Übungsaufgaben zur Vorlesung

Klassische Theoretische Physik I

Priv.-Doz. Dr. R. Bulla

SS 2013

Blatt 10: Abgabetermin: Dienstag, der 09.07.2013, 10:00

Aufgabe 1: elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders

Gegeben sei die Ladungsdichte eines (unendlich langen) homogen geladenen Zylinders (Radius R)

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & : \quad 0 \leq r \leq R \\ 0 & : \quad r > R \end{cases} \quad .$$

In der Beschreibung mit Zylinderkoordinaten $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi, z$ hängt die Ladungsdichte also nur von r ab.

a) Das elektrostatische Potential Φ hängt damit ebenfalls nur von r ab. Zeigen Sie, dass daraus folgt

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r \ ,$$

mit $\vec{e}_r = \frac{1}{r}(x, y, 0)$ dem Einheitsvektor in r-Richtung.

b) Berechnen Sie die Funktion $E(r)$ für $0 \leq r < \infty$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes. Hinweis: Wählen Sie für die dabei auftretenden Integrale das Volumen bzw. die Oberfläche eines Zylinders der Länge L $(0 \leq z \leq L)$ und Radius r.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: elektrostatisches Randwertproblem

Das Volumen V eines Würfels ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq z \leq L$) sei vollständig umgeben von einer Metallfläche. Die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in diesem Volumen sei $\rho(\vec{r}) = 0$ und das Potential auf der Metallfläche sei $\phi_{\mathrm{m}} = 0$. Zeigen Sie durch Lösen der Poisson-Gleichung, dass unter den gegebenen Randbedingungen das Potential in ganz V verschwindet.

(3 Punkte)

Aufgabe 3: Feld einer homogen geladenen Kugel

In der Vorlesung wurde das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel mit Hilfe des Gaußschen Satzes berechnet. Zeigen Sie, dass man das elektrische Feld auch über die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \ ,$$

erhält.
Hinweise:
1. Die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ und das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ hängen nur von $r = |\vec{r}|$ ab. Deswegen lässt sich die Rechnung vereinfachen, indem man den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten verwendet:

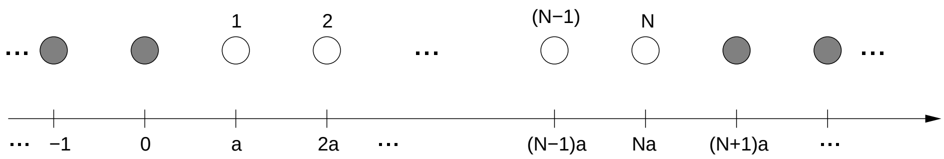
$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \dots \ ,$$

dabei steht ... für Terme, die partielle Ableitungen nach ϑ und φ enthalten.

2. Die Integrationskonstanten sollen durch folgende Randbedingungen festgelegt werden: $\phi(0)$ endlich, $\phi(\infty) = 0$, $\phi(r)$ stetig bei R und $\phi'(r)$ stetig bei R.

(5 Punkte)

Aufgabe 4: gravitatives N-Körper-Problem in $d = 1$ (Teil 2)



In Aufgabe 4 von Blatt 9 wurde gezeigt, dass die gesamte potentielle Energie des in der Abbildung dargestellten gravitativen N-Körper-Problems gegeben ist durch

$$V(\vec{X}) = -\sum_{i<j}\frac{\alpha}{|x_i - x_j|} - \sum_i\sum_j\frac{\alpha}{|x_i - p_j|}$$

(zur Notation siehe Blatt 9).

a) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $V^{(2)}$ mit den Matrixelementen

$$V^{(2)}_{nm} = \left.\frac{\partial^2 V(\vec{X})}{\partial x_n \partial x_m}\right|_{\vec{X}=\vec{X}_0}$$

b) Geben Sie die Hesse-Matrix für den Fall $N = 2$ an.

c) Welches Verhalten folgt damit für das System mit $N = 2$ nahe der Ruhelage?

(5 Bonuspunkte)