Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2011

Blatt 9: Abgabetermin: Dienstag, der 28.06.2011, 10:00 (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1: eindimensionale Wellengleichung: Anfangsbedingungen

In der Vorlesung wurde bereits die allgemeine Lösung der Auslenkung $\xi(x,t)$ für die eindimensionale Wellengleichung mit den Randbedingungen $\xi(x=0,t)=\xi(x=L,t)=0$ angegeben:

$$\xi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[a_n\sin\left(\sqrt{\frac{K}{\rho}}\frac{n\pi}{L}t\right)+b_n\cos\left(\sqrt{\frac{K}{\rho}}\frac{n\pi}{L}t\right)\right] .$$

Gesucht ist die Lösung $\xi(x,t)$ für die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}\xi(x,t=0) &= h(x)=\delta(x-\frac{1}{2}L)\ \text{ mit } h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) ,\\ \dot{\xi}(x,t=0) &= 0 .\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie zunächst, dass die Koeffizienten der Fourierreihe von $h(x)$ gegeben sind durch

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)h(x)$$

b) Berechnen Sie damit die b_n für die gegebenen Anfangsbedingungen und geben Sie die volle Zeitabhängigkeit von $\xi(x,t)$ an.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: elektrisches Feld und elektrostatisches Potential

a) Das elektrische Feld einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r})=\int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r'})\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} .$$

Zeigen Sie, dass für beliebige (diskrete oder kontinuierliche) Ladungsverteilungen gilt:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})=\vec{0} .$$

b) Das elektrostatische Potential einer Ladungsverteilung ist gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Zeigen Sie, dass für dieses $\phi(\vec{r})$ gilt $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3: Die dreidimensionale δ-Funktion

Berechnen Sie

a)

$$\int \mathrm{d}^3 r \vec{F}(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r_0}) \ , \text{ mit } \ \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sin(x)\cos(y) \\ \sin(x)\sin(y) \\ \cos(z) \end{pmatrix} \ , \text{ und } \ \vec{r_0} = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

b)

$$\int \mathrm{d}^3 r e^{-r^2} \delta(3\vec{r})$$

c)

$$\int_V \mathrm{d}^3 r f(\vec{r}) \sum_{n=0}^{4} \delta(\vec{r} - n\vec{a}) \ , \quad \text{mit} \ \ f(\vec{r}) = x + y + z \ , \ \vec{a} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

und V das Volumen einer Kugel mit Radius 2 um den Ursprung.

(5 Punkte)

Aufgabe 4: Darstellungen der dreidimensionalen δ-Funktion

a) Betrachten Sie eine homogen geladene Kugel um den Koordinatenursprung mit Radius R und Gesamtladung Q. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho_R(\vec{r})$ an und zeigen Sie, dass

$$\lim_{R \to 0} \rho_R(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r}) \ .$$

b) In der Vorlesung wurde folgende Darstellung der δ-Funktion verwendet:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r'}) \ . \tag{1}$$

Zeigen Sie zunächst, dass die linke Seite der Gleichung für alle $\vec{r} \neq \vec{r'}$ verschwindet.

c) Setzen Sie jetzt in Gl. (1) $\vec{r'} = 0$ und integrieren Sie beide Seiten der Gleichung über das Volumen einer Kugel mit Zentrum im Koodinatenursprung und Radius R. Verwenden Sie für die Auswertung des Integrals auf der linken Seite den Gauß'schen Satz.

(6 Punkte)