Bestimmen Sie die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ in Kugelkoordinaten und formulieren Sie damit die Newton'sche Bewegungsgleichung für ein Zentralkraftfeld der Form $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$.

(7 Punkte)

Aufgabe 2: eindimensionale Bewegung im Schwerefeld

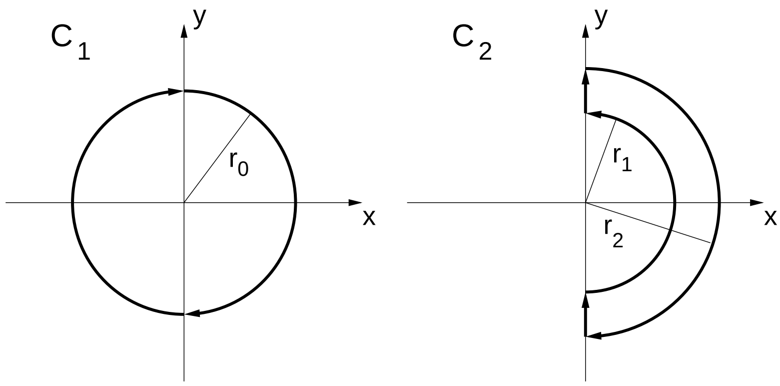
Zeichnen Sie das Phasenraumportrait für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens (Masse m) im Schwerefeld, d.h. für $V(x) = mgx$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Kraftfeld, Potential

Gegeben sei ein Kraftfeld der Form $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_\varphi$ (in Zylinderkoordinaten r, φ, z, d.h. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist der radiale Abstand von der z-Achse).

a) Für welche Funktionen $f(r)$ ist $\vec{F}(\vec{r})$ im Gebiet $\mathbb{R}\backslash\{\vec{r}|r = 0\}$ wirbelfrei?



b) Berechnen Sie für dieses $\vec{F}(\vec{r})$ die Arbeit ΔA entlang der beiden (geschlossenen) Wege C_1 und C_2 (siehe Abbildung). (Beide Wege verlaufen in der x-y-Ebene, d.h. $z = 0$).

(6 Punkte)

Aufgabe 4: Zeitverbrauch bei eindimensionaler Bewegung

a) In der Vorlesung wurde die Schwingungsperiode einer gebundenen eindimensionalen Bewegung mit konstanter Energie E im Potential $V(x)$ abgeleitet:

$$\tau = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \mathrm{d}x \ ,$$

mit x_1, x_2 den beiden Umkehrpunkten und $E = V(x_1) = V(x_2)$. Das Potential sei gegeben durch $V(x) = k|x|^\alpha$ mit $\alpha > 0$ und $k > 0$.

Führen Sie eine geeignete Substitution auf eine Variable u durch, so dass der Integrand von der (dimensionslosen) Form $1/(\sqrt{1 - |u|^\alpha})$ ist. Lesen Sie am entstandenen Ausdruck ab, für welche Werte von α die Schwingungsperiode *nicht* von der Gesamtenergie abhängt.

b) Betrachten Sie jetzt das repulsive Potential $V(x) = -k|x|^\alpha$ mit $\alpha > 0$ und $k > 0$. Die Energie des Teilchens sei $E = 0$. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen am Ort $x = x_0 > 0$. Für welche Werte von α ist die Zeit, die das Teilchen zum Erreichen der Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ braucht, endlich?

(5 Punkte)